

求解周期性分段线性系统动态响应的高效数值方法*

何冬东, 高强, 钟万勰

(工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学);
大连理工大学 运载工程与力学学部 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 基于参变量变分原理,提出了一种求解具有大量间隙弹簧的周期性分段线性系统动态响应的高效率数值方法.通过参变量变分原理来描述间隙弹簧,将复杂的非线性动力问题转化为线性互补问题求解,避免了求解过程中的迭代和刚度阵更新,该算法能准确判断间隙弹簧的压缩和松弛状态.基于结构的周期性和能量传播速度的有限性,提出了一种求解系统动态响应的高效率精细积分方法.该算法指出周期结构的矩阵指数中存在大量的相同元素和零元素,从而不需要重复计算和存储这部分元素,节省了计算量并降低了计算机存储要求.分析了一个五自由度分段线性系统在简谐荷载作用下的动力学行为,包括稳定的周期运动、准周期运动和混沌运动.通过与 Runge-Kutta 方法的比较,该文方法的正确性和高效率得到了验证.

关键词: 分段线性系统; 动态响应; 参变量变分原理; 周期性; 精细积分方法

中图分类号: TB122; O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.390055

引言

在自然科学和工程技术中广泛存在着各种非线性问题,为了简化非线性问题,常常采用分段线性理论来近似系统的非线性行为.在众多领域中,均能发现很多非线性动力学问题的理论模型中含有分段线性,例如电力工程^[1]、生物工程^[2]、航空航天工程^[3]等.在工程结构系统中较为常见的是分段线性刚度或阻尼,如由压杆和绳索组成的 tensegrity 结构^[4]、含有间隙的振动机械^[5]和振动压实系统^[6]等.由于分段线性系统的动力学特性有利于工程设计和应用^[7],因此其被广泛应用于工程实践中.各种理论和实践分析表明,含有分段线性特点的动力学系统,受周期荷载作用将会展现非常复杂的动力学行为^[8-9].

尽管一些分段线性动力学系统的自由振动可以被解析求解,但是要解析求解一个分段线性系统的强迫振动是非常困难的,即使是很简单的分段线性系统.一些经典的解析方法和近似解析法,如摄动法、平均法、谐波平衡法和增量谐波平衡法等^[10-12],常常被用于求解分段线性

* 收稿日期: 2018-02-04

基金项目: 国家自然科学基金(11572076; 914748203); 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2014CB049000)

作者简介: 何冬东(1988—),男,博士生(E-mail: d.dong.he@mail.dlut.edu.cn);

高强(1978—),教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: qgao@dlut.edu.cn).

动力学系统的稳态响应.Narimani 等^[13]和 Deshpande 等^[14]采用平均法求解了两段线性系统在稳态情况下的频率响应.Moussi 等^[15]结合谐波平衡法和渐进数值方法提出了一种求解双自由度分段线性系统正则问题的计算方法.Xu 等^[16]采用增量谐波平衡法给出了具有分段线性黏性阻尼特性动力系统的周期解.但是这些方法应用范围仅限于弱非线性系统,对于具有强非线性特点的分段线性系统则很难给出准确解.此外,对于具有大量自由度和非线性的分段线性系统,这些方法也很难给出准确解.

对于多自由度的强非线性系统,通常只能采用数值方法求解.若给定初值,很多数值方法如 Runge-Kutta 方法、直接积分法结合 Newton-Raphson 方法等都能给出分段线性系统的高精度瞬态响应和稳态响应.但这些算法通常需要反复迭代计算,使得计算效率非常低,特别是收敛精度设置得很高时.Zhong(钟万勰)等^[17]提出的参变量变分原理对于分段线性分析具有明显优势.因此,采用参变量变分原理来描述分段线性问题,将其转化为线性互补问题^[18-19],可以避免求解过程中的反复迭代.针对结构的周期性特点,基于精细积分方法^[20],建立一种求解分段线性系统动态响应的高效率数值积分方法.该算法指出周期结构的矩阵指数中存在大量的相同元素与零元素,从而不需要重复计算和存储这部分元素,节省了计算量并降低了计算机存储要求.数值结果验证了本文方法的正确性.分析了一个五自由度不对称分段线性系统稳态运动的动力学行为,如稳定的周期运动、准周期运动和混沌运动.此外,通过求解一个含有 1 000 个自由度和 1 000 个间隙弹簧的分段线性系统在周期荷载作用下的动态响应,比较了本文方法和 Runge-Kutta 方法的计算时间,证明了本文方法对于求解大规模周期性分段线性系统动态响应的高效率.

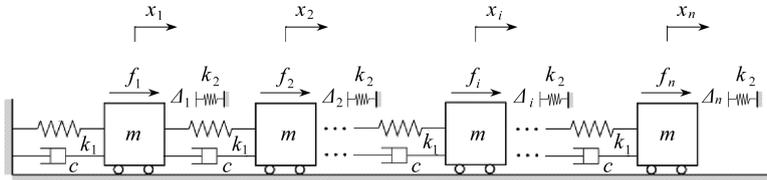


图 1 多自由度分段线性系统

Fig. 1 A piecewise linear system with multiple degrees of freedom

1 基于参变量变分原理的动力学控制方程

考虑一个如图 1 所示具有大量间隙弹簧的多自由度分段线性系统.该系统含有 n 个质量块, n 个正常连接的弹簧和 n 个阻尼器,在每个质量块的右端都有一根刚度为 k_2 的弹簧,质量块与该弹簧之间存在一个初始间隙 $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$.每个质量块均受一简谐荷载 $f_i(t) = A_i \sin(\omega_i t)$ 作用.间隙弹簧只有在质量块的位移超过初始间隙 Δ_i 时才会受力,而当质量块的位移小于初始间隙时,该弹簧处于松弛状态,而刚度为 k_1 的弹簧则始终提供弹性恢复力.于是该分段线性系统的动力平衡方程可以写作

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}, \quad (1)$$

其中, \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ 和 $\ddot{\mathbf{x}}$ 分别为系统的位移、速度和加速度向量, \mathbf{M} 为质量阵, \mathbf{C} 为阻尼阵, \mathbf{K}_1 是所有刚度为 k_1 的弹簧组成的刚度阵, \mathbf{f} 为外荷载向量, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ 为刚度为 k_2 的间隙弹簧提供的弹性恢复力,即

$$\begin{cases} \mathbf{M} = m\mathbf{I}_n, \\ \mathbf{C} = c \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f} = \{f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n\}^T, \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \{P(x_1) \ P(x_2) \ \cdots \ P(x_n)\}^T, \end{cases} \quad (2)$$

式中, \mathbf{I}_n 是一个 $n \times n$ 维的单位矩阵。

对于第 i 根间隙弹簧,其本构关系如图 2 所示,当质量块的位移未超过初始间隙时,该弹簧处于松弛状态,其提供的弹性恢复力为 0;当质量块的位移超过初始间隙时,该弹簧处于压缩状态,提供的弹性恢复力为一个正值。其物理方程可以表示为

$$P_i = P(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq \Delta_i, \\ k_2(x_i - \Delta_i), & x_i > \Delta_i. \end{cases} \quad (3)$$

从式(3)可以看出,这是一个分段线性刚度问题,其本构关系在 $x_i = \Delta_i$ 处存在转折点。因此,在求解方程(1)的过程中,在每个积分步内都必须准确判断质量块的位移是否超过了初始间隙,然后更新间隙弹簧的刚度阵。这使得求解分段线性系统动态响应的效率非常低下,尤其是该系统还含有大量自由度和大量间隙弹簧。因此,有必要发展一种求解具有大量间隙弹簧的多自由度分段线性动力学系统动态响应的高效率算法。在本文中,将采用参变量变分原理^[17]来描述间隙弹簧的分段线性特点,从而避免在积分过程中更新间隙弹簧的刚度阵。

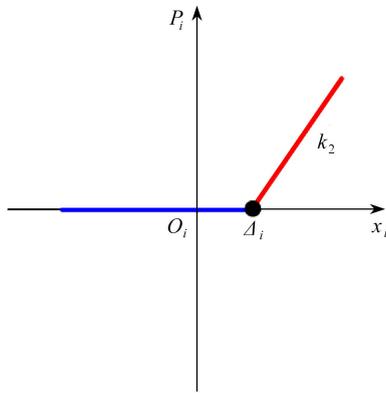


图2 间隙弹簧的本构关系

Fig. 2 The constitutive relation of the gap-activated spring

显然,式(3)中间隙弹簧的弹性恢复力 P_i 是一个非负的值。引入一个非负的松弛变量 ν_i ,其本构关系(3)可以写作如下互补关系式:

$$P_i - k_2(x_i - \Delta_i) - \nu_i = 0, \quad P_i \geq 0, \nu_i \geq 0, P_i \nu_i = 0. \quad (4)$$

将运动平衡方程(1)中间隙弹簧的弹性恢复力作为外力项移到方程右边,并结合互补关系式,可以得到分段线性系统的动力学控制方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_1\mathbf{x} = -\mathbf{P} + \mathbf{f}, \quad (5)$$

$$\mathbf{P} - \mathbf{K}_2(\mathbf{x} - \mathbf{\Delta}) - \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

式中, $P_i \geq 0, \nu_i \geq 0, P_i \nu_i = 0, \mathbf{\Delta}$ 是初始间隙向量, \mathbf{K}_2 是间隙弹簧压缩刚度组成的刚度阵,即

$$\mathbf{K}_2 = k_2 \mathbf{I}_n. \quad (7)$$

间隙弹簧的应力状态由其弹性恢复力 P_i 来表征, 即当 $P_i > 0$ 时, 间隙弹簧处于压缩状态; 当 $P_i = 0$ 时, 间隙弹簧为松弛状态. 因此, 在实际求解过程中, 只需计算 P_i 的值即可, 避免了不断判断间隙弹簧的状态, 从而避免了其刚度矩阵的更新.

2 基于周期性的高效率精细积分方法

基于参变量变分原理, 分段线性动力学方程(1)被转换成了由线性动力学方程(5)和互补关系式(6)组成的动力学控制方程. 对于方程(5), 可以采用直接积分法求解, 如 Runge-Kutta、Newmark- β 或 Wilson- θ 方法等. 由于稳定性和精度的要求, 这些方法的积分步长都需要取得很小, 这使得问题的计算规模非常大、效率非常低. 由 Zhong(钟万勰)等^[20]提出的精细积分方法允许采用很大的积分步长, 并具有精度高和稳定性好的特点^[21]. 对于小规模结构, 精细积分方法可以高效精确地求解其动态响应, 但是这种方法在处理规模很大的系统时, 矩阵指数的计算量非常大. 因此有必要发展一种求解多自由度分段线性系统响应的高效率积分方法.

方程(5)在状态空间中可以写作

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{F}(t), \quad (8)$$

其中 \mathbf{v} 是状态向量, 且

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{P}) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

将积分区间等分为步长为 η 的时间区间, 即 $t_0, t_1 = t_0 + \eta, \dots, t_k = t_0 + k\eta, \dots$. 若记 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(t_k)$, 那么方程(8)的解为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}\mathbf{v}_k + \int_0^\eta \exp[\mathbf{H}(\eta - \xi)] \mathbf{F}(t_k + \xi) d\xi, \quad (10)$$

其中 \mathbf{T} 是系统的矩阵指数, 其定义如下:

$$\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H}\eta). \quad (11)$$

假设在一个积分步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内, 参数变量 $\mathbf{P}(t)$ 采用线性近似, 即

$$\mathbf{P}(t) = \left(1 - \frac{t}{\eta}\right) \mathbf{P}_k + \frac{t}{\eta} \mathbf{P}_{k+1}. \quad (12)$$

则方程(10)中积分可以解析求得

$$\mathbf{v}_{k+1} = \bar{\mathbf{v}}_{k+1} + \boldsymbol{\varphi} \mathbf{P}_{k+1}, \quad (13)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{v}}_{k+1} = \mathbf{T}\mathbf{v}_k + \mathbf{T} \sum_{i=1}^n (\mathbf{C}_i^1 \sin(\omega_i t_k) + \mathbf{C}_i^2 \cos(\omega_i t_k)) - \\ \quad \sum_{i=1}^n (\mathbf{C}_i^1 \sin(\omega_i t_{k+1}) + \mathbf{C}_i^2 \cos(\omega_i t_{k+1})) - (\boldsymbol{\Psi}_0 + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{P}_k, \\ \boldsymbol{\varphi} = -\frac{1}{\eta} \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{K}_2, \quad \mathbf{C}_i^1 = (\omega_i^2 \mathbf{I} + \mathbf{H}^2)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{C}_i^2 = (\omega_i^2 \mathbf{I} + \mathbf{H}^2)^{-1} \omega_i \mathbf{A}_i, \\ \boldsymbol{\Psi}_0 = \mathbf{H}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \mathbf{M}^{-1}, \\ \boldsymbol{\Psi}_1 = \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{H}^{-2} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) - \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \eta \right) \mathbf{M}^{-1}, \end{array} \right. \quad (14)$$

其中标量 $a_i (i = 1, 2, \dots, d)$ 对应于矩阵指数的对角线元素, 向量 b_i 的第一个元素不为零, 向量 c_i 的最后一个元素不为零. 显然, 式(15)中矩阵指数的其他分块矩阵 T_{12}, T_{21} 和 T_{22} 均具有上述结构特点. 因此, 只需要几个原胞组成的子结构对应的矩阵指数即可得到完整结构对应的矩阵指数的全部信息. 相对于完整结构, 几个原胞的自由度少很多, 可以快速计算出其对应的矩阵指数. 因此, 采用上述方法可以提高整体结构矩阵指数的计算效率并降低存储要求.

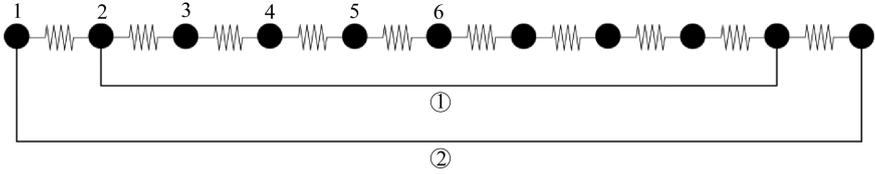


图3 周期结构

Fig. 3 A periodic structure

考虑如图3所示的结构, 并假设在一个积分步长内, 能量传播距离不超过3个节点. 提取出子结构①, 并计算其对应的矩阵指数. 假设仅节点6上有单位位移, 一个积分步长后, 其能量不能传播到节点2, 因而其边界对结构的响应不产生影响. 显然, 子结构①与完整结构②对应节点的位移和速度相同, 而完整结构多出的左右两节点的响应都为0. 因此, 只需计算子结构①的矩阵指数, 并从矩阵指数中恰当位置提取节点1对应的数据, 即可得到式(19)中需要的 a_i, b_i 和 c_i .

以上给出了计算周期结构对应矩阵指数的主要思想. 但是, 以上讨论基于预知了能量传播的速度, 但对于复杂问题, 能量传播速度很难事先计算. 因此, 本文采用如下的处理方法. 为了计算周期结构的矩阵指数, 首先, 给定两个参数, 一个是期望采用的时间步长 η_1 , 另一个是一个整数 q , 它表示在一个时间步长内能量不能传递出 q 个单胞. 假设能量传递出 q 个单胞所需最小时间为 η_2 , 则最后采用 $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ 作为时间步长. 先将 η_1 作为时间步长, 并形成 $2q + 1$ 个单胞组成的子结构对应的系统矩阵, 再执行精细积分方法. 在执行精细积分法的计算过程中, 由于将时间步长 η_1 划分为 2^N 份, 再计算时间区段 $\eta_1/2^N$ 对应的矩阵指数, 此时 $\eta_1/2^N$ 是一个非常小的时间区段, 能量不可能传递出 q 个单胞. 然后, 执行精细积分法的增量加法定理, 每执行一次相当于时间步长比上一次加倍, 这个过程中检查能量是否传递出 q 个单胞. 如果执行完 N 次加法定理后, 能量没有传递出 q 个单胞, 则采用 η_1 作为最终的时间步长, 此时矩阵指数也已经计算出. 如果在执行完第 $\bar{N} \leq N$ 次加法定理后, 检测到能量传递超出 q 个单胞, 则取 $\eta_2 = 2^{\bar{N}-1} \eta_1$ 作为最终的时间步长, 对应的矩阵指数在上一次的加法定理中也已经计算出.

采用这样的方法, 仅需用很少的单胞组成质量、阻尼和刚度矩阵. 然后计算对应的矩阵指数, 提取一些矩阵元素, 即可得到周期结构对应矩阵指数的全部信息. 从而可以高效地计算周期结构的动态响应.

3 分段线性系统的线性互补方程

由间隙弹簧的参数变量 λ_{k+1} 表征的分段线性系统动态响应已经在方程(13)中给出, 通过分块, 即可得到系统位移的速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \varphi_1 P_{k+1}, \\ \dot{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \varphi_2 P_{k+1}. \end{cases} \quad (20)$$

将位移代入到互补关系(6)中,得到间隙弹簧的线性互补问题:

$$\boldsymbol{\nu} - \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{Z}_2 = \mathbf{0}, \quad P_{i,k+1} \nu_i = 0, \nu_i \geq 0, P_{i,k+1} \geq 0, \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_n + \boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{Z}_2 = \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\Delta} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}). \quad (22)$$

采用 Lemke 方法^[22],方程(21)中间隙弹簧的参数变量很容易计算得到.对于第 i 根弹簧,其应力状态由其参数变量 P_i 来表征,即 $P_i = 0$ 表明间隙弹簧处于松弛状态,而 $P_i > 0$ 表明间隙弹簧处于压缩状态.将参数变量 \mathbf{P}_{k+1} 代入方程(13),则可得到分段线性系统在 t_{k+1} 时的响应.

4 数值结果

4.1 五自由度分段线性系统的动力学行为

考虑图 1 所示的分段线性系统,取 $n = 5$,研究其复杂的动力学行为.系统的初始位移和速度均为 0,在第 1 个、第 3 个和第 5 个节点作用外荷载 $A \sin(\omega t)$,在第 2 个和第 4 个节点作用外荷载 $-A \sin(\omega t)$.为了方便分析分段线性系统各参数对其动力学行为的影响,将动力学控制方程(5)和(6)写作如下无量纲形式:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \zeta \tilde{\mathbf{C}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{Q}} \sin(\theta \tau), \quad (23)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{P}} - \alpha(\tilde{\boldsymbol{\Delta}} - \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad (24)$$

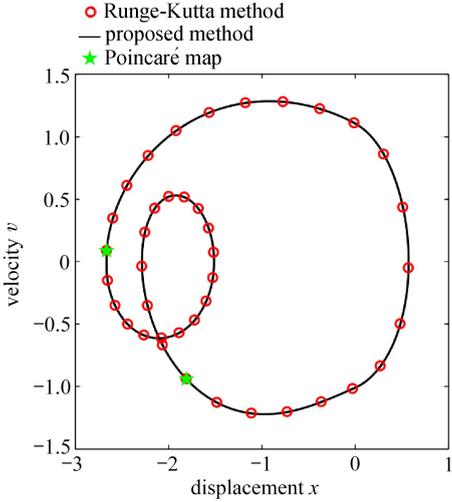
其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_i \tilde{v}_i = 0, \tilde{v}_i \geq 0, \tilde{P}_i \geq 0, \\ \tau = \omega_0 t, \theta = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \alpha = \frac{k_2}{k_1}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{k_1 m}}, \\ \tilde{\mathbf{x}} = \frac{k_1}{A} \mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = \frac{k_1}{A} \boldsymbol{\Delta}, \tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{A} \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{A} \boldsymbol{\nu}, \tilde{\mathbf{Q}} = \{1 \quad -1 \quad 1\}^T, \\ \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{K}}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (25)$$

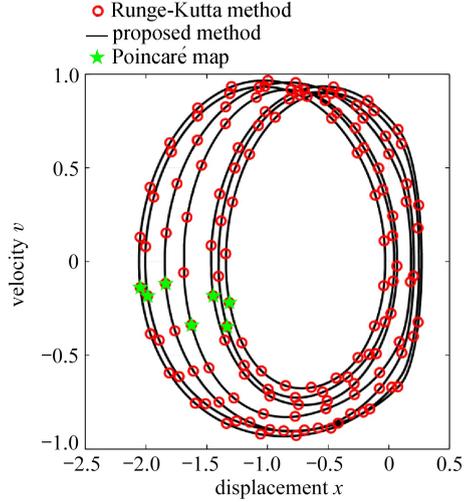
可以发现,该五自由度分段线性系统的动力学行为由 $\alpha, \zeta, \tilde{\boldsymbol{\Delta}}$ 和 θ 这 4 个无量纲参数确定.对这 4 个无量纲参数取 4 组不同的值,分别采用本文方法和 Runge-Kutta 方法来计算该系统的动态响应,计算时间区间为 $[0, 1000T]$,其中 $T = 2\pi/\theta$ 是外荷载的周期.由于仅有 5 个自由度,本文方法计算完整结构的矩阵指数,时间步长取为 $\eta = T/200$.Runge-Kutta 方法采用 MATLAB 的 Ode45 函数作为求解器,并将容差设置为 $\delta = 10^{-10}$.

先积分 500 个周期使系统响应达到稳态,记录系统在外荷载作用 500 个周期以后(即 $500T - 1000T$) 的响应.当 $\alpha = 2, \zeta = 0.2, \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = 0$ 和 $\theta = 1$ 时,以及 $\alpha = 8, \zeta = 0.2, \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = 0.1$ 和 $\theta = 1$ 时,两种方法得到的系统第 5 个节点稳态运动的相轨迹和 Poincaré 映射如图 4 所示.可以发现,本文方法与 Runge-Kutta 方法得到的相轨迹都是一条闭合曲线,并且完全重合,表明本文方法的正确性.图 4(a) 和 (b) 中 Poincaré 映射分别为 2 个和 7 个不动点,这表明当 $\alpha = 2, \zeta = 0.2, \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = 0$ 和 $\theta = 1$ 时系统出现 2 倍周期运动,当 $\alpha = 8, \zeta = 0.2, \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = 0.1$ 和 $\theta = 1$ 时系统出现 7 倍周期运动.当 $\alpha = 5, \zeta = 0.2, \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = 0$ 和 $\theta = 2$ 时,本文方法积分得到的系统第 5 个节点稳态运动的相

轨迹和 Poincaré 映射如图 5 所示. 可以发现, 相轨迹是在有界区域里的一条杂乱曲线, 而 Poincaré 映射为分布在一个杂乱无章的点集, 这表明系统在这组参数下出现了混沌运动. 比较图 5 和图 6, 仅从相轨迹上很难区分准周期运动和混沌运动, 而在 Poincaré 映射图上很容易区分. 以上结果表明本文方法的正确性, 并且分段线性系统在周期荷载作用下会产生非常复杂的动力学行为.



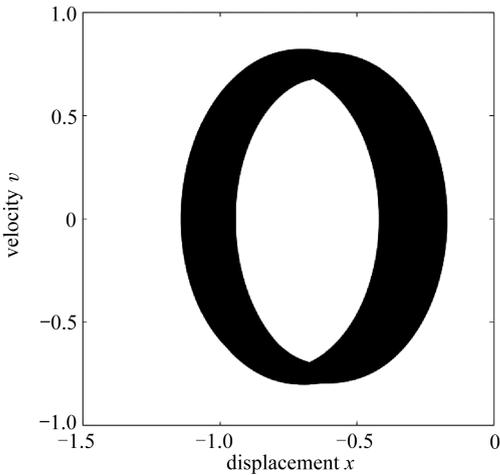
(a) $\alpha = 2, \zeta = 0.2, \tilde{\Delta} = 0, \theta = 1$



(b) $\alpha = 8, \zeta = 0.2, \tilde{\Delta} = 0.1, \theta = 1$

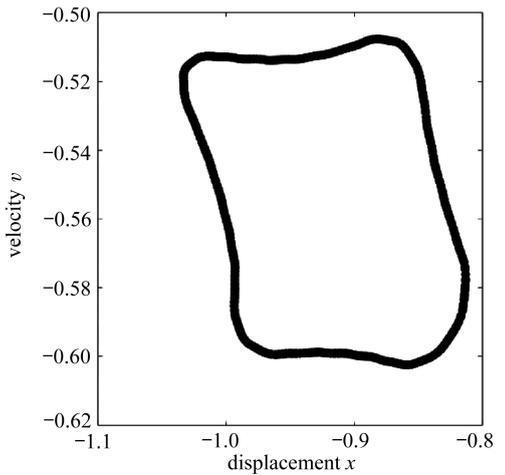
图 4 本文方法和 Runge-Kutta 方法给出的相轨迹和 Poincaré 映射

Fig. 4 Phase portraits and the Poincaré map obtained from the proposed method and the Runge-Kutta method



(a) 相轨迹

(a) The phase portrait



(b) Poincaré 映射

(b) The Poincaré map

图 5 当 $\alpha = 5, \zeta = 0.2, \tilde{\Delta} = 0$ 和 $\theta = 2$ 时, 本文方法给出的相轨迹和 Poincaré 映射

Fig. 5 When $\alpha = 5, \zeta = 0.2, \tilde{\Delta} = 0$ and $\theta = 2$, the phase portrait and the Poincaré map obtained from the proposed method

4.2 计算效率比较

考虑图 1 所示的不对称分段线性系统,取 $n = 1\,000$, 即有 1 000 个自由度和 1 000 根间隙弹簧,取 $m = 1\text{ kg}$, $k_1 = 1\text{ N/m}$, $k_2 = 1\text{ N/m}$, $c = 0.2\text{ (N}\cdot\text{s)/m}$ 和 $\Delta = 0\text{ m}$. 初始位移和速度均为 0, 从左至右在奇数节点作用外荷载 $f_i(t) = \sin(3t)\text{ N}$ ($i = 1, 3, \dots, 999$), 在偶数节点作用外荷载 $f_i(t) = -2\sin(5t)\text{ N}$ ($i = 2, 4, \dots, 1\,000$). 分别采用本文方法和 Runge-Kutta 方法计算该系统的动态响应, 积分区间为 $[0, 200]\text{ s}$. 对于本文方法, 选取 11 个自由度作为基本结构, 由算法确定的积分步长为 $\eta = 0.02\text{ s}$. Runge-Kutta 方法采用 MATLAB 的 Ode45 函数作为求解器, 并分别取 2 组容差 $\delta = 10^{-5}$ 和 $\delta = 10^{-10}$ 来控制其精度.

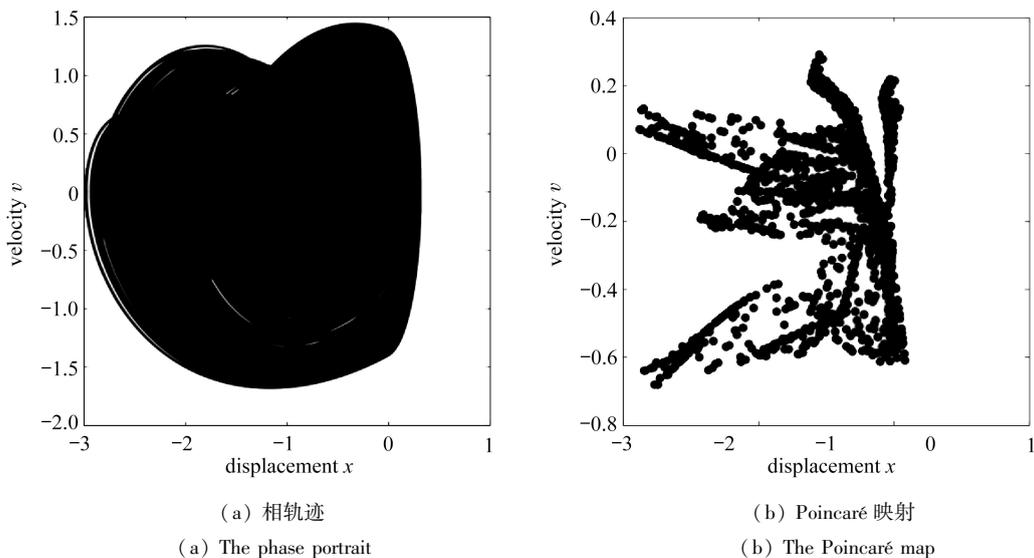


图 6 当 $\alpha = 15$, $\zeta = 0.2$, $\tilde{\Delta} = 0$ 和 $\theta = 1.5$ 时, 本文方法给出的相轨迹和 Poincaré 映射
 Fig. 6 When $\alpha = 15$, $\zeta = 0.2$, $\tilde{\Delta} = 0$ and $\theta = 1.5$, the phase portrait and Poincaré map obtained from the proposed method

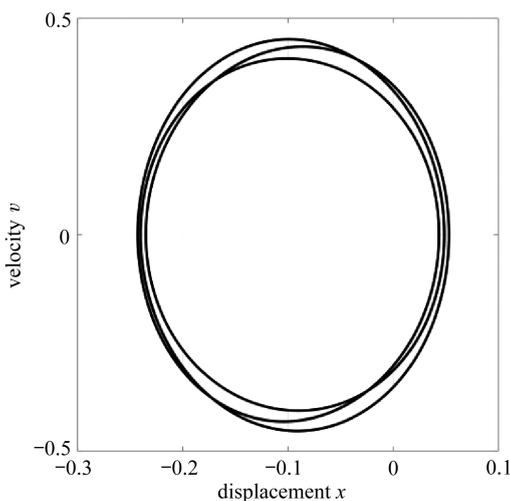


图 7 本文方法给出的相轨迹

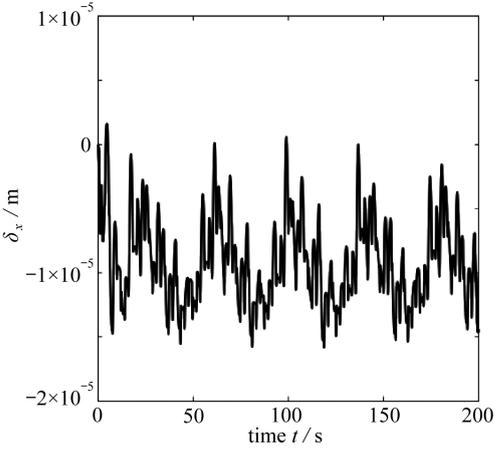
Fig. 7 The phase portrait obtained from the proposed method

将 Runge-Kutta 方法取容差 $\delta = 10^{-10}$ 积分得到的结果作为参考解, 分别计算本文方法和

Runge-Kutta 方法取容差 $\delta = 10^{-5}$ 的绝对误差.位移和速度的绝对误差分别定义为

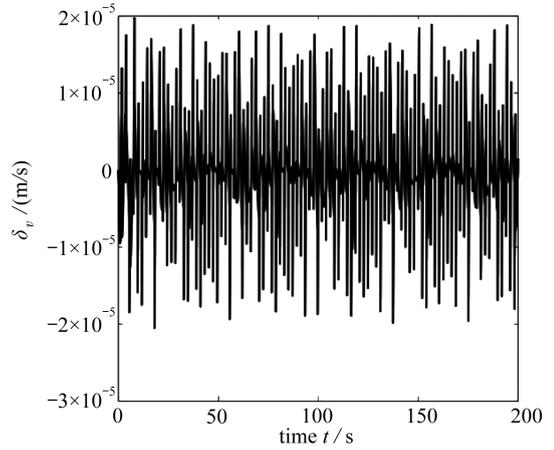
$$\delta_x = x(t) - x_{\text{RK}}(t), \delta_v = v(t) - v_{\text{RK}}(t), \quad (26)$$

其中, $x_{\text{RK}}(t)$ 和 $v_{\text{RK}}(t)$ 分别表示 Runge-Kutta 方法取容差 $\delta = 10^{-10}$ 得到的第一个质量块的位移和速度; $x(t)$ 和 $v(t)$ 分别表示本文方法或 Runge-Kutta 方法取容差 $\delta = 10^{-5}$ 得到的第一个质量块的位移和速度.



(a) 位移的绝对误差

(a) The absolute errors of the displacements

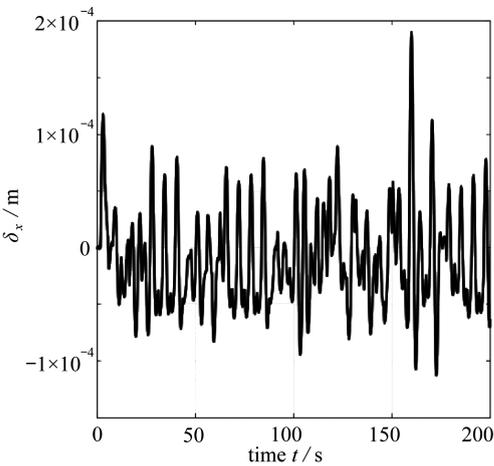


(b) 速度的绝对误差

(b) The absolute errors of the velocities

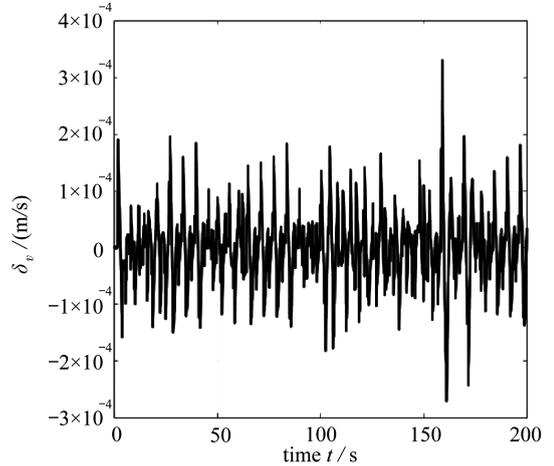
图8 本文方法的绝对误差

Fig. 8 The absolute errors of the displacements and velocities obtained from the proposed method



(a) 位移的绝对误差

(a) The absolute errors of the displacements



(b) 速度的绝对误差

(b) The absolute errors of the velocities

图9 Runge-Kutta 方法取容差 $\delta = 10^{-5}$ 的绝对误差

Fig. 9 The absolute errors of the displacements and velocities obtained from the Runge-Kutta method with $\delta = 10^{-5}$

由本文方法积分得到的结构第一个节点在 $t \in [100, 200]$ s 的相轨迹如图 7 所示.本文方法和容差为 $\delta = 10^{-5}$ 的 Runge-Kutta 方法的绝对误差分别如图 8 和 9 所示.可以发现,本文方法的精度非常高,比容差为 $\delta = 10^{-5}$ 的 Runge-Kutta 方法高约 10 倍,这说明了本文方法的正确性.本文方法和 Runge-Kutta 方法取不同容差的计算时间如表 1 所示,可以发现,本文方法的

计算效率分别约是 Runge-Kutta 方法取容差 $\delta = 10^{-5}$ 和 $\delta = 10^{-10}$ 的 5 倍和 56 倍。以上结果说明:本文方法对于求解具有大量自由度和大量间隙弹簧的分段线性系统的动态响应具有高精度和高效率。

表 1 计算效率比较
Table 1 Efficiency comparison

i7-5600U laptop	proposed method	Runge-Kutta method	
		$\delta = 10^{-5}$	$\delta = 10^{-10}$
CPU time T/s	8.3	41.4	462.7

5 结 论

本文提出一种求解具有大量间隙弹簧的周期性分段线性系统在简谐荷载作用下动态响应的高效率时域数值积分方法。通过采用参变量变分原理来描述间隙弹簧,分段线性问题被转化为线性互补问题,从而可以通过 Lemke 方法很容易求解。该算法避免了计算过程中的迭代和刚度阵更新,并能准确判断间隙弹簧的压缩和松弛状态。基于结构的周期性和能量传播速度的有限性,提出一种求解系统动态响应的高效率精细积分方法。该方法利用周期结构的周期性和能量传播有限性特点,指出周期结构的矩阵指数中存在大量的相同元素与零元素,从而不需要重复计算和存储这部分相同的元素,并避免计算和存储零元素,节省了计算量并降低了计算机存储要求。分析一个五自由度不对称分段线性系统,其在周期荷载作用下会发生非常复杂的动力学行为,如稳定的周期运动、准周期运动和混沌运动。通过求解一个大自由度的分段线性系统在周期荷载下的动态响应,比较了本文方法和 Runge-Kutta 方法的计算结果与计算时间,本文方法的正确性和高效率得到了验证。

参考文献 (References):

- [1] INABA N, SEKIKAWA M. Chaos disappearance in a piecewise linear Bonhoeffer-Van der Pol dynamics with a bistability of stable focus and stable relaxation oscillation under weak periodic perturbation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, **76**(3): 1711-1723.
- [2] GOUZÉ J, SARI T. A class of piecewise linear differential equations arising in biological models[J]. *Dynamics & Stability of Systems*, 2002, **17**(4): 299-316.
- [3] KALMÁR-NAGY T, CSIKJA R, ELGOHARY T A. Nonlinear analysis of a 2-DOF piecewise linear aeroelastic system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(2): 739-750.
- [4] MOTRO R. *Tensegrity: Structural Systems for the Future*[M]. London: Kogan Page Science, 2003.
- [5] PUN D, LIU Y B. On the design of the piecewise linear vibration absorber[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2000, **22**(4): 393-413.
- [6] 滕云楠, 韩明. 振动压实-土系统非线性滞回模型研究[J]. 真空, 2016, **53**(4): 61-64. (TENG Yunnan, HAN Ming. Study on nonlinear hysteretic model of vibration compaction-soil system [J]. *Vacuum*, 2016, **53**(4): 61-64. (in Chinese))
- [7] ZHANG C. Theoretical design approach of four-dimensional piecewise-linear multi-wing hyperchaotic differential dynamic system[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2016, **127**(11): 4575-4580.
- [8] CHOI Y S, NOAH S T. Forced periodic vibration of unsymmetric piecewise-linear systems[J]. *Journal & Sound Vibration*, 1988, **121**(1): 117-126.

- [9] HUDSON J L, ROSSLER O E, KILLORY H C. Chaos in a four-variable piecewise-linear system of differential equations[J]. *IEEE Transaction on Circuits & Systems*, 1988, **35**(7): 902-908.
- [10] NAYFEH A H. *Introduction To Perturbation Techniques*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [11] 吴志强, 雷娜. 分段线性系统的振动性能分析[J]. 振动与冲击, 2015, **34**(18): 94-99.(WU Zhiqiang, LEI Na. Vibration performance analysis of piecewise linear system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**(18): 94-99.(in Chinese))
- [12] 钟顺, 陈予恕. 分段线性非线性汽车悬架系统的分岔行为[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(6): 631-638.(ZHONG Shun, CHEN Yushu. Bifurcation of piecewise-linear nonlinear vibration system of vehicle suspension[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(6): 631-638.(in Chinese))
- [13] NARIMANI A, GOLNARAGHI M E, JAZAR G N. Frequency response of a piecewise linear vibration isolator[J]. *Journal of Vibration Control*, 2004, **10**(12): 1775-1794.
- [14] DESHPANDE S, MEHTA S, JAZAR G N. Optimization of secondary suspension of piecewise linear vibration isolation systems[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, **48**(4): 341-377.
- [15] MOUSSI E H, BELLIZZI S, COCHELIN B, et al. Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2015, **64**(S1): 266-281.
- [16] XU L, LU M W, CAO Q. Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise-linear viscous damping by incremental harmonic balance method[J]. *Physics Letters A*, 2002, **301**(1): 65-73.
- [17] ZHONG W, ZHANG R. Parametric variational principles and their quadratic programming solutions in plasticity[J]. *Computers & Structures*, 1988, **30**(4): 887-896.
- [18] YU S D. An efficient computational method for vibration analysis of unsymmetric piecewise-linear dynamical systems with multiple degrees of freedom[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **71**(3): 493-504.
- [19] ACARY V, DE JONG H, BROGLIATO B. Numerical simulation of piecewise-linear models of gene regulatory networks using complementarity systems[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2014, **269**(2): 103-119.
- [20] ZHONG W, WILLIAMS F. A precise time step integration method[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical*, 1994, **208**(63): 427-430.
- [21] ZHONG W X. On precise integration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **163**(1): 59-78.
- [22] SHA D, SUN H, ZHANG Z, et al. A variational inequality principle in solid mechanics and application in physically non-linear problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 1990, **6**(1): 35-45.

An Efficient Numerical Method for Computing Dynamic Responses of Periodic Piecewise Linear Systems

HE Dongdong, GAO Qiang, ZHONG Wanxie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment
(Dalian University of Technology); Department of Engineering Mechanics,
Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wanxie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: An efficient method based on the parametric variational principle (PVP) was proposed for computing the dynamic responses of periodic piecewise linear systems with multiple gap-activated springs. Through description of gap-activated springs with the PVP, the complex nonlinear dynamic problem was transformed to a standard linear complementary problem. This method can avoid iterations and updating the stiffness matrix in the computing process and can accurately determine the states of the gap-activated springs. Based on the periodicity of the system and the precise integration method (PIM), an efficient numerical time-integration method was developed to obtain the dynamic responses of the system. This method indicates that there are a large number of identical elements and zero elements in the matrix exponents of a periodic structure, and saves computation load and computer storage by avoiding repeated calculation and storage of these elements. Numerical results validate the proposed method. The dynamic behaviors of a 5-DOF piecewise linear system under harmonic excitations were analyzed, including the stable periodic motion, the quasi-periodic motion and the chaotic motion. In comparison with the Runge-Kutta method, the proposed method has satisfactory correctness and efficiency.

Key words: piecewise linear system; dynamic response; parametric variational principle; periodicity; precise integration method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11572076; 914748203); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB049000)

引用本文/Cite this paper:

何冬东, 高强, 钟万勰. 求解周期性分段线性系统动态响应的高效数值方法[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(7): 737-749.

HE Dongdong, GAO Qiang, ZHONG Wanxie. An efficient numerical method for computing dynamic responses of periodic piecewise linear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(7): 737-749.