

# 基于修正偶应力理论的 Timoshenko 微梁模型 和尺寸效应研究\*

周 博, 郑雪瑶, 康泽天, 薛世峰

(中国石油大学(华东)储运与建筑工程学院, 山东 青岛 266580)

**摘要:** 基于修正偶应力理论,将 Timoshenko 微梁的应力、偶应力、应变、曲率等基本变量,描述为位移分量偏导数的表达式.根据最小势能原理,推导了决定 Timoshenko 微梁位移场的位移场控微分方程.利用级数法求解了任意载荷作用下 Timoshenko 简支微梁的位移场控微分方程,得到了反映尺寸效应的挠度、转角及应力的偶应力理论解.通过对承受余弦分布载荷 Timoshenko 简支微梁的数值计算,研究了 Timoshenko 微梁的挠度、转角和应力的尺寸效应,分析了 Poisson 比对 Timoshenko 微梁力学行为及其尺寸效应的影响.结果表明:当截面高度与材料特征长度的比值小于 5 时, Timoshenko 微梁的刚度和强度均随着截面高度的减小而显著提高,表现出明显的尺寸效应;当截面高度与材料特征长度的比值大于 10 时, Timoshenko 微梁的刚度与强度均趋于稳定,尺寸效应可以忽略;材料 Poisson 比是影响 Timoshenko 微梁力学行为及尺寸效应的重要因素, Poisson 比越大 Timoshenko 微梁刚度和强度的尺寸效应越显著.该文建立的 Timoshenko 微梁模型,能有效描述 Timoshenko 微梁的力学行为及尺寸效应,可为微电子机械系统(MEMS)中的微结构设计与分析提供理论基础和技术参考.

**关键词:** Timoshenko 微梁; 尺寸效应; 位移场控方程; 级数法; 微电子机械系统

**中图分类号:** O342

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.400056

## 引 言

随着微电子机械系统(micro electro mechanical system, MEMS)的发展,微尺度下板、梁结构的力学行为越来越为人们所关注.诸多微尺度实验<sup>[1-3]</sup>证明,当构件的尺寸处于微米或纳米量级时构件具有尺寸依赖行为,这种现象被称为尺寸效应<sup>[4]</sup>.传统的弹塑性力学理论未考虑材料的微观结构,无法对尺寸效应作出解释,因此人们发展了偶应力理论<sup>[5-7]</sup>和应变梯度理论<sup>[8]</sup>来描述这种现象.上述两种理论都在本构关系中引入了若干个与材料微观结构相关的特征尺寸参数,其中由于偶应力理论具有较少的特征尺寸参数,因而更适合于工程应用.

Yang 等<sup>[9]</sup>提出了只含有一个本征长度参数的修正偶应力理论.随后,修正偶应力理论被

\* 收稿日期: 2019-02-22; 修订日期: 2019-09-18

基金项目: 国家重点研发计划(2017YFC0307604)

作者简介: 周博(1972—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhoubo@upc.edu.cn);

郑雪瑶(1995—),女,硕士生(E-mail: xueyaozheng@126.com);

康泽天(1992—),男,博士生(E-mail: kangzt\_upc@163.com);

薛世峰(1963—),男,教授,博士生导师(E-mail: sfeng@upc.edu.cn).

广泛用于解决不同条件下的微尺度问题, Park 等<sup>[10]</sup> 基于修正偶应力理论建立了 Bernoulli-Euler 梁的弯曲模型, 并将该模型与最小势能原理相结合求解了悬臂梁问题. Reddy 等<sup>[11]</sup> 基于修正偶应力理论和几何非线性建立了功能梯度梁的非线性模型. Ke 等<sup>[12]</sup> 依据修正偶应力理论和 Mindlin 板理论, 分析了功能梯度微尺度板的弯曲和屈曲行为的尺寸效应, 并对其动力学问题进行了求解研究. 陈万吉等<sup>[13]</sup> 将各向同性修正偶应力理论推广到各向异性, 结合虚功原理建立了 Timoshenko 细观层合梁的稳定性模型, 并应用该模型求解了 Timoshenko 梁的轴向变形问题. Simsek 和 Reddy<sup>[14]</sup> 提出了一种能够解决功能梯度微梁屈曲问题的高阶梁理论, 运用最小势能原理求解了其控制方程和边界条件, 并据此对功能梯度微梁的自由振动问题进行了分析. Bekir 等<sup>[15]</sup> 基于修正偶应力理论和 Rayleigh-Ritz 法研究了非均匀 Bernoulli-Euler 微梁的振动响应, 并分析了材料特性和锥度比对轴向功能梯度锥形微梁的固有频率的影响. 李安庆等<sup>[16]</sup> 依据修正偶应力理论, 应用双层梁与单层梁的等效关系, 给出了双层微梁的动力学模型, 具体求解了简支双层微梁的固有频率, 并分析了微梁特征尺寸及双材料参数对双层微梁固有特性的影响规律. Dehrouyeh-Semnani 等<sup>[17]</sup> 基于修正偶应力理论, 通过参数分析研究了微尺度梁剪切变形的尺寸效应, 并对微尺度梁的静态弯曲、屈曲和自由振动等力学问题进行了研究. 尹春松等<sup>[18]</sup> 基于 Hamilton 变分原理和非局部连续介质弹性理论, 通过建立新型非局部 Timoshenko 梁模型对不同边界条件下碳纳米管的弯曲平衡方程进行推导, 分析了剪切变形效应和非局部微观尺寸效应对碳纳米管弯曲特性的影响. Mohammad-Abadi 等<sup>[19]</sup> 利用修正偶应力理论, 提出了一种可描述复合材料层合微梁尺寸效应的本构模型, 并利用该模型对不同边界条件下 Euler-Bernoulli 梁、Timoshenko 梁和 Reddy 梁的剪切变形效应进行了研究. Majid 等<sup>[20]</sup> 基于修正偶应力理论和最小势能原理推导了功能梯度纳米梁的微分控制方程和边界条件, 并分析了功能梯度纳米梁的剪切变形. 苏文政等<sup>[21]</sup> 基于偶应力理论, 对一类单胞含有圆形空洞的周期性多孔固体类梁结构, 给出了分析其横向自由振动的等效连续介质 Timoshenko 梁模型, 并对其动力学问题进行了研究. 最近, 贺丹等<sup>[22-23]</sup> 基于修正偶应力理论、最小势能原理和高阶剪切理论研究了变截面微梁和功能梯度微梁的自由振动和弯曲问题, 并分析了其尺寸效应. Fang 等<sup>[24]</sup> 基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 建立了材料参数沿厚度方向呈梯度变化, 且具有几何非线性的三维功能梯度微梁的修正偶应力理论模型, 并利用 Hamilton 原理和 Galerkin 数值解法对控制方程进行求解, 研究了结构的微尺度特征. 朱军华等<sup>[25]</sup> 基于 Euler 梁理论和修正的偶应力理论, 运用能量法推导出了吸合电压理论模型, 并分析了几何尺寸对阶梯型微悬臂梁吸合电压的影响.

上述关于微梁尺寸效应方面的研究, 主要针对特定简单载荷作用下的微梁结构, 且大多忽略了 Poisson 比对微梁力学行为及尺寸效应的影响, 此外对于影响微梁使用寿命和承载能力的强度特性及尺寸效应仍有待研究. 本文以承受任意载荷的 Timoshenko 微梁为研究对象, 基于修正偶应力理论和最小势能原理, 建立了决定 Timoshenko 微梁位移场的位移场控微分方程; 利用级数法求解了任意载荷作用下 Timoshenko 简支微梁的挠度、转角及应力的偶应力理论解; 通过数值计算研究了 Timoshenko 微梁的挠度、转角及应力的尺寸效应, 分析了 Poisson 比对 Timoshenko 微梁力学行为及尺寸效应的影响. 本文工作可为微电子机械系统中微结构的设计与分析及相关尺寸效应研究提供理论基础和技术参考.

## 1 修正偶应力理论

修正偶应力理论由 Yang 等<sup>[9]</sup> 提出, 该理论将描述物体位移和变形间关系的几何方程表

示为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \tag{2}$$

其中,  $u_i$  为平动位移,  $\theta_i$  为转动位移,  $\varepsilon_{ij}$  为应变张量,  $\chi_{ij}$  为曲率张量. 转动位移可用平动位移表示为

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}, \tag{3}$$

其中,  $e_{ijk}$  为置换张量. 各向同性弹性体的本构关系描述为

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}, \tag{5}$$

其中,  $\sigma_{ij}$  为应力张量,  $m_{ij}$  为偶应力张量,  $l$  为反映尺寸效应的材料参数, 称为材料特征长度,  $\lambda$  和  $\mu$  为 Lamé 常数, 可用弹性模量  $E$  和 Poisson 系数  $\nu$  表示为

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{6}$$

## 2 Timoshenko 微梁模型

### 2.1 基本变量描述

本小节基于修正偶应力理论, 推导了 Timoshenko 微梁的应变、曲率、应力、偶应力等基本变量表达式. 图 1 为横向载荷作用下矩形截面 Timoshenko 微梁示意图, 其中  $x$  轴与梁的轴线重合,  $z$  轴是中性轴,  $q(x)$  为载荷集度,  $b$  和  $h$  分别为梁横截面的宽和高.

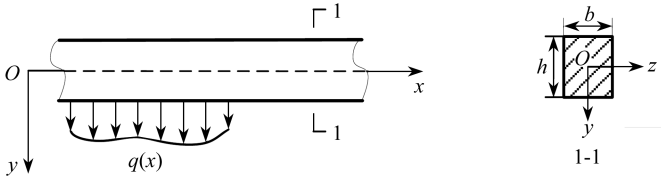


图 1 Timoshenko 微梁示意图

Fig. 1 Schematic diagram for a Timoshenko micro-beam

根据 Timoshenko 梁理论, Timoshenko 梁内任一点沿  $x, y, z$  方向的位移分量可表示为

$$u = -y\varphi(x), v = v(x), w = 0, \tag{7}$$

其中,  $\varphi$  称为截面转角,  $v$  称为梁的挠度.

将式(7)描述的位移分量, 代入几何方程(1), 得到 Timoshenko 梁的非零应变分量:

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( -\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{8}$$

将式(7)描述的位移分量, 代入平动位移和转动位移间的关系式(3), 得到 Timoshenko 梁的非零转动位移分量:

$$\theta_z = -\frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{9}$$

将式(9)描述的非零转动位移分量, 代入几何方程(2), 得到 Timoshenko 梁的非零曲率

分量:

$$\chi_{xz} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \quad (10)$$

将式(8)描述的非零应变分量,代入本构方程(4),得到 Timoshenko 梁的非零应力分量:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -(\lambda + 2\mu)y \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\lambda y \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left( -\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (11)$$

将式(10)描述的非零曲率分量,代入本构方程(5),得到 Timoshenko 梁的非零偶应力分量为

$$m_{xz} = m_{zx} = -\frac{1}{2} \mu l^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \quad (12)$$

## 2.2 位移场控微分方程

本小节根据最小势能原理,推导描述 Timoshenko 微梁的挠度、截面转角与外载荷间微分关系的位移场控方程.最小势能原理表述为:在一个保守系统的所有可能位移场中,真实位移场使系统的总势能取最小值,即总势能的一阶变分为零.对于各向同性材料 Timoshenko 微梁,最小势能原理表示为

$$\delta \Pi = \delta(U + V_p) = 0, \quad (13)$$

其中, $\Pi$ 为总势能, $U$ 为弹性应变能, $V_p$ 为外力势能.图2所示 Timoshenko 微梁的外力势能为

$$V_p = -\int_0^L q(x)v(x) dx, \quad (14)$$

其中, $L$ 为梁长, $v(x)$ 为挠度, $q(x)$ 为横向载荷集度.根据修正偶应力理论, Timoshenko 微梁的应变能表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^A (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dA dx, \quad (15)$$

其中, $L$ 为微梁的长度, $A$ 为微梁的截面面积.将 Timoshenko 微梁的非零应变分量式(8)、非零曲率分量式(10)、非零应力分量式(11)及非零偶应力分量式(12)代入式(15),经过积分运算得

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ K_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - K_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) + K_3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx, \quad (16)$$

其中

$$K_1 = (\lambda + 2\mu)I_z, \quad K_2 = \mu A, \quad K_3 = \frac{\mu l^2 A}{4}, \quad (17)$$

$\lambda$ 和 $\mu$ 为式(6)描述的材料 Lamé 常数, $l$ 为材料本征长度,

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (18)$$

为截面对中性轴的惯性矩.不难看出,式(17)描述的 $K_1, K_2, K_3$ 为反映 Timoshenko 微梁抵抗弯曲变形能力的量,分别称为第一、第二、第三弯曲刚度.

将 Timoshenko 微梁的应变能方程 (16) 和外力势能方程 (14), 代入最小势能原理表达式 (13), 经过变分运算得到

$$\delta \Pi = \int_0^L (F_\varphi \delta\varphi + F_v \delta v) dx = 0, \tag{19}$$

其中

$$F_\varphi = K_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - K_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) + K_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right), \tag{20a}$$

$$F_v = K_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + K_3 \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - q(x). \tag{20b}$$

根据式 (19) 和 (20), 可知式 (19) 恒成立的条件为

$$K_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + K_3 \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - q(x) = 0, \tag{21a}$$

$$K_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) + K_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) = 0. \tag{21b}$$

根据位移场控方程 (21) 求得挠度和转角后, 再利用式 (7) 即可确定 Timoshenko 微梁的位移场, 因此将式 (21) 称为 Timoshenko 微梁的位移场控微分方程.

### 2.3 位移场的求解

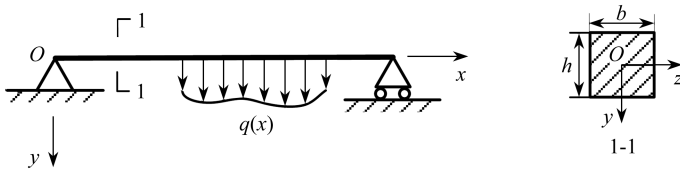


图2 Timoshenko 简支微梁荷载条件示意图

Fig. 2 Schematic diagram of load conditions for the simply supported Timoshenko micro-beam

如图 2 为任意荷载作用下的 Timoshenko 简支微梁, 其位移边界条件为

$$v|_{x=0} = v|_{x=L} = 0, \varphi|_{x=0} \neq 0, \varphi|_{x=L} \neq 0. \tag{22}$$

根据 Fourier 级数理论, 任何函数都可以展开为三角级数. 为求解任意荷载下的微梁位移场, 将微梁的挠度方程和截面转角方程设为 Fourier 级数形式, 即

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{23a}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{23b}$$

其中,  $V_n$  和  $\psi_n$  为 Fourier 系数,  $L$  为微梁的长度. 容易验证式 (23) 满足图 2 所示 Timoshenko 简支微梁的边界条件式 (22).

将作用于微梁的任意荷载设为 Fourier 级数形式, 即

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{24}$$

其中

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{25}$$

为任意载荷  $q(x)$  的 Fourier 系数表达式.

将式(23)和(24)代入位移场控方程(21),得到

$$a_1\psi_n + a_2V_n - C_n = 0, \quad (26a)$$

$$-a_3\psi_n + a_4V_n = 0, \quad (26b)$$

其中

$$a_1 = K_2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) + K_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^3, \quad (27a)$$

$$a_2 = K_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - K_2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad (27b)$$

$$a_3 = K_1 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - K_2 + K_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad (27c)$$

$$a_4 = -K_2 \frac{n\pi}{L} - K_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^3, \quad (27d)$$

$K_1, K_2, K_3$  分别为式(17)所示的第一、第二、第三弯曲刚度.

联立求解方程(26a)和(26b),得到挠度和转角的 Fourier 系数表达式,即

$$V_n = \frac{C_n a_3}{a_1 a_4 + a_2 a_3}, \quad (28a)$$

$$\psi_n = \frac{C_n a_4}{a_1 a_4 + a_2 a_3}. \quad (28b)$$

将式(28)所示的截面转角、挠度的 Fourier 系数表达式和式(23)所示的挠度方程、截面转角方程代入式(11)所示的非零应力分量表达式,得到微梁非零应力的表达式为

$$\sigma_{xx} = -(\lambda + 2\mu) \frac{y\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right), \quad (29a)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{\lambda\pi y}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \psi_n \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right), \quad (29b)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{L} V_n - \psi_n \right) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right). \quad (29c)$$

根据式(27)和(28)可知,挠度和转角的 Fourier 系数  $\psi_n, V_n$  均为  $K_3$  的函数.根据式(17)可知  $K_3$  的表达式中含有材料本征长度  $l$ , 因此根据式(28)和(23)确定的挠度和转角及根据式(29)确定的应力分量均能有效反映材料的尺寸效应.

若令材料本征长度  $l$  为 0, 则式(23)和(29)表示的微梁挠度、转角和应力退化为 Timoshenko 梁的经典弹性理论解, 则其挠度、转角和应力退化为  $\varphi_0, v_0$  和  $\sigma_0$ .

### 3 尺寸效应分析

本节以受余弦分布载荷的 Timoshenko 简支微梁为例,研究了 Timoshenko 微梁的挠度、转角和应力的尺寸效应,分析了 Poisson 比对 Timoshenko 微梁力学行为及尺寸效应的影响.为此设作用于图 2 所示 Timoshenko 简支微梁的载荷集度函数为

$$q(x) = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (30)$$

其中,  $q_0$  为载荷幅值.将式 (30) 代入式 (25), 得到此载荷的 Fourier 系数为

$$C_n = \frac{2q_0n(\cos(n\pi) + 1)}{\pi(n^2 - 1)}. \tag{31}$$

在后面数值计算中,弹性模量  $E = 1\ 440\ \text{MPa}$ , 材料本征长度  $l = 17\ \mu\text{m}$ , 微梁的总长为截面高度的 20 倍即  $L = 20h$ , 梁截面宽度与高度相等即  $b = h$ .

### 3.1 挠度的尺寸效应

图 3 为根据式 (28a) 和式 (23a) 绘制, 截面高度和材料本征长度的比值  $h/l$  分别为 1, 3, 5, 7 时, Timoshenko 简支微梁的挠曲线, 其纵坐标为挠度与材料本征长度的比值  $v/l$ , 横坐标为截面形心横坐标与梁长的比值  $x/L$ . 图中曲线表明: 挠度与材料本征长度的比值  $v/l$  的绝对值随着截面高度的增加而增加; 挠曲线峰值随着截面高度的不断增加, 而逐渐趋近于一个稳定解, 这个稳定解就是 Timoshenko 梁挠曲线的经典弹性理论解.

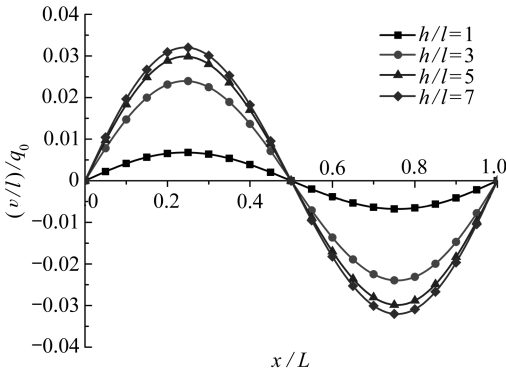


图 3 不同截面高度 Timoshenko 简支微梁的挠曲线

Fig. 3 Deflection curves of the simply supported Timoshenko micro-beam with different section heights

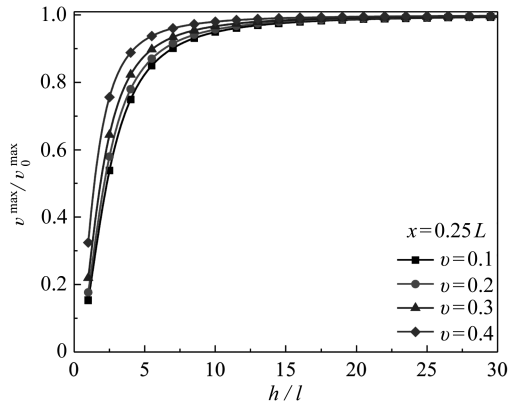


图 4 不同 Poisson 比下 Timoshenko 微梁最大挠度与梁高间的关系曲线

Fig. 4 Relation curves between the maximum deflection and the beam section height of the Timoshenko micro-beam with different Poisson ratios

图 4 为根据式 (28a) 和 (23a) 绘制, Poisson 比分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 时, Timoshenko 简支微梁的最大挠度与截面高度间的关系曲线, 其纵坐标为本文模型计算的最大挠度与其经典弹性理论解的比值  $v^{\max}/v_0^{\max}$ , 横坐标为截面高度与材料特征长度的比值  $h/l$ . 当  $h/l < 5$  时,  $v^{\max}/v_0^{\max}$  的值随  $h/l$  增大而急剧增大, 因此微梁刚度随着截面高度的增大而显著降低, 表现出明显的尺寸效应; 当  $5 \leq h/l < 10$  时,  $v^{\max}/v_0^{\max}$  的值随  $h/l$  增大而缓慢增大, 因此微梁刚度随着截面高度的增大而缓慢降低, 尺寸效应不明显; 当  $h/l > 10$  时,  $v^{\max}/v_0^{\max}$  的值随  $h/l$  增大而逐渐趋于一个稳定值, 尺寸效应可以忽略. 对比图中 Poisson 比分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 时的关系曲线可以看出, Poisson 比越大  $v^{\max}/v_0^{\max}$  与  $h/l$  的关系曲线的斜率越大, 即 Poisson 比越大其尺寸效应越明显.

图 5 为根据式 (28a) 和 (23a) 绘制, 截面高度与材料特征长度比值  $h/l$  分别为 1, 2,  $\dots$ , 6 时, Timoshenko 微梁的最大挠度与 Poisson 比间的关系曲线, 其纵坐标为最大挠度与截面高度的比值  $v^{\max}/l$ , 横坐标为 Poisson 比. 对比图中曲线可知, Poisson 比越小, Timoshenko 梁挠度的尺寸效应越显著.

进一步的数值计算表明:当  $h/l = 1$  时,  $v^{\max}/l$  在 Poisson 比为 0.24 时取得最大值;当  $h/l = 2$  时,  $v^{\max}/l$  在 Poisson 比为 0.12 时取得最大值;当  $h/l = 3$  时,  $v^{\max}/l$  在 Poisson 比为 0.07 时取得最大值;当  $h/l = 4$  时,  $v^{\max}/l$  在 Poisson 比为 0.04 时取得最大值;当  $h/l < 5$  时微梁的最大挠度随 Poisson 比的增大先增大后减小,当  $h/l > 5$  时微梁的最大挠度随 Poisson 比的增大而减小。

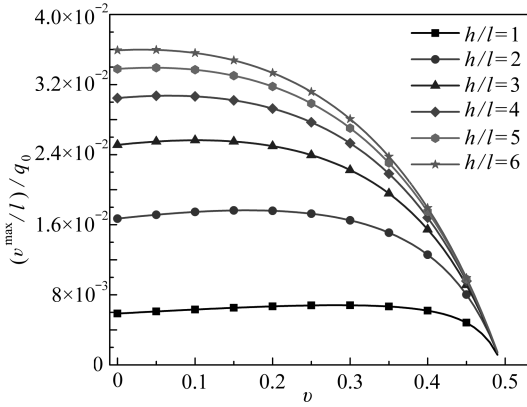


图 5 不同截面高度下 Timoshenko 微梁最大挠度与 Poisson 比间的关系曲线

Fig. 5 Relation curves between the maximum deflection and the Poisson ratio of the Timoshenko micro-beam with different beam section heights

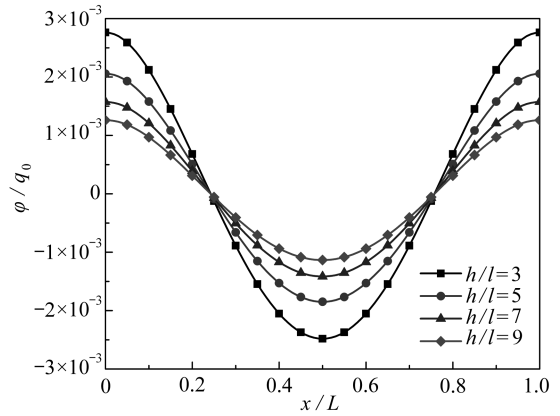


图 6 不同截面高度下 Timoshenko 微梁的转角曲线

Fig. 6 Rotation angle curves of the Timoshenko micro-beam with different beam section heights

### 3.2 转角的尺寸效应

图 6 为根据式 (28b) 和 (23b) 绘制的, 截面高度与材料特征长度的比值  $h/l$  分别为 3, 5, 7, 9 时, Timoshenko 梁的转角曲线, 其纵坐标为截面转角  $\varphi$ , 横坐标为截面形心横坐标与梁长的比值  $x/L$ . 图中曲线表明: 当截面高度与特征长度的比值  $h/l$  较小时, 截面高度对转角曲线形状影响较大; 当  $h/l$  较大时, 转角曲线随着截面高度的不断增加, 而逐渐趋近于一个稳定解, 即 Timoshenko 梁转角曲线的经典弹性理论解。

图 7(a) 为根据式 (28b) 和 (23b) 绘制的, Poisson 比  $\nu$  分别为 0.1, 0.2 时, Timoshenko 微梁的左端面转角与截面高度间的关系曲线, 其纵坐标分别为本文模型计算的左端面转角  $\varphi^L$  与左端面转角的经典弹性理论解  $\varphi_0^L$ , 横坐标为横截面高度与特征长度的比值  $h/l$ . 图中曲线表明: 微梁左端面转角的经典弹性理论解  $\varphi_0^L$  随截面高度增大而减小并逐渐趋近于一个稳定值; 而随着截面高度增大, 本文模型计算的微梁左端面转角  $\varphi^L$  的值先增大后减小并逐渐趋近于经典弹性理论解  $\varphi_0^L$ .  $\varphi_0^L$  与  $\varphi^L$  变化趋势不同是由于当微梁的截面高度  $h$  接近材料本征长度  $l$  时, 其刚度随着截面高度减小明显增大; 随着截面高度  $h$  逐渐增大, 此特性逐渐减弱至消失; 随着截面高度  $h$  的增大,  $\varphi^L$  的值逐渐趋近于经典弹性理论解  $\varphi_0^L$ .

图 7(b) 为根据式 (28b) 和 (23b) 绘制的, Poisson 比  $\nu$  分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 时, Timoshenko 微梁的左端面转角与截面高度间的关系曲线, 其纵坐标为本文模型计算的左端面转角与经典弹性理论解的比值  $\varphi^L/\varphi_0^L$ , 横坐标为横截面高度与特征长度的比值  $h/l$ . 当  $h/l < 5$  时,  $\varphi^L/\varphi_0^L$  的值随  $h/l$  增大而急剧增大, 截面转角具有明显的尺寸效应; 当  $5 < h/l < 10$  时,  $\varphi^L/\varphi_0^L$  的值随  $h/l$  增大而缓慢增大, 截面转角的尺寸效应不显著; 当  $h/l > 10$  时,  $\varphi^L/\varphi_0^L$  的值随  $h/l$  增大



而逐渐趋于一个稳定值,截面转角的尺寸效应可以忽略.对比图中 Poisson 比分别为 0.1,0.2,0.3,0.4 时的关系曲线可以看出,Poisson 比越大  $\varphi^L/\varphi_0^L$  与  $h/l$  关系曲线的斜率越大,即 Poisson 比越大其尺寸效应越明显.

图 8 为根据式 (28b) 和 (23b) 绘制的,截面高度与材料特征长度比值  $h/l$  分别为 1,2, ..., 6 时, Timoshenko 简支微梁的左端面转角与 Poisson 比间的关系曲线,其纵坐标为梁的左端面转角  $\varphi^L$ , 横坐标为材料参数 Poisson 比  $\nu$ . 根据进一步数值计算可知:当  $h/l = 1$  时,左端面转角在 Poisson 比为 0.24 时取得最大值;当  $h/l = 2$  时,左端面转角在 Poisson 比为 0.12 时取得最大值;当  $h/l = 3$  时,左端面转角在 Poisson 比为 0.07 时取得最大值;当  $h/l = 4$  时,左端面转角在 Poisson 比为 0.04 时取得最大值;当  $h/l < 5$  时,左端面转角随 Poisson 比的增大先增大后减小,当  $h/l > 5$  时,左端面转角随 Poisson 比的增大而减小.

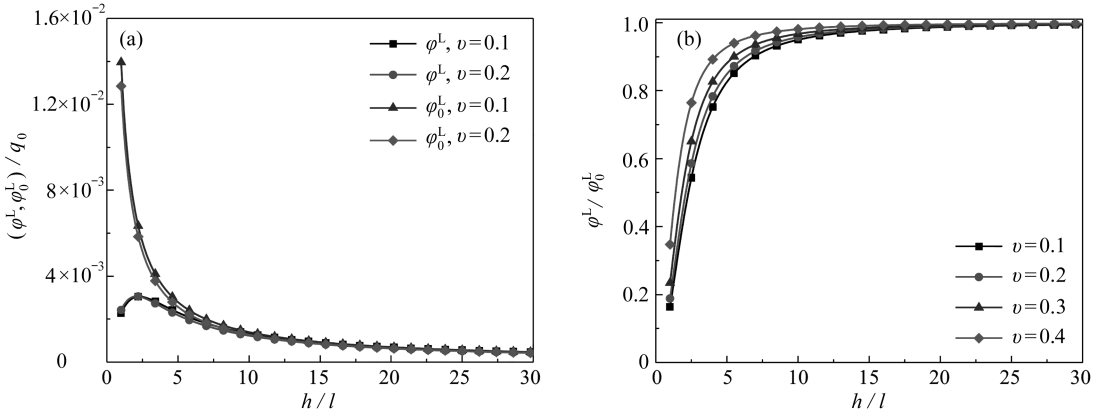


图 7 不同 Poisson 比下 Timoshenko 微梁左端面转角与截面高度间的关系曲线

Fig. 7 Relation curves between the rotation angle at the left section and section height of Timoshenko micro-beam with different Poisson ratio

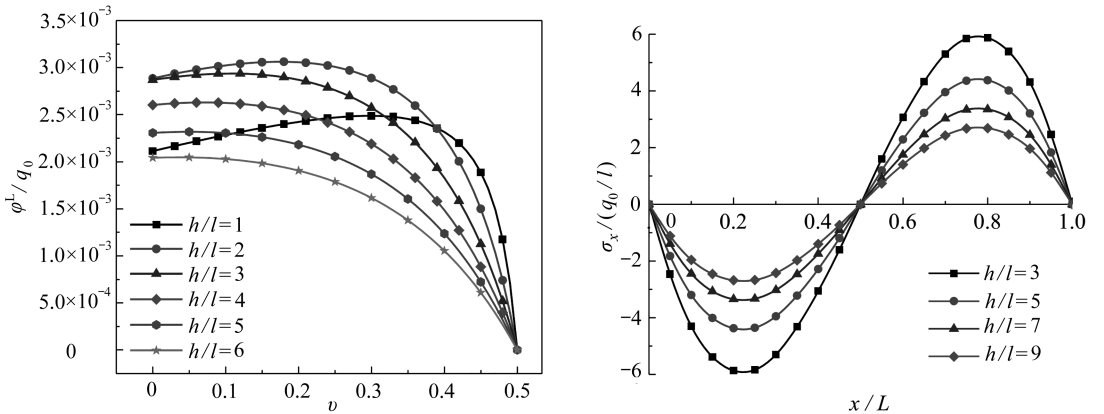


图 8 不同截面高度下 Timoshenko 微梁左端面转角与 Poisson 比间的关系曲线

Fig. 8 Relation curves between the rotation angle at the left end section and the Poisson ratio of the Timoshenko micro-beam with different beam section heights

图 9 不同截面高度下 Timoshenko 简支微梁的正应力曲线

Fig. 9 Curves of the normal stress for the simply supported Timoshenko micro-beam with different section heights

### 3.3 应力的尺寸效应

图 9 为根据式(29a)绘制的,截面高度与材料特征长度比值  $h/l$  分别为 3,5,7,9 时,Timoshenko 简支微梁的应力曲线图,其纵坐标为截面内  $y = h/2$  处点的正应力分量  $\sigma_x$ ,横坐标为截面形心横坐标与梁长比值  $x/L$ .图中曲线表明:正应力分量  $\sigma_x$  的绝对值随着截面高度的增加而减小,即微梁强度随着截面高度的增加而增加;正应力曲线随着截面高度的不断增加,逐渐趋近于一个稳定解(经典弹性理论解),即微梁强度随着截面高度的不断增加逐渐趋于稳定。

图 10(a)为根据式(29a)绘制的,Poisson 比  $\nu$  分别为 0.1,0.2 时,Timoshenko 微梁内最大正应力与截面高度间的关系曲线,其纵坐标分别为本文模型计算梁横截面内正应力分量的最大值  $\sigma_x^{\max}$  与其经典弹性理论解  $\sigma_{x0}^{\max}$ ,横坐标为横截面高度与材料特征长度的比值  $h/l$ .图中曲线表明:梁横截面内正应力分量的经典弹性理论解  $\sigma_{x0}^{\max}$  随截面高度增大而减小并逐渐趋近于一个稳定值;而随着截面高度增大,本文模型计算的梁横截面内正应力分量的最大值  $\sigma_x^{\max}$  先增大后减小并逐渐趋近于经典弹性理论解  $\sigma_{x0}^{\max}$ .即微梁强度随着截面高度的增加先减小后增大。

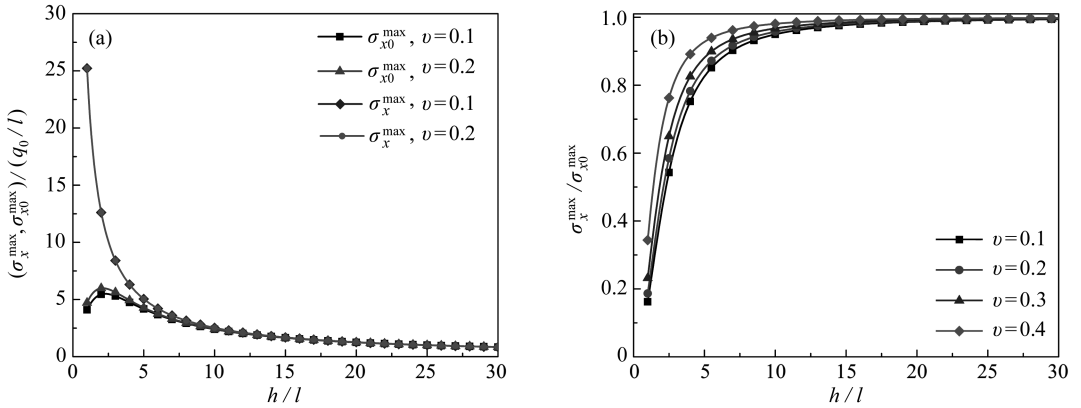


图 10 不同 Poisson 比下 Timoshenko 微梁最大正应力与截面高度的关系曲线  
 Fig. 10 Relation curves between the maximum normal stress and the section height of the Timoshenko micro-beam with different Poisson ratios

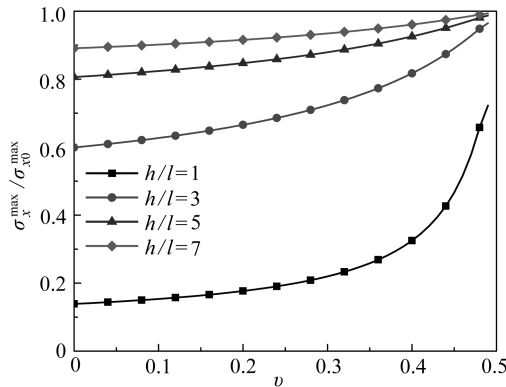


图 11 不同截面高度下 Timoshenko 微梁最大正应力与 Poisson 比间的关系曲线  
 Fig. 11 Relation curves between the maximum normal stress and the Poisson ratio of the Timoshenko micro-beam with different section heights

图 10(b) 为根据式 (29a) 绘制的, Poisson 比  $\nu$  分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 时, Timoshenko 微梁内最大正应力与截面高度间的关系曲线, 其纵坐标为梁横截面内正应力分量的最大值与其经典弹性理论解的比值  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$ , 横坐标为横截面高度与材料特征长度的比值  $h/l$ . 采用  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$  分析微梁最大正应力的尺寸效应, 能够排除微梁的几何特性对强度的影响. 图中曲线表明: 当  $h/l < 5$  时,  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$  的值随着截面高度的增大而急剧增大, 微梁的强度急剧减小, 具有明显的尺寸效应; 当  $5 < h/l < 10$  时,  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$  的值随着截面高度的增大而缓慢增大, 微梁的强度缓慢减小, 尺寸效应不明显; 当  $h/l > 10$  时,  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$  的值趋近于 1, 微梁的强度趋于稳定, 尺寸效应可以忽略. 对比图中 Poisson 比分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 时的关系曲线可以看出,  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$  与  $h/l$  的关系曲线的斜率随 Poisson 比增大而增大, 即 Poisson 比越大微梁强度的尺寸效应越明显.

图 11 为根据式 (29a) 绘制的, 截面高度与材料特征长度比值  $h/l$  分别为 1, 3, 5, 7 时, Timoshenko 梁内最大正应力与 Poisson 比间的关系曲线, 其纵坐标为梁截面内正应力分量的最大值与其经典弹性理论解的比值  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$ , 横坐标为材料参数 Poisson 比. 数值计算表明梁截面内正应力分量最大值的经典弹性理论解  $\sigma_{x0}^{\max}$  不随 Poisson 比的改变而改变. 图中曲线表明:  $\sigma_x^{\max}/\sigma_{x0}^{\max}$  的值随着 Poisson 比的增大而非线性增大且增大趋势随截面高度的增大而逐渐趋缓, 即 Poisson 比对微梁截面内正应力分量最大值  $\sigma_x^{\max}$  的影响随截面高度增大而减弱. Poisson 比是影响微梁正应力分量  $\sigma_x^{\max}$  的重要因素.

## 4 结 论

基于修正偶应力理论和最小势能原理, 推导了 Timoshenko 微梁的位移场控微分方程; 利用级数法求得了任意载荷作用下 Timoshenko 微梁的挠度、转角、应力的偶应力理论解; 通过数值计算研究了 Timoshenko 微梁挠度、转角和应力的尺寸效应, 分析了 Poisson 比对 Timoshenko 微梁力学行为及尺寸效应的影响. 得到主要结论如下:

1) 当 Timoshenko 微梁的截面高度与材料特征长度的比值  $h/l < 5$  时, 微梁刚度随着截面高度的增加而急剧降低、尺寸效应显著; 当  $5 < h/l < 10$  时, 微梁刚度随着截面高度的增加而缓慢降低、尺寸效应不显著; 当  $h/l > 10$  时, 微梁刚度趋于稳定、尺寸效应可以忽略.

2) Poisson 比是影响 Timoshenko 微梁刚度及尺寸效应的重要因素, 当截面高度与材料特征长度的比值  $h/l < 5$  时, 微梁刚度随 Poisson 比的增大先降低后提高; 当  $h/l > 5$  时, 微梁刚度随 Poisson 比的增大而提高, Poisson 比越大微梁刚度的尺寸效应越显著.

3) 当 Timoshenko 微梁的截面高度与材料特征长度的比值  $h/l < 5$  时, 微梁强度随着截面高度的增加而急剧降低、尺寸效应显著; 当  $5 < h/l < 10$  时, 强度随着截面高度的增加而缓慢降低、尺寸效应不显著; 当  $h/l > 10$  时, 微梁强度趋于稳定、尺寸效应可以忽略.

4) 材料 Poisson 比是影响 Timoshenko 微梁强度及其尺寸效应的重要因素, Timoshenko 微梁强度随着 Poisson 比的增大而降低, 材料 Poisson 比越大、Timoshenko 微梁强度的尺寸效应越显著.

## 参考文献 (References):

- [1] KOUZELI M, MORTENSEN A. Size dependent strengthening in particle reinforced aluminium

- [J]. *Acta Materialia*, 2002, **50**(1): 39-51.
- [2] LAMA D C C, YANG F, CHONG A C M. Experiments and theory in strain gradient elasticity [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(8): 1477-1508.
- [3] 孙亮, 王珺, 韩平畴. 单根聚己内酯电纺亚微米纤维的动力学特性分析[J]. 高分子学报, 2009 (6): 535-539. (SUN Liang, WANG Jun, HAN Pingchou. A dynamic investigation of the properties of a single-strand, electrospun PCL sub-micro fiber [J]. *Acta Polymerica Sinica*, 2009 (6): 535-539. (in Chinese))
- [4] BAŽANT Z P. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, **110**(4): 518-535.
- [5] TOUPIN R A. Elastic materials with couple stresses [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 385-414.
- [6] MINDLIN R D, TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [7] MINDLIN R D. Influence of couple-stresses on stress concentrations [J]. *Experimental Mechanics*, 1963, **3**(12): 1-7.
- [8] 陈少华, 王自强. 应变梯度理论进展 [J]. 力学进展, 2003, **33**(2): 207-216. (CHEN Shaohua, WANG Ziqiang. Advances in strain gradient theory [J]. *Advances in Mechanics*, 2003, **33**(2): 207-216. (in Chinese))
- [9] YANG F, CHONG A, LAM D. Couple stress based strain gradient theory for elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10): 2731-2743.
- [10] PARK S K, GAO X L. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory [J]. *Journal of Micromechanics & Microengineering*, 2006, **16**(11): 2355-2359.
- [11] REDDY J N. Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, **59**(11): 2382-2399.
- [12] KE L L, YANG J, KITIPORNCHAI S. Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates [J]. *Composite Structures*, 2012, **94**(11): 3250-3257.
- [13] 陈万吉, 郑楠. 偶应力理论层合梁的稳定性及尺寸效应 [J]. 沈阳航空航天大学学报, 2012, **29**(4): 29-34. (CHEN Wanji, ZHENG Nan. Stability analysis of composite laminated beam based on couple stress theory and the scale effect [J]. *Journal of Shenyang Aerospace University*, 2012, **29**(4): 29-34. (in Chinese))
- [14] SIMSEK M, REDDY J N. A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory [J]. *Composite Structures*, 2013, **101**: 47-58.
- [15] BEKIR A, CIVALEK O. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory [J]. *Composite Structures*, 2013, **98**: 314-322.
- [16] 李安庆, 周慎杰, 周莎莎. 双层梁固有特性的尺寸效应 [J]. 工程力学, 2014, **31**(7): 223-228. (LI Anqing, ZHOU Shenjie, ZHOU Shasha. The size-dependent inherent property of bilayered micro-beams [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, **31**(7): 223-228. (in Chinese))
- [17] DEHROUYEH-SEMNANI A M, NIKKHAH-BAHRAMI M. The influence of size-dependent shear deformation on mechanical behavior of microstructures-dependent beam based on modified couple stress theory [J]. *Composite Structures*, 2015, **123**: 325-336.

- [18] 尹春松, 杨洋. 基于非局部铁木辛柯梁模型的碳纳米管弯曲特性研究[J]. 固体力学学报, 2015, **36**(S1): 165-169. (YIN Chunsong, YANG Yang. Shear deformable deformation of carbon nanotubes based on analytical nonlocal Timoshenko beam model[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, **36**(S1): 165-169. (in Chinese))
- [19] MOHAMMAD-ABADI M, DANESHMEHR A R. Modified couple stress theory applied to dynamic analysis of composite laminated beams by considering different beam theories[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2015, **87**: 83-102.
- [20] MAJID A K, MAHMOUD S, SAMIR A E. Postbuckling of functionally graded nanobeams based on modified couple stress theory under general beam theory[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, **110**: 160-169.
- [21] 苏文政, 刘书田. 一类多孔固体的等效偶应力动力学梁模型[J]. 力学学报, 2016, **48**(1): 111-126. (SU Wenzheng, LIU Shutian. Effective couple-stress dynamic beam model of a typical cellular solid[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48**(1): 111-126. (in Chinese))
- [22] 贺丹, 杨万里. 基于修正偶应力和高阶剪切变形理论的变截面微梁的自由振动[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(3): 292-296. (HE Dan, YANG Wanli. Free vibration analysis of non-uniform micro-beams based on modified couple stress theory and high order shear deformation theory [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(3): 292-296. (in Chinese))
- [23] 贺丹, 杨子豪. 基于一种新修正偶应力理论的平面正交各向异性功能梯度梁静弯曲模型及尺寸效应[J]. 复合材料学报, 2017, **34**(4): 538-544. (HE Dan, YANG Zihao. Static bending model and size effect of plane orthotropic functionally graded beam on a new modified couple stress theory[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2017, **34**(4): 538-544. (in Chinese))
- [24] FANG J, GU J, WANG H. Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, **136**: 188-199.
- [25] 朱军华, 苏伟, 刘人怀, 等. 静电驱动阶梯型微悬臂梁吸合电压分析[J]. 机械工程学报, 2018, **54**(8): 217-222. (ZHU Junhua, SU Wei, LIU Renhuai, et al. Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated stepped micro-cantilever beam[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, **54**(8): 217-222. (in Chinese))

# A Timoshenko Micro-Beam Model and Its Size Effects Based on the Modified Couple Stress Theory

ZHOU Bo, ZHENG Xueyao, KANG Zetian, XUE Shifeng

(College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum (East China),  
Qingdao, Shandong 266580, P.R.China)

**Abstract:** Based on the modified couple stress theory, the basic variables of the Timoshenko micro-beam, such as the stress, couple stress, strain and curvature, were described as the functions of partial derivatives of displacement components. According to the principle of minimum total potential energy, the governing differential equation was derived to determine the displacement field of the Timoshenko micro-beam. The series method was utilized to solve the governing differential equation for the simply supported Timoshenko micro-beam under arbitrary load, and the theoretical couple stress solutions of the deflection, rotation angle and stress, which can reflect the size effects, were obtained. The size effects of the deflection, rotation angle and stress of the Timoshenko micro-beam subjected to a cosine distribution load were investigated in detail, and the influence of Poisson's ratio on the mechanical behaviors of the Timoshenko micro-beam and the size effects were analyzed. The results show that, both the stiffness and the strength of the Timoshenko micro-beam improve clearly with the decreased cross section height and their size effects are obvious when the ratio of the cross section height to the material characteristic length is less than 5. However, both the stiffness and the strength of the Timoshenko micro-beam tend to be stable and their size effects can be neglected when the ratio of the cross section height to the material characteristic length is greater than 10. Poisson's ratio is an important factor influencing the mechanical behaviors of the Timoshenko micro-beam and the size effects. The smaller Poisson's ratio is, the more significant the size effects of the stiffness and the strength will be. The developed model can effectively describe the mechanical behaviors of Timoshenko micro-beams and their size effects, and makes a theoretical basis and technical reference for the design and analysis of micro-structures in the micro electro mechanical systems (MEMS).

**Key words:** Timoshenko micro-beam; size effect; displacement governing differential equation; series method; MEMS

**Foundation item:** The National Key R&D Program of China(2017YFC0307604)

---

引用本文/Cite this paper:

周博, 郑雪瑶, 康泽天, 薛世峰. 基于修正偶应力理论的 Timoshenko 微梁模型和尺寸效应研究[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(12): 1321-1334.

ZHOU Bo, ZHENG Xueyao, KANG Zetian, XUE Shifeng. A Timoshenko micro-beam model and its size effects based on the modified couple stress theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(12): 1321-1334.