

# 移动荷载作用下黏弹性地基-Timoshenko 梁 振动响应对比分析\*

黄 强<sup>1</sup>, 刘千斌<sup>1</sup>, 律 清<sup>2</sup>, 黄宏伟<sup>3</sup>, 郑荣跃<sup>1</sup>

- (1. 宁波大学 岩土工程研究所, 浙江 宁波 315211;
2. 宁波工程学院 建筑与交通工程学院, 浙江 宁波 315211;
3. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 基于 Fourier 变换方法,对移动荷载作用下三维、二维和一维轨道-地基模型的振动响应特征进行了研究,将轨道视为 Timoshenko 梁,比较了不同速度和地基厚度下各计算模型之间的响应差异.研究表明:三维模型存在一个地基等效刚度,为波数和频率的函数.二维和三维模型的临界速度较为接近,但比一维地基梁模型要小得多.荷载速度小于地基临界速度时,三维模型的梁挠度幅值最小,二维模型次之,一维模型梁挠度最大.当荷载速度达到或超过临界速度时,二维模型的梁挠度幅值变得最大,此时三者的挠度时程曲线存在明显差别.二维和三维模型的地层水平位移幅值先随地基深度增加而增大,在某一深度达到最大值后随深度增加逐渐减小,竖向位移幅值则随深度的增加逐渐减小.

**关键词:** 移动荷载; Timoshenko 梁; 地基等效刚度; 临界速度; 地基位移

**中图分类号:** U213.2<sup>+</sup>1      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.400235

## 引 言

轨道交通运行引起的轨道与地基振动一直是人们关注的问题.在软土地区,列车运行速度较大时有可能超过轨道-地基系统的临界速度而引发共振,造成轨道的挠度响应过大,严重威胁到列车的运行安全<sup>[1-2]</sup>.对于列车运行引起的轨道-地基响应,前人提出了不同的理论计算模型,包括一维地基梁模型、二维和三维轨道-地基模型.例如, Kenney<sup>[3]</sup>首次分析了移动荷载作用下弹性地基上 Euler 梁的稳态响应问题;杨燕等<sup>[4]</sup>采用高阶 Galerkin 截断分析了车路耦合非线性振动,将道路模型视为非线性的黏弹性地基梁模型;陈启勇等<sup>[5]</sup>基于声子晶体理论研究了 Winkler 地基梁的带隙特征,分析了弹性地基梁的减振特性.在轨道-地基二维模型方面, Metrikine 和 Vrouwenvelder<sup>[6]</sup>、Zhou 等<sup>[7]</sup>采用梁-地层二维平面模型分析了隧道内列车移动引

\* 收稿日期: 2019-08-06; 修订日期: 2019-10-16

**基金项目:** 国家自然科学基金(面上项目)(51778303);国家自然科学基金(重点项目)(51538009);宁波市自然科学基金(2019A610399)

**作者简介:** 黄强(1987—),男,讲师,博士(E-mail: qianghuang1987@163.com);  
刘千斌(1976—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: liuganbin@nbu.edu.cn).

**引用格式:** 黄强,刘千斌,律清,黄宏伟,郑荣跃.移动荷载作用下黏弹性地基-Timoshenko 梁振动响应对比分析[J].应用数学和力学,2020,41(7):735-746.

起的地层振动响应.三维轨道-地基计算模型方面, Metrikine 等<sup>[8]</sup>研究了有限厚度半空间上 Euler 梁的振动响应,对三维地基的等效刚度和轨道-地基三维模型的临界速度进行了研究;王常晶和陈云敏<sup>[9]</sup>将轨道视为 Timoshenko 梁,根据轨道与地基刚度的相对关系,讨论了 Timoshenko 梁-半空间地基系统 4 种情况下的临界速度.

尽管目前对于移动荷载下轨道-地基系统振动响应的研究很多,但对于不同解析计算模型适用效果及其响应结果差异研究仍较为少见,已有的一些对比研究主要是针对横截面内列车振动响应差异展开的,例如 Andersen 和 Jones<sup>[10]</sup>、Xu 等<sup>[11]</sup>都比较了地铁列车运行引起的二维模型和三维模型在横断面内的振动响应差异,对于纵向上模型的响应差异没有涉及,列车运行引起的轨道-地基振动响应本质上是一个移动荷载作用下的三维动力问题,由于采用三维模型计算分析往往较为复杂,计算工作量大,在某些情况下采用纵向二维轨道-地基模型或一维地基梁模型进行简化分析也是一种近似的方法.然而,采用纵向二维或一维轨道-地基模型近似三维模型进行计算时,不同模型的响应计算结果必然存在一定的差异.因此,有必要对二维和一维模型的近似效果进行对比分析,模型的适用性也需做进一步的验证.基于此,本文拟对移动荷载作用下三维、二维和一维轨道-地基模型的振动响应进行对比分析,对比不同因素下 3 种计算模型的响应差异,研究结果可为轨道交通环境振动分析模型的选择提供一定的参考.

## 1 轨道-地基计算模型

在 3 种轨道-地基计算模型中,轨道都简化为有限宽度的 Timoshenko 梁(T 梁),下卧地层分别为有限厚度的三维黏弹性均匀地基、二维地基和一维黏弹性 Pasternak 地基.下面分别对这 3 种计算模型进行简要介绍.

### 1.1 T 梁-黏弹性地基三维模型

T 梁-黏弹性三维地基模型如图 1 所示,轨道为作用在地基表面的 T 梁,梁的横向宽度为  $2a$ ,假设梁与地基光滑接触,梁底地基反力均匀分布.梁上作用的总荷载大小为  $p_0$ ,荷载在梁表面沿宽度范围内均匀分布,荷载移动速度为  $v_0$ ,地基厚度为  $H$ .

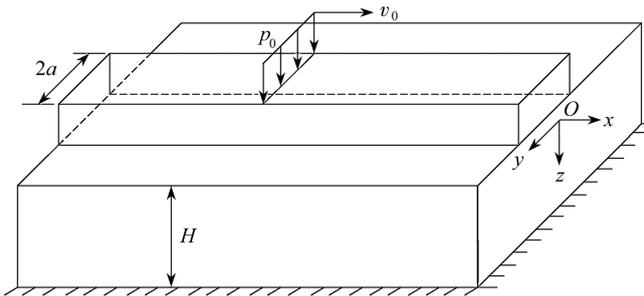


图 1 三维轨道-地基模型

Fig. 1 A 3D track-ground model

采用修正形式的 T 梁振动方程<sup>[12]</sup>,同时参考文献[13]中弹性半空间上有限宽度梁的振动表达形式,将 T 梁的振动方程表示如下:

$$EI_z \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^2 W^0}{\partial t^2} - \left( \rho_b I_z + \frac{m_b EI_z}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^2 \partial t^2} + \left( 1 - \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) q_z(x, t) =$$

$$\left(1 - \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) p_0 \delta(x - v_0 t), \quad (1)$$

式中,  $q_z(x, t)$  是梁底部地基反力, 向上为正,  $\text{N/m}$ ;  $W^0(x, t)$  为 T 梁的挠度,  $\text{m}$ ;  $EI_z, \kappa GA$  分别为 T 梁的抗弯刚度和抗剪切刚度,  $\text{N}\cdot\text{m}^2$ ;  $m_b$  为单位长度梁质量,  $\text{kg/m}$ ;  $\rho_b I_z$  为梁转动惯性矩,  $\text{kg}\cdot\text{m}$ .

式(1)中我们假设梁底部地基反力  $q_z(x, t)$  沿梁的宽度方向均匀分布, 则作用在地基表面的分布荷载  $q(x, y, 0, t)$  可表示为

$$q(x, y, 0, t) = -H(a - |y|) \frac{q_z(x, t)}{2a}, \quad (2)$$

式中,  $H(a - |y|)$  为 Heaviside 函数, 满足

$$H(a - |y|) = \begin{cases} 1, & |y| \leq a, \\ 0, & |y| > a. \end{cases} \quad (3)$$

事实上, T 梁作用在地表的分布荷载即为地表法向应力, 故

$$q(x, y, 0, t) = \sigma_{zz}(x, y, 0, t),$$

$\sigma_{zz}(x, y, 0, t)$  为地表竖向正应力, 以受拉为正, 受压为负.

对于三维黏弹性地基, 其振动方程为<sup>[9]</sup>

$$\tilde{G} \nabla^2 \mathbf{U} + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{U}(x, y, z) = (u, v, w)$ , 为地基纵向、横向和竖向位移;  $\tilde{\lambda}, \tilde{G}$  为考虑地基黏弹性特征的刚度系数, 其中

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \lambda^*(\partial/\partial t), \quad \tilde{G} = G + G^*(\partial/\partial t),$$

$\lambda, G$  为地基 Lamé 常数,  $\lambda^*, G^*$  为对应的黏性系数,  $\rho_s$  为地基密度.

假设地表剪切应力为零, 同时假设 T 梁的挠度等于地表中心线处的竖向位移, 则有限厚度的三维地基-梁模型的边界条件可以统一表示如下:

$$\begin{cases} q(x, y, 0, t) = \sigma_{zz}(x, y, 0, t), \\ \tau_{xz}(x, y, 0, t) = 0, \\ \tau_{yz}(x, y, 0, t) = 0, \\ W^0(x, t) = w(x, 0, 0, t), \\ \mathbf{U}(x, y, H, t) = (0, 0, 0). \end{cases} \quad (5)$$

本文 T 梁-三维地基接触条件借鉴了文献[14]中的简化分析方法 1, 即假设 T 梁底部的正应力在横向上均匀分布, T 梁挠度等于地基表面中心线竖向位移. 根据文献[14]的研究结果, 在现有的列车速度下, 简化分析方法与准确分析方法得到的计算结果差别不大, 足以用来分析移动荷载引起的轨道与地基振动响应.

参考文献[8]的解答, 通过引入位移势函数, 并对  $x, y, t$  进行 Fourier 变换, 得到波数-频率域下 T 梁的位移表达式如下:

$$W^0(k_1, \omega) = \frac{\left(1 + \frac{EI_z k_1^2}{\kappa GA}\right) 2\pi p_0 \delta(\omega + k_1 v_0)}{D(k_1, \omega) + \left(1 + \frac{EI_z k_1^2}{\kappa GA}\right) \chi_{\text{eq}}^{\text{layer}}}, \quad (6)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} D(k_1, \omega) &= EI_z k_1^2 - m_b \omega^2 - \left( \rho_b I_z + \frac{m_b EI_z}{\kappa GA} \right) k_1^2 \omega^2, \\ \chi_{\text{eq}}^{\text{layer}}(\omega, k_1) &= \frac{-2\pi \frac{\tilde{c}_T^2}{\omega^2} (G + i\omega G^*)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_L \frac{\text{Num}(k_2) \sin(ak_2)}{\text{Den}(k_2) ak_2} dk_2}, \\ \text{Num}(k_2) &= K^2 \sinh(H\tilde{R}_T) \cosh(H\tilde{R}_L) - \tilde{R}_L \tilde{R}_T \sinh(H\tilde{R}_L) \cosh(H\tilde{R}_T), \\ \text{Den}(k_2) &= K^2 (4\tilde{R}_L^2 \tilde{R}_T^2 + \gamma^2) \sinh(H\tilde{R}_L) \sinh(H\tilde{R}_T) + 4K^2 \gamma \tilde{R}_L \tilde{R}_T - \\ &\quad \tilde{R}_L \tilde{R}_T (4K^4 + \gamma^2) \cosh(H\tilde{R}_L) \cosh(H\tilde{R}_T). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Num}(k_2) &= K^2 \sinh(H\tilde{R}_T) \cosh(H\tilde{R}_L) - \tilde{R}_L \tilde{R}_T \sinh(H\tilde{R}_L) \cosh(H\tilde{R}_T), \\ \text{Den}(k_2) &= K^2 (4\tilde{R}_L^2 \tilde{R}_T^2 + \gamma^2) \sinh(H\tilde{R}_L) \sinh(H\tilde{R}_T) + 4K^2 \gamma \tilde{R}_L \tilde{R}_T - \\ &\quad \tilde{R}_L \tilde{R}_T (4K^4 + \gamma^2) \cosh(H\tilde{R}_L) \cosh(H\tilde{R}_T). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

然后可得到地基位移的表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} u(k_1, k_2, z, \omega) &= ik_1 (B_1 \sinh(z\tilde{R}_L) + B_2 \cosh(z\tilde{R}_L) + \\ &\quad \tilde{R}_T (B_3 \sinh(z\tilde{R}_T) + B_4 \cosh(z\tilde{R}_T))), \\ v(k_1, k_2, z, \omega) &= ik_2 (B_1 \sinh(z\tilde{R}_L) + B_2 \cosh(z\tilde{R}_L) + \\ &\quad \tilde{R}_T (B_3 \cosh(z\tilde{R}_T) + B_4 \sinh(z\tilde{R}_T))), \\ w(k_1, k_2, z, \omega) &= \tilde{R}_L (B_1 \cosh(z\tilde{R}_L) + B_2 \sinh(z\tilde{R}_L)) + \\ &\quad (k_1^2 + k_2^2) (B_3 \cosh(z\tilde{R}_T) + B_4 \sinh(z\tilde{R}_T)). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

式(6)~(9)中,  $k_1, k_2$  为  $x, y$  对应的波数;  $\omega$  为圆频率;  $D(k_1, \omega)$  为 T 梁自由振动对应的频散曲线;  $\chi_{\text{eq}}^{\text{layer}}$  为三维地基的等效刚度;  $B_1 \sim B_4, \tilde{R}_L, \tilde{R}_T, \gamma, K$  等参数的具体形式详见文献[8].

## 1.2 二维地基-梁模型

不考虑地基的横向振动, 建立平面应变条件下的纵向二维轨道-地基模型, 如图 2 所示.

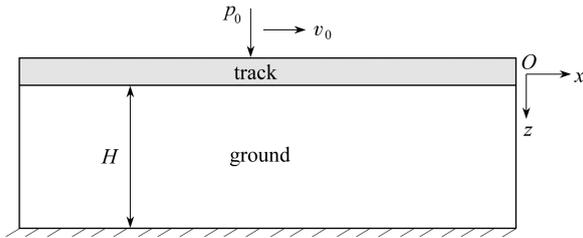


图 2 二维轨道-地基模型

Fig. 2 A 2D track-ground model

此时 T 梁的振动方程变为

$$2a \left( 1 - \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{zz}(x, 0, t) = EI_z \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^2 W^0}{\partial t^2} - \left( \rho_b I_z + \frac{m_b EI_z}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^2 \partial t^2} - \left( 1 - \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p_0 \delta(x - v_0 t). \quad (10)$$

可以看出, 二维地基的振动方程与三维地基形式一致, 此时  $\mathbf{U}(x, z, t) = (u, w)$ , 没有了横向位移. Lamé 常数  $\lambda$ ,  $G$  为平面应变条件下的取值, 其他参数与三维地基模型一致. 二维地基模型应满足如下条件:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(x, H, t) = (0, 0), \\ \tau_{xz}(x, 0, t) = 0, \\ W^0(x, t) = w(x, 0, t). \end{cases} \quad (11)$$

对于二维模型的解答,可借鉴 Metrikine 和 Vrouwenvelder<sup>[6]</sup>的解答,只是这里地层边界条件有所改变,最终得到地基位移表达式如下:

$$\begin{cases} u(k_1, z, \omega) = ik_1(A_1 e^{z\tilde{R}_L} + A_2 e^{-z\tilde{R}_L}) + \tilde{R}_T(A_3 e^{z\tilde{R}_T} + A_4 e^{-z\tilde{R}_T}), \\ w(k_1, z, \omega) = \tilde{R}_L(A_1 e^{z\tilde{R}_L} - A_2 e^{-z\tilde{R}_L}) - ik_1(A_3 e^{z\tilde{R}_T} + A_4 e^{-z\tilde{R}_T}). \end{cases} \quad (12)$$

此时,地表 T 梁的挠度变为

$$W^0(k_1, \omega) = w(k_1, 0, \omega) = R_L(A_1 - A_2) - ik_1(A_3 + A_4). \quad (13)$$

式(12)、(13)中,系数  $A_1 \sim A_4, \tilde{R}_L, \tilde{R}_T$  的具体形式可见文献[6].

### 1.3 一维地基-梁模型

一维轨道-地基模型如图 3 所示,地基模型选择黏弹性 Pasternak 地基,相对于 Winkler 地基模型,该模型可以同时反映地基的压缩刚度和剪切刚度,更为合理.

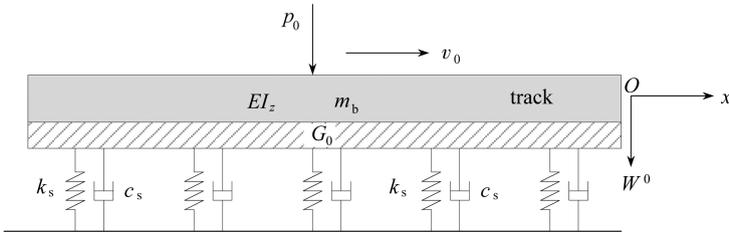


图 3 一维轨道-地基模型

Fig. 3 A 1D track-ground model

一维 Pasternak 地基梁的振动方程如下:

$$\begin{aligned} EI_z \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^4} + \left(1 - \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) (k_s W^0 + c_s \dot{W}^0) 2a - 2aG_0 \frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2} - \\ \left(\rho_b I_z + \frac{m_b EI_z}{\kappa GA}\right) \frac{\partial^4 W^0}{\partial x^2 \partial t^2} = \left(1 - \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) p_0 \delta(x - v_0 t), \end{aligned} \quad (14)$$

式中,  $k_s$  为地基压缩刚度;  $G_0$  为地基剪切刚度;  $c_s$  为地基阻尼, 阻尼假设与前面地基黏性系数一致. 根据弹性空间法<sup>[15]</sup>, 可确定地基刚度  $k_s = E_s/H, G_0 = G_s H/3$ , 其中  $E_s, G_s$  为弹性模量和剪切模量,  $H$  为地基厚度.

利用双重 Fourier 变换, 即可得到一维轨道-地基模型的挠度表达式如下:

$$W^0(k_1, \omega) = \frac{\left(1 + \frac{EI_z k_1^2}{\kappa GA}\right) 2\pi p_0 \delta(\omega + k_1 v_0)}{D(k_1, \omega) + \left(1 + \frac{EI_z k_1^2}{\kappa GA}\right) (k_s + ic_s \omega)}. \quad (15)$$

## 2 计算结果与分析

### 2.1 轨道-地基模型相关参数

不同轨道-地基的计算参数如表 1 所示, 假设  $p_0 = 80 \text{ kN}$ , 为列车单侧轮对所能承担的最大

轮轴荷载,地基弹性模量为 25 MPa,为中等压缩性地层。

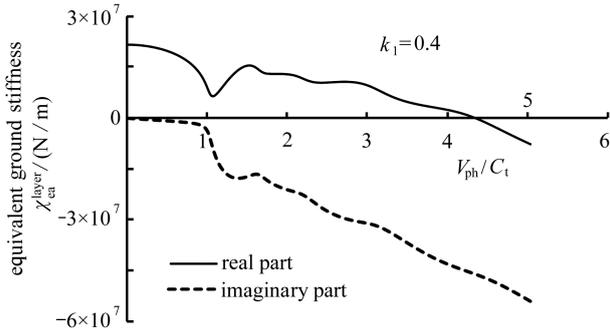
表 1 不同轨道-地基模型参数<sup>[16]</sup>

Table 1 Parameters of different track-ground models<sup>[16]</sup>

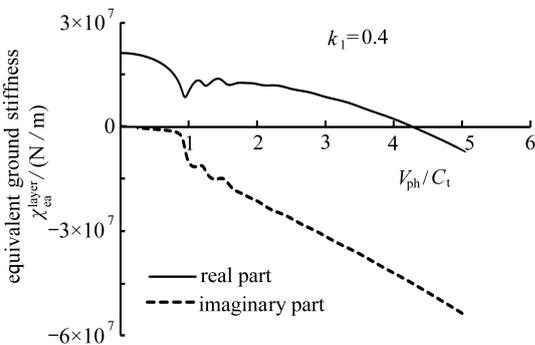
$E_s / \text{MPa}$	$\nu$	$\lambda / \text{MPa}$	$G / \text{MPa}$	$\lambda^* / (\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2})$	$G^* / (\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2})$
25	0.3	14.42	9.62	3E4	3E4
$EI_z / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$	$\kappa GA / \text{MN}$	$m_b / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	$\rho_b I_z / (\text{kg} \cdot \text{m})$	$C_p / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$C_t / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
4.732E7	1.183E3	1 000	3.33	140.7	75.2
$k_s / (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$	$c_s / (\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2})$	$G_0 / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$p_0 / \text{kN}$	$v_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$2a / \text{m}$
2.78E6	3E4	2.89E7	80	20	2.0

## 2.2 三维黏弹性地基的等效刚度

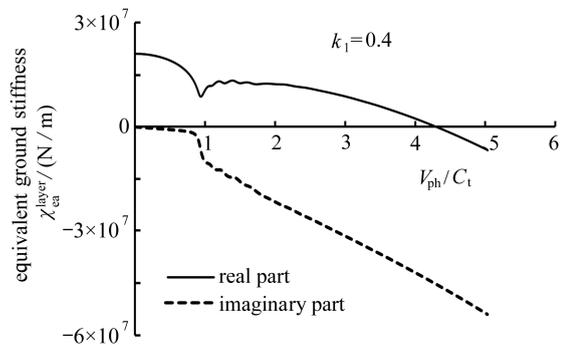
采用三维地基-轨道模型计算梁的挠度时会得到一个地基等效刚度 $\chi_{\text{eq}}^{\text{layer}}$ ,其物理意义为三维地基近似等效为一维地基弹簧的压缩刚度.从地基等效刚度表达式来看,移动荷载下的地基等效刚度除与地基自身刚度有关外,还是波数 $k_1$ 和频率 $\omega$ 的函数,且受地基厚度的影响.图4给出了不同地基厚度下地基等效刚度与相速度的关系,横坐标为相速度比 $V_{\text{ph}}/C_t, V_{\text{ph}} = \omega/k_1$ , $C_t$ 为地基的剪切波速.地基等效刚度包含实部和虚部,实部代表地基弹簧的压缩刚度,控制地基弹性变形;虚部代表地基弹簧的阻尼,控制地基中能量的耗散.可以看出,随着地层厚度的增加,等效刚度幅值会有轻微减小,地基厚度在 9, 18, 27 m 对应的初始地基刚度分别为  $2.156 \times 10^7, 2.126 \times 10^7, 2.100 \times 10^7 \text{ N/m}$ .



(a)  $H = 9 \text{ m}$



(b)  $H = 18 \text{ m}$



(c)  $H = 27 \text{ m}$

图 4 不同地层厚度下地基等效刚度与相速度的关系

Fig. 4 Relationships between the equivalent ground stiffness and the phase velocity under different soil thicknesses

从地基等效刚度实部和虚部曲线变化来看,地基等效刚度都存在一个临界相速度.当速度达到临界相速度时,实部下降到一极小值,而虚部变化不大,地基等效刚度幅值达到最小,产生的轨道挠度最大,地基-轨道系统发生共振现象.由于本文考虑了地基的阻尼,所以当列车速度达到临界相速度时,地基等效刚度没有降为零,否则发生共振时梁的挠度将变为无穷大.当荷载速度超过临界相速度后,地基刚度实部在短暂回升后快速减小,虚部开始快速增大,表明地基的阻尼显著增加,荷载移动产生的梁振动能都被地基耗散,地基的等效刚度不断增大,轨道挠度呈现减小趋势.

地基的临界相速度与波数  $k_1$  有关,比较不同地基厚度下地基临界相速度随波数变化规律,如图 5 所示,不同地层厚度下的临界相速度都随着波数的增加而降低.不过,地层厚度越大,波数对临界相速度的影响就越小,临界相速度的值变化范围越小.不同波数和地层厚度下的临界相速度都趋于一稳定值,该稳定值接近于地基的剪切波速.因此,当地基为半无限空间时,不同波数下的地基临界相速度近似地基的剪切波速.

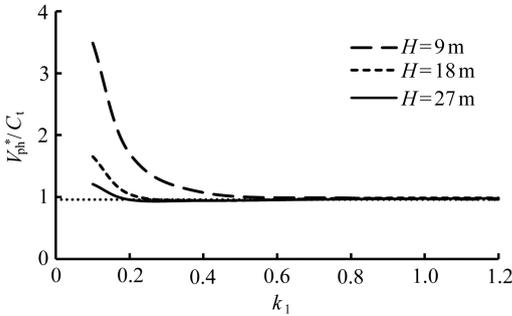


图 5 不同地层厚度下临界相速度比与波数的关系

Fig. 5 Relationships between the critical phase velocity and the wave number under different ground thicknesses

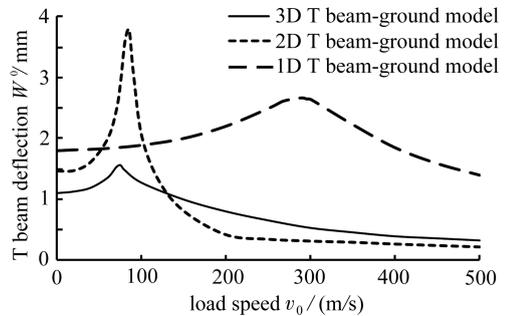


图 6 T 梁挠度与速度的关系 ( $H = 9$  m)

Fig. 6 Relationships between the T beam deflection and the load speed under different models ( $H = 9$  m)

## 2.3 不同计算模型 T 梁挠度响应对比

### 2.3.1 列车速度的影响

以  $H = 9$  m 为例,计算出 3 种模型 T 梁挠度幅值与荷载速度的关系,如图 6 所示.各计算模型的梁挠度都是先随着速度的增加而增加,在临界速度处达到最大值,随后随着列车速度增加梁挠度减小.3 种计算模型得到的临界速度明显不同,一维地基-轨道模型的临界速度最大,为 290 m/s,二维地基-轨道模型次之,为 85 m/s,三维轨道-地基模型最小,为 75 m/s,接近地基的剪切波速;二维和三维轨道-地基模型的临界速度较接近,一维模型的变化较大,表明把均匀地基直接等效为地基弹簧会高估轨道-地基系统的临界速度.从挠度结果看,在荷载速度较低时(本文为小于 50 m/s),三维 T 梁-地基模型的挠度最小,二维模型次之,一维地基模型最大,这表明采用一维地基梁模型的挠度误差最大,纵向二维模型次之,轨道-地基三维模型计算最为合理.随着荷载速度的增加,二维平面应变模型的梁挠度增加最快,其临界速度处对应的梁挠度峰值最大,达到 3.78 mm,远大于三维模型的 1.56 mm 和一维模型的 2.67 mm,表明纵向二维地基-轨道模型受荷载速度的影响最明显.

比较不同速度下 3 种模型的梁挠度曲线,如图 7 所示.当列车速度小于临界速度时,三者的挠度曲线相似,挠度曲线都类似于静载作用下的结果,挠度曲线在荷载作用点两侧对称分布,此时三维地基模型的梁挠度峰值最小,挠度影响范围也最小,二维地基模型次之,一维地基

模型计算结果最大.当荷载速度达到三维地基临界速度时,挠度曲线开始变得不对称,挠度峰值向荷载后方一侧移动,如图 7(b)所示,二维模型的梁挠度最大,三维模型最小,一维模型因还未达到临界速度,挠度曲线仍基本呈现对称分布.当荷载速度超过一维模型临界速度时,梁挠度曲线进一步发生变化,如图 7(c)和图 7(d)所示,荷载作用点前后的挠度曲线明显不同,二维和三维模型荷载后方的梁挠度波动显著增强,影响范围大大增加,荷载前方的挠度被抑制,但一维地基模型的梁挠度波动程度和影响范围要小得多,仅荷载前方挠度曲线有轻微的波动.可见,将地层视为均匀地基,二维和三维模型的梁挠度响应规律较为接近,一维模型的挠度则存在较大差异.

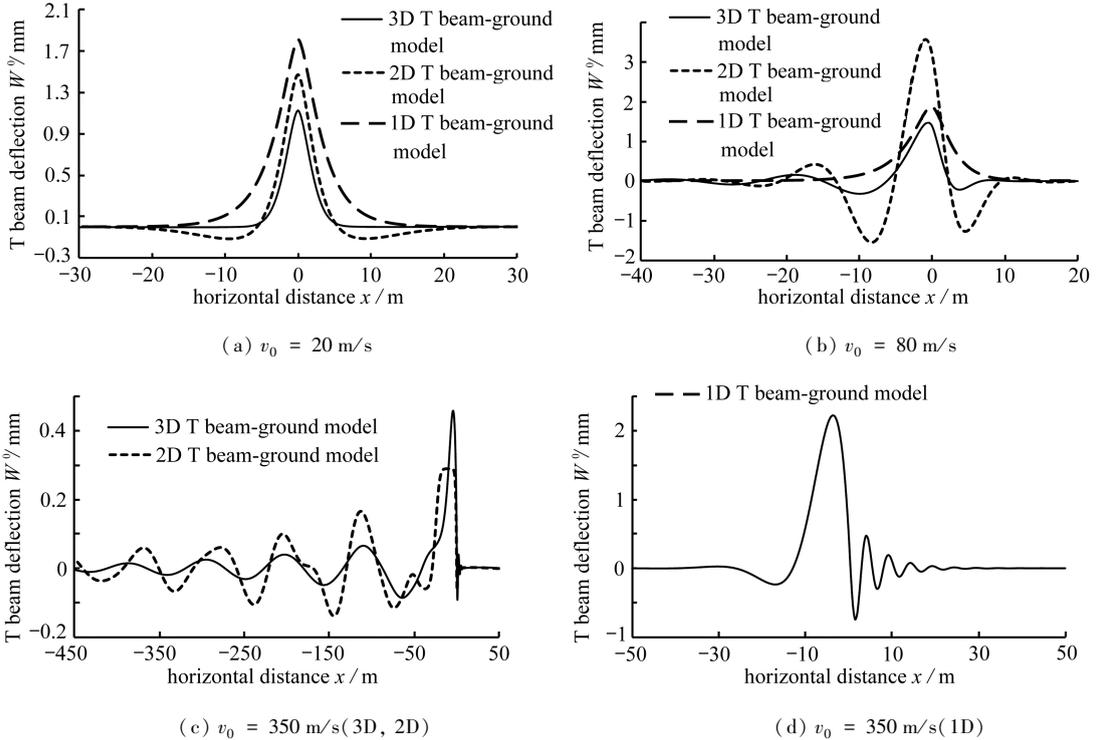
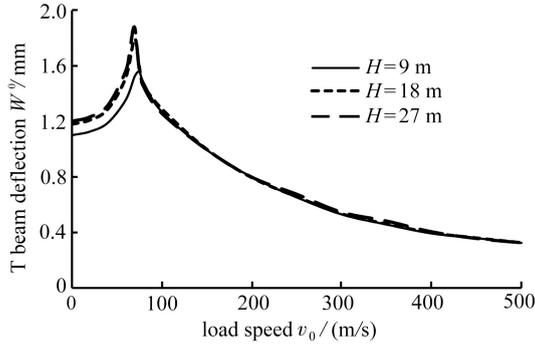


图 7 不同速度下 T 梁挠度曲线对比

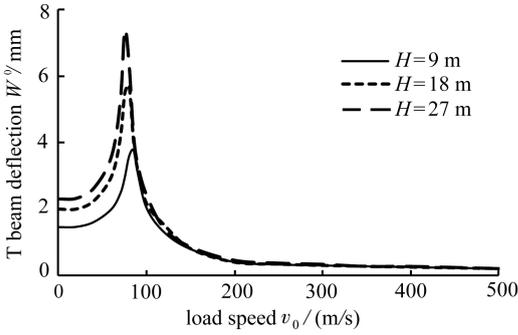
Fig. 7 Comparisons of T beam deflection curves under different load speeds

### 2.3.2 地基厚度的影响

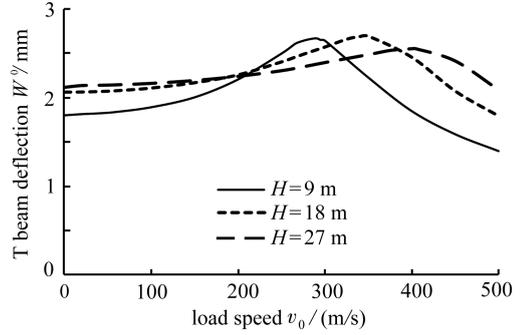
地基厚度对 T 梁挠度影响如图 8 所示,可以看出,地基厚度对 3 种计算模型的影响程度明显不同.地基厚度对二维和三维轨道-地基模型的影响类似,地基厚度增加会使得系统的临界速度有所降低,地基厚度从 9 m 增至 27 m 时,三维地基临界速度从 75 m/s 降为 70 m/s,二维模型从 85 m/s 降至 80 m/s.不过,三维模型受地基厚度影响要比二维模型弱得多,当地基厚度从 9 m 变为 27 m 时,三维模型梁挠度增加不大,但二维模型增加较多,特别是临界速度下的挠度值.可见,采用二维轨道-地基模型分析列车振动时,会高估地层挠度.另外,研究发现,地基厚度增加主要对临界速度前的 T 梁挠度有影响,对临界速度后的梁挠度改变不大.对于一维 Pasternak 地基梁模型,情况则有所不同.地基厚度增加会减少地基弹簧的压缩刚度,但会增加地基抗剪切刚度,其最终结果是 Pasternak 地基梁的临界速度随着地基厚度的增加而增加,与二维和三维模型规律相反.不过,尽管地基厚度增加,但临界速度对应的梁挠度并没有多大改变,甚至还有轻微的下降,这应该也与 Pasternak 地基剪切刚度增强有关.可见,地基厚度增加对一维地基梁挠度影响与二维和三维轨道-地基模型存在较大差异.



(a) T 梁-地基三维模型  
(a) 3D T beam-ground model



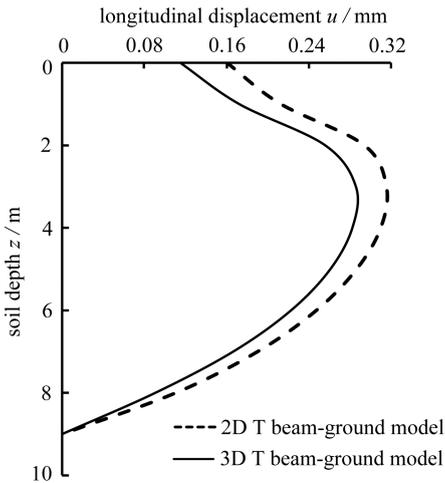
(b) T 梁-地基二维模型  
(b) 2D T beam-ground model



(c) T 梁-地基一维模型  
(c) 1D T beam-ground model

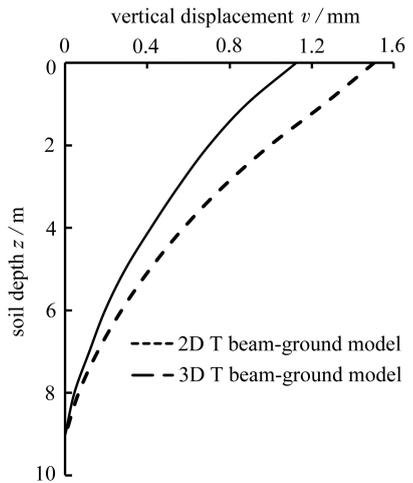
图 8 不同地基厚度下 T 梁挠度与速度的关系

Fig. 8 Relationships between the T beam deflection and the load speed under different ground thicknesses



(a) 纵向位移

(a) The longitudinal displacement



(b) 竖向位移

(b) The vertical displacement

图 9 T 梁-地基二维和三维模型地基位移对比

Fig. 9 Comparisons of ground displacements between 2D and 3D Timoshenko beam-ground models

## 2.4 地层位移响应对比

最后比较二维和三维计算模型的地层位移,以列车速度 20 m/s 为例,纵向平面内的位移对比如图 9 所示。可以看出,二维和三维模型的地基位移随深度变化规律一致,二维模型计算结果偏大,纵向和竖向位移最大差距可达 39% 和 43%。地层内部纵向位移和竖向位移随深度的变化规律不一致,纵向位移幅值先随深度增加而增加,在轨道下某一深度达到峰值后再随深度的增加而减小,竖向位移幅值则随深度的增加不断减小,最终变为 0。二维和三维计算模型地表面的位移差距最大,随着深度增加,差异逐渐减少。

比较两种计算模型某一深度处地基位移沿纵向水平距离的变化,如图 10 所示,可见,在列车速度不大时,地层内部位移分布规律一致,但二维模型的位移幅值偏大,荷载影响范围更广。因此,采用二维平面模型得到的地基位移明显偏大,其根本原因在于二维模型不能考虑地基横向的振动,导致地铁运行引起的振动能量都聚集在平面内,平面内的振动响应增强,在达到临界速度时,差异会更加明显。

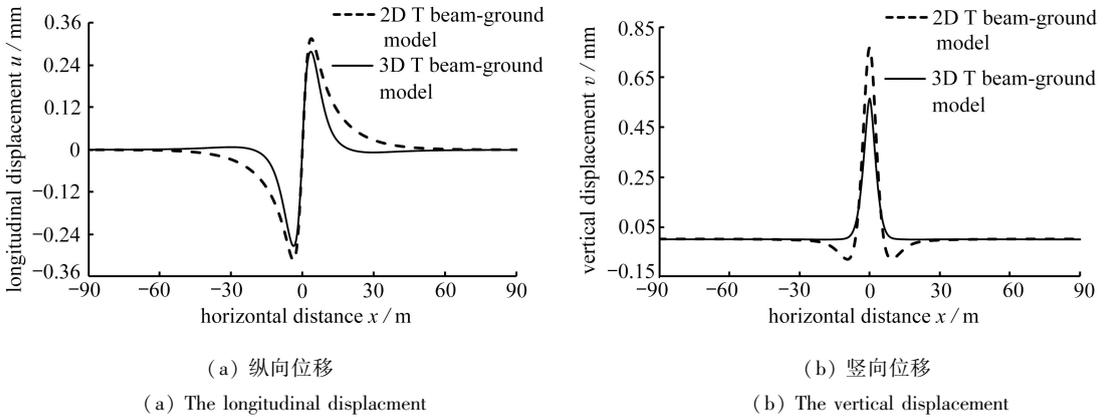


图 10 地层位移沿水平距离变化 ( $z = 3$  m,  $v_0 = 20$  m/s)

Fig. 10 Changes of ground displacements with the horizontal distance ( $z = 3$  m,  $v_0 = 20$  m/s)

## 3 结 论

本文对移动荷载作用下黏弹性地基上 Timoshenko 梁振动响应进行分析,对比了三维、纵向二维和一维轨道-地基模型的响应差异,得到以下结论:

1) 不同轨道梁下三维地基的等效刚度表达式是一致的,有限厚地基的等效刚度除与地基弹性模量、波数、频率有关外,同时受地基厚度的影响,随着地层厚度增加,地基等效刚度会有所减小,在地基厚度较大时不同波数下的临界相速度等于地基剪切速度。

2) 在荷载速度小于轨道-地基临界速度时,一维轨道-地基模型的临界速度最大,二维模型次之,三维模型最小,3种计算模型的梁挠度曲线类似。临界速度下二维模型的梁挠度峰值最大,一维 Pasternak 地基梁模型次之,三维模型的最小。在荷载速度大于临界速度时,二维和三维模型得到的梁挠度时程曲线类似,一维地基梁挠度曲线明显不同。随着地基厚度增加,二维和三维计算模型的临界速度有所减少,但一维 Pasternak 地基梁模型的临界速度却增大。

3) 总的来说,二维和三维轨道-地基模型的响应规律较为接近,但二维模型计算的梁挠度与地基位移比三维模型结果大一些,振动影响范围也更广。一维地基梁模型的结果可能存在较大的误差,且无法准确反映实际地基真实振动响应规律。

## 参考文献(References):

- [1] KRYLOV V V, DAWSON A R, HEELIS M E, et al. Rail movement and ground waves caused by high-speed trains approaching track-soil critical velocities[J]. *Journal of Rail and Rapid Transit*, 2000, **214**(2): 107-116.
- [2] BIAN X C, CHENG C, JIANG J Q, et al. Numerical analysis of soil vibrations due to trains moving at critical speed[J]. *Acta Geotechnica*, 2016, **11**(2): 281-294.
- [3] KENNEY J T. Steady state vibrations of beam on elastic foundation for moving load[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1954, **21**(4): 359-364.
- [4] 杨燕, 丁虎, 陈立群. 车路耦合非线性振动高阶 Galerkin 截断研究[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(9): 881-890.(YANG Yan, DING Hu, CHEN Liqun. Nonlinear vibration of vehicle-pavement coupled system based on high-order Galerkin truncation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(9): 881-890.(in Chinese))
- [5] 陈启勇, 胡少伟, 张子明. 基于声子晶体理论的弹性地基梁的振动特性研究[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 29-38.(CHEN Qiyong, HU Shaowei, ZHANG Ziming. Research on the vibration property of the beam on elastic foundation based on the PCs theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 29-38.(in Chinese))
- [6] METRIKINE A V, VROUWENVELDER A C M. Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two-dimensional model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **234**(1): 43-66.
- [7] ZHOU B, XIE X Y, YANG Y B. Simulation of wave propagation of floating slab track-tunnel-soil system by a 2D theoretical model[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2014, **14**(1): 1350051.
- [8] METRIKINE A V, KOPP K. Steady-state vibrations of an elastic beam on a visco-elastic layer under moving load[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2000, **70**: 399-408.
- [9] 王常晶, 陈云敏. 移动荷载作用下弹性半空间 Timoshenko 梁的临界速度[J]. 振动工程学报, 2006, **19**(1): 139-144.(WANG Changjing, CHEN Yunmin. Critical velocities of Timoshenko beam on an elastic half-space under a moving load[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, **19**(1): 139-144.(in Chinese))
- [10] ANDERSEN L, JONES C J C. Coupled boundary and finite analysis of vibration from railway tunnels: a comparison of two- and three-dimensional models[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **293**(3/5): 611-625.
- [11] XU Q Y, XIAO Z C, LIU T, et al. Comparison of 2D and 3D prediction models for environmental vibration induced by underground railway with two types of tracks[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, **68**: 169-183.
- [12] 陈镛, 万春风, 薛松涛, 等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005, **33**(6): 711-715.(CHEN Rong, WAN Chunfeng, XUE Songtao, et al. Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2005, **33**(6): 711-715.(in Chinese))
- [13] JIN B. Dynamic displacements of an infinite beam on a proelastic half space due to a moving oscillating load[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2004, **74**(3): 277-287.
- [14] STEENBERG M, METRIKINE A V. The effect of the interface conditions on the dynamic response of a beam on a half-space to a moving load[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2007, **26**(1): 33-54.

- [15] HORVATH J S. New subgrade model applied to mat foundations[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, **109**(12): 1567-1587.
- [16] 黄强, 黄宏伟, 张冬梅, 等. 移动简谐荷载作用下 Kerr 地基梁的稳态响应研究[J]. 振动与冲击, 2018, **37**(1): 14-21. (HUANG Qiang, HUANG Hongwei, ZHANG Dongmei, et al. Steady-state response of an infinite Euler-Bernoulli beam on Kerr foundation subjected to a moving oscillating load[J]. *Journal of Shock and Vibration*, 2018, **37**(1): 14-21. (in Chinese))

## Comparative Analysis of Dynamic Responses of Timoshenko Beams on Visco-Elastic Foundations Under Moving Loads

HUANG Qiang<sup>1</sup>, LIU Ganbin<sup>1</sup>, LÜ Qing<sup>2</sup>,  
HUANG Hongwei<sup>3</sup>, ZHENG Rongyue<sup>1</sup>

(1. *Institute of Geotechnical Engineering, Ningbo University,  
Ningbo, Zhejiang 315211, P.R.China;*

2. *School of Civil and Transportation Engineering, Ningbo University  
of Technology, Ningbo, Zhejiang 315211, P.R.China;*

3. *Department of Geotechnical Engineering, Tongji University,  
Shanghai 200092, P.R.China)*

**Abstract:** The dynamic responses of 3D, 2D and 1D track-ground models under moving loads were analyzed based on the Fourier transformation technique. The track was modelled as a Timoshenko beam, and response discrepancies between the 3 models were compared in terms of different load speeds and ground thicknesses. The results indicate that, there is an equivalent ground stiffness in the 3D track-ground model, which is a function of the wave number and the frequency. The critical velocities of 2D and 3D track-ground models are almost the same, but are much smaller than that of the 1D model. When the load speed is less than the critical speed, the Timoshenko beam deflection of the 3D model is the smallest, that of the 2D model is the intermediate, and that of the 1D model is the largest. However, when the load speed reaches or exceeds the critical velocity, the T beam deflection of the 2D model becomes the largest, and the time history curves of the T beam deflection for the 3 models are significantly different. In the 2D and 3D models, the longitudinal ground displacement firstly increases with the soil depth to a peak value and then decreases, but the vertical displacement decreases continuously with the soil depth.

**Key words:** moving load; Timoshenko beam; equivalent ground stiffness; critical velocity; ground displacement

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (51778303); The National Natural Science Foundation of China (Key Program) (51538009)