

一维六方压电准晶中正 n 边形 孔边裂纹的反平面问题*

刘兴伟, 李 星, 汪文帅

(宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021)

摘要: 利用复变函数方法和 Schwarz-Christoffel(SC)变换,构造了保形映射函数,研究了一维六方压电准晶中正 n 边形孔边裂纹的反平面问题,首先由一维六方压电准晶反平面问题的本构方程、平衡方程和几何方程推导得出其控制方程.在电不可导通边界条件下,应用 Cauchy 积分公式,得出任意正 n 边形孔边裂纹尖端附近应力强度因子和电位移强度因子的解析解,并针对 $n = 3, 5, 6$ 时,给出数值算例,可以看出这些特殊情形可退化为已有的结果.研究表明:等效场强度因子 K 的值随着孔边长 a 和裂纹长度 L/a 的增加而增大;孔洞的尺寸对等效场强度因子 K 的影响特别显著,易导致破坏,该文所给结果对计算等效强度因子具有一般性,适用于任意正 n 边形孔边裂纹的求解问题,从而为工程力学、材料的制备和应用等提供了良好的理论依据.

关键词: 一维六方压电准晶; Schwarz-Christoffel 变换; 正 n 边形孔口; 裂纹; 等效强度因子

中图分类号: O357.41

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.400334

引 言

压电材料具有良好的机电耦合效应,在结构监测、精密定位和航空航天等领域已广泛应用^[1].由于压电材料的脆性,在加工、制造和使用过程中会产生各种缺陷(如裂纹、位错和孔洞).因此,对于压电材料中含复杂缺陷断裂行为的研究具有重要意义,此方面的工作已取得了丰硕的成果^[2-4].准晶体作为 20 世纪 80 年代发现的一种新型材料^[5-7],坚硬且富有弹性、有非常高的电阻率和相当低的热传导系数等,其应用前景广泛.研究表明,准晶材料也具有压电效应^[8].压电准晶材料是考虑压电效应的准晶材料,从理论上被 Rao 等^[9]和 Altay 等^[10]提出并深入研究,由于其良好的特性,有望成为智能结构中的传感器和执行器.所以对其断裂理论的研究刻不容缓,而且自提出以来,许多学者已经做了大量的研究工作^[11-18].

孔边应力分布问题的研究可追溯到 19 世纪末^[19],对于各类材料中此类问题的研究从未间断^[20-21],尤其是孔边切口或裂纹的应力分布问题也是具有实际意义的热点问题^[22-25].近年

* 收稿日期: 2019-11-06; 修订日期: 2020-05-12

基金项目: 国家自然科学基金(11561055;11762017;11762016)

作者简介: 刘兴伟(1993—),男,硕士生(E-mail: nxu0258@163.com);

汪文帅(1980—),男,博士(通讯作者. E-mail: wws@nxu.edu.cn).

引用格式: 刘兴伟,李星,汪文帅.一维六方压电准晶中正 n 边形孔边裂纹的反平面问题[J].应用数学和力学,2020,41(7):713-724.

来,许多学者也研究了准晶或压电准晶中孔边切口或裂纹问题.利用复变函数方法和保角映射技术,Yang 和 Li 等^[26-27]研究了一维六方压电准晶中圆孔边含三条裂纹和周期裂纹的反平面问题.Yu 等^[28]用复变函数结合 Stroh 公式研究了一维六方压电准晶体中椭圆孔的应力集中问题,给出了场的解析表达式.采用 Stroh 公式,樊世旺等^[29]研究了一维六方压电准晶三角形孔边裂纹的反平面问题.白巧梅等^[30]研究了一维六方压电准晶中正六边形孔边裂纹的反平面问题.Guo 等^[31]研究了一维六方准晶中椭圆孔含有 4 条裂纹的解析解问题.

但是,我们注意到,针对压电准晶材料中孔边切口或裂纹的研究相对较少,且大多研究都针对比较单一的模型,局限于少数孔口形状,如圆形、椭圆形、正三角形、规则四边形等,没有能够提供一般性的求解方法.本文针对压电准晶体中孔边裂纹问题进行了研究,利用复变函数方法和 SC 变换^[25]技术,构造了新的映射函数,将物理平面上正 n 边形孔边裂纹外部区域映射到像平面的单位圆内部.应用 Cauchy 积分公式,得到了裂纹尖端处声子场应力、相位子场应力和电位移强度因子的解析解,并给出了随着孔洞尺寸和裂纹长度的变化对场强度因子的影响规律,这与文献[29-30]得到的相关结果一致.与前述结果相比,本文结果更具有—般性,结合 SC 变换的复变函数方法,理论上适用任意正多边形孔口含裂纹的情形,因此该方法也具有普适性,从而为工程力学、材料的制备和应用等提供了良好的理论依据.

1 一维六方压电准晶基本方程

以原点为中心,建立直角坐标系,令 x_3 方向为一维六方压电准晶的准周期方向,平面 x_1Ox_2 为周期平面.当—维六方压电准晶中的缺陷沿 x_3 方向穿透时,材料的几何性质将不随准周期方向改变.此时,相应的弹性问题可以分解为各向同性晶体的平面应变问题^[32],和声子场与相位子场耦合的反平面问题^[7].本文考虑反平面问题,则考虑压电效应下一维六方准晶在 x_1Ox_2 平面内的基本方程如下:

本构方程

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{32} + R_3\omega_2 - e_{15}^1E_2, \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3\omega_1 - e_{15}^1E_1, \\ H_1 = 2R_3\varepsilon_{31} + K_2\omega_1 - e_{15}^2E_1, \\ H_2 = 2R_3\varepsilon_{32} + K_2\omega_2 - e_{15}^2E_2, \\ D_1 = 2e_{15}^1\varepsilon_{31} + e_{15}^2\omega_1 + \epsilon_{11}E_1, \\ D_2 = 2e_{15}^1\varepsilon_{32} + e_{15}^2\omega_2 + \epsilon_{11}E_2; \end{cases} \quad (1)$$

平衡方程

$$\begin{cases} \partial_1\sigma_{31} + \partial_2\sigma_{32} = 0, \\ \partial_1H_1 + \partial_2H_2 = 0, \\ \partial_1D_1 + \partial_2D_2 = 0; \end{cases} \quad (2)$$

几何方程

$$\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{j3} = \frac{1}{2} \partial_j u_3, \quad \omega_j = \partial_j \omega, \quad E_j = -\partial_j \phi, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

式(1)~(3)中, $\partial_j u_3 = \partial u_3 / \partial x_j$, σ_{ij} , ε_{ij} 和 u_3 分别为声子场的应力、应变和位移分量; H_j , ω_j 和 ω 分别为相位子场的应力、应变和位移分量; D_j 和 E_j 分别为电位移和电场分量; ϕ 表示电势; C_{44} 和 K_2 分别为声子场和相位子场弹性常数; R_3 是声子场和相位子场耦合的独立弹性常数; e_{15}^1 ,

e_{15}^2 为压电常数; ϵ_{11} 为介电常数.

由式(1)~(3)得控制方程:

$$\mathbf{A}\nabla^2\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 是 Laplace 算子, 以及

$$\mathbf{U} = [u_3, \omega, \phi]^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{44} & R_3 & e_{15}^1 \\ R_3 & K_2 & e_{15}^2 \\ e_{15}^1 & e_{15}^2 & -\epsilon_{11} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

因为 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 则式(4)可写为

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 \omega = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0. \quad (6)$$

根据复变函数理论可知^[33], 式(6)可以转化为求解 3 个调和函数, 将 u_3, ω, ϕ 分别表示为 3 个解析函数的实部, 则

$$u_3 = \operatorname{Re} \varphi_1(z), \quad \omega = \operatorname{Re} \varphi_2(z), \quad \phi = \operatorname{Re} \varphi_3(z), \quad (7)$$

其中 $z = x_1 + ix_2$, $i = \sqrt{-1}$, $\varphi_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) 是 3 个待求解的解析函数, Re 表示实部.

根据解析函数的性质和 Cauchy-Riemann 方程, 由式(1)、(3)和(7)得

$$\begin{cases} \sigma_{31} - i\sigma_{32} = C_{44}\varphi_1' + R_3\varphi_2' + e_{15}^1\varphi_3', \\ H_1 - iH_2 = R_3\varphi_1' + K_2\varphi_2' + e_{15}^2\varphi_3', \\ D_1 - iD_2 = e_{15}^1\varphi_1' + e_{15}^2\varphi_2' - \epsilon_{11}\varphi_3', \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{dz}, \quad i = 1, 2, 3.$$

对于任意复函数 $g(t)$, 有 $\operatorname{Im}g(t) = (g - \bar{g})/(2i)$, 其中 $\overline{(\cdot)}$ 表示复数的共轭, 则式(8)可写为

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \sigma_{32} = -\frac{1}{2i} [C_{44}(\varphi_1' - \overline{\varphi_1'}) + R_3(\varphi_2' - \overline{\varphi_2'}) + e_{15}^1(\varphi_3' - \overline{\varphi_3'})], \\ H_2 = -\frac{1}{2i} [R_3(\varphi_1' - \overline{\varphi_1'}) + K_2(\varphi_2' - \overline{\varphi_2'}) + e_{15}^2(\varphi_3' - \overline{\varphi_3'})], \\ D_2 = -\frac{1}{2i} [e_{15}^1(\varphi_1' - \overline{\varphi_1'}) + e_{15}^2(\varphi_2' - \overline{\varphi_2'}) - \epsilon_{11}(\varphi_3' - \overline{\varphi_3'})]. \end{cases} \quad (9)$$

在给定边界和初始条件下可以求出 φ_i , 则进一步可以确定应力场和电位移场.

2 正 n 边形孔边裂纹问题

在无限大一维六方压电准晶中包含一裂纹的正 n 边形孔口, 孔口的边长为 a , 沿 x_1 方向有长度为 L 的裂纹, 并沿准周期方向穿透, 如图 1 所示, 给出了正十边形含裂纹的模型. 假设压电准晶体在无穷远处受到沿准周期方向的纵向剪切应力 τ , 以及面内电载荷 D_0 的作用.

由线弹性理论可知, 此问题可以转化为压电准晶体在无穷远处不受力, 只在正 n 边形孔口及裂纹面上受到纵向剪应力和电载荷的作用: $\sigma_{32} = -\tau_1, H_2 = -\tau_2, D_2 = -D_0$. 本文主要研究构造保形映射方法的有效性, 所以仅考虑电不可导通边界条件, 可写为

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty : \sigma_{32} = 0, \quad H_2 = 0, \quad D_2 = 0, \\ (x_1, x_2) \in N : \sigma_{32} = -\tau_1, \quad H_2 = -\tau_2, \quad D_2 = -D_0, \end{cases} \quad (10)$$

其中 N 表示孔口裂纹的边界. 将式(9)代入式(10)得

$$\begin{cases} C_{44}(\varphi'_1 - \overline{\varphi'_1}) + R_3(\varphi'_2 - \overline{\varphi'_2}) + e_{15}^1(\varphi'_3 - \overline{\varphi'_3}) = 2\tau_1 i, \\ R_3(\varphi'_1 - \overline{\varphi'_1}) + K_2(\varphi'_2 - \overline{\varphi'_2}) + e_{15}^2(\varphi'_3 - \overline{\varphi'_3}) = 2\tau_2 i, \\ e_{15}^1(\varphi'_1 - \overline{\varphi'_1}) + e_{15}^2(\varphi'_2 - \overline{\varphi'_2}) - \epsilon_{11}(\varphi'_3 - \overline{\varphi'_3}) = 2D_0 i. \end{cases} \quad (11)$$

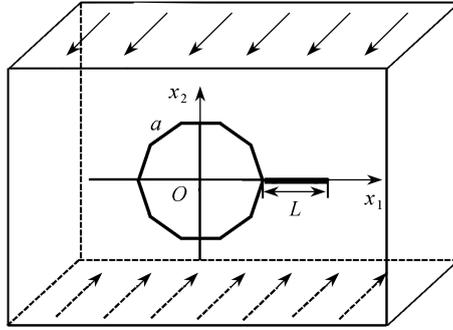


图1 无限大一维六方压电准晶中带裂纹的正十边形孔口

Fig. 1 The regular decagon hole with a crack in an infinite 1D hexagonal quasicrystal

为了将 z 平面上正 n 边形孔外部区域映射到 z_1 平面单位圆的外部区域, 下面给出 SC 变换的映射函数:

$$z = \omega(z_1) = R \int_1^{z_1} \prod_{j=1}^n (t - a_j)^{\alpha_j - 1} dt + C_1, \quad (12)$$

其中, 常数 R 和 C_1 分别为正 n 边形的形状系数和位置系数. 将 z_1 平面上的无穷远点变换为 z 平面的无穷远点, 则 $C_1 = 0$. 这里 n 表示正 n 边形的边数, a_j 是与正 n 边形对应的顶点, $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 表示外角除以 π 的实常数, 则

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = n + 2.$$

将 a_j 和 α_j 代入式(12)中, 得到正 n 边形外部区域到单位圆孔外部区域的映射函数, 将式(12)展开成级数形式^[34], 有

$$z = \omega(z_1) = R(z_1 + c_1 z_1^{1-n} + c_2 z_1^{1-2n} + \dots + c_k z_1^{1-kn}), \quad (13)$$

其中

$$c_1 = \frac{2}{n(n-1)}, c_2 = \frac{n-2}{n^2(2n-1)}, \dots, c_k = \sum_{j=3}^k \frac{\prod_{j=2}^k (j-1)n-2}{(k!/2)n^k(kn-1)},$$

这里 R 是与 a 的平方长度相关的常数.

当 n 分别为 3, 4, 6 时, 代入式(13)所得变换分别与文献[29-30, 35]所得变换一致.

为了便于求解, 将含有裂纹圆的外部变换到圆的内部, 则得到图1所示正 n 边形孔外部区域保角映射到单位圆内部的复合保形映射. 图2给出了保角映射的简要过程, 这里 z_1 平面上圆的边界及裂纹的上岸和下游变换到 ζ 平面上圆的部分边界.

由式(12)和(13)得复合保形映射为

$$z = \omega(\zeta) = R(\mu(\zeta) + c_1 \mu^{1-n}(\zeta) + c_2 \mu^{1-2n}(\zeta) + \dots + c_k \mu^{1-kn}(\zeta)), \quad (14)$$

其中 $\mu(\zeta)$ 是将圆孔及裂纹外部区域变换到单位圆内部的映射函数^[36]:

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{4\zeta} \{ \varepsilon(1 + \zeta)^2 + (1 - \zeta)^2 + ((\varepsilon^2 - 1)(1 + \zeta)^4 + 2(\varepsilon + 1)(1 - \zeta^2)^2)^{1/2} \}, \quad (15)$$

这里 ε 为一实参数, 记为

$$\varepsilon = \frac{1 + l + (1 + l)^{-1}}{2}, \quad (16)$$

式中 l 为 z_1 平面的裂纹长度, 可由点的对应关系得到

$$d + L = R[(1 + l) + c_1(1 + l)^{1-n} + c_2(1 + l)^{1-2n} + \dots + c_k(1 + l)^{1-kn}], \quad (17)$$

这里 d 为正 n 边形中心到顶点的距离, 由对应关系, 有 $z_1 = d + L = \omega(1)$. 令

$$\psi_i(\zeta) = \varphi_i(z) = \varphi_i(\omega(\zeta)), \quad i = 1, 2, 3,$$

则有

$$\varphi'_i(z) = \frac{\psi'_i(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (18)$$

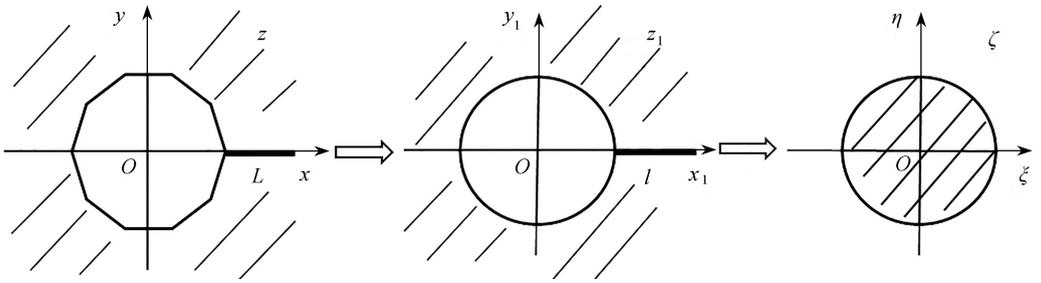


图2 保角映射原理图

Fig. 2 Schematic diagram of the conformal mapping

将式(18)代入式(11), 对单位圆上任一点 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$, 有

$$\begin{cases} \eta_1 + \frac{R_3}{C_{44}} \eta_2 + \frac{e_{15}^1}{C_{44}} \eta_3 = \frac{2\tau_1 i}{C_{44}} \omega'(\sigma), \\ \frac{R_3}{K_2} \eta_1 + \eta_2 + \frac{e_{15}^2}{K_2} \eta_3 = \frac{2\tau_2 i}{K_2} \omega'(\sigma), \\ \frac{e_{15}^1}{\epsilon_{11}} \eta_1 + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} \eta_2 - \eta_3 = \frac{2D_0 i}{\epsilon_{11}} \omega'(\sigma), \end{cases} \quad (19)$$

这里已令 $\eta_i = \psi'_i(\sigma) - \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi'_i(\sigma)}$, $i = 1, 2, 3$.

记 ζ 为单位圆内任意一点, 将式(19)两端同乘以 $(d\sigma/(\sigma - \zeta))/(2\pi i)$, 沿边界 ℓ 积分, 由 Cauchy 积分公式得

$$\begin{cases} \psi'_1(\zeta) + \frac{R_3}{C_{44}} \psi'_2(\zeta) + \frac{e_{15}^1}{C_{44}} \psi'_3(\zeta) = \frac{2\tau_1 i}{C_{44}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \frac{R_3}{K_2} \psi'_1(\zeta) + \psi'_2(\zeta) + \frac{e_{15}^2}{K_2} \psi'_3(\zeta) = \frac{2\tau_2 i}{K_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \frac{e_{15}^1}{\epsilon_{11}} \psi'_1(\zeta) + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} \psi'_2(\zeta) - \psi'_3(\zeta) = \frac{2D_0 i}{\epsilon_{11}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \end{cases} \quad (20)$$

对方程(14)关于 ζ 求微分,得

$$\omega'(\zeta) = R\mu'(\zeta) [1 + c_1(1-n)\mu^{-n}(\zeta) + c_2(1-2n)\mu^{-2n}(\zeta) + \dots + c_k(1-kn)\mu^{-kn}(\zeta)], \quad (21)$$

其中

$$\mu'(\zeta) = \frac{\zeta^2 - 1}{4\zeta^2} \left[\varepsilon + 1 + \frac{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \zeta)^2 + 2(\varepsilon + 1)(1 + \zeta^2)}{\varepsilon(1 + \zeta)^2 + (1 - \zeta)^2 + ((\varepsilon^2 - 1)(1 + \zeta)^4 + 2(\varepsilon + 1)(1 - \zeta^2)^2)^{1/2}} \right].$$

利用复变函数和留数定理,得出式(20)右端的积分为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \omega'(\zeta) + \frac{R}{2\zeta^2}(\varepsilon + 1) = F(\zeta). \quad (22)$$

将式(22)代入式(20),再利用式(18)得

$$\begin{cases} \varphi'_1(\zeta) = 2i \frac{\Lambda_1 F(\zeta)}{\Lambda \omega'(\zeta)}, \\ \varphi'_2(\zeta) = 2i \frac{\Lambda_2 F(\zeta)}{\Lambda \omega'(\zeta)}, \\ \varphi'_3(\zeta) = 2i \frac{\Lambda_3 F(\zeta)}{\Lambda \omega'(\zeta)}, \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} \Lambda = C_{44}(e_{15}^2)^2 - 2e_{15}^1 e_{15}^2 R_3 + K_2(e_{15}^1)^2 - R_3^2 \varepsilon_{11} + C_{44} \varepsilon_{11} K_2, \\ \Lambda_1 = e_{15}^1 K_2 D_0 + (e_{15}^2)^2 \tau_1 + \varepsilon_{11} K_2 \tau_1 - R_3 \varepsilon_{11} \tau_2 - R_3 e_{15}^2 D_0 - e_{15}^1 e_{15}^2 \tau_2, \\ \Lambda_2 = (e_{15}^1)^2 \tau_2 + C_{44} \varepsilon_{11} \tau_2 - R_3 \varepsilon_{11} \tau_1 + C_{44} e_{15}^2 D_0 - e_{15}^1 e_{15}^2 \tau_1 - e_{15}^1 R_3 D_0, \\ \Lambda_3 = R_3^2 D_0 + e_{15}^1 K_2 \tau_1 - R_3 e_{15}^1 \tau_2 - R_3 e_{15}^2 \tau_1 + C_{44} e_{15}^2 \tau_2 - C_{44} K_2 D_0. \end{cases}$$

再将式(23)代入式(9)得到 z 平面内各场的表达式.

3 场强度因子

在电不可导通边界条件下,由文献[7]可知,在 z 平面内裂纹尖端 $z = d + L$ 处,对应 ζ 平面内 $\zeta = 1$ 处声子场、相位子场应力和电位移强度因子分别为

$$[K_{\text{III}}^\sigma, K_{\text{III}}^H, K_{\text{III}}^D]^\text{T} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} 2\sqrt{\pi} \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} [\tau_1, \tau_2, D_0]^\text{T}, \quad (24)$$

这里

$$F(1) = \omega'(1) + \frac{R}{2}(\varepsilon + 1), \quad (25)$$

以及

$$\omega'(1) = R\mu'(1) [1 + c_1(1-n)\mu^{-n}(1) + c_2(1-2n)\mu^{-2n}(1) + \dots + c_k(1-kn)\mu^{-kn}(1)], \quad (26)$$

$$\mu(1) = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad \mu'(1) = 0. \quad (27)$$

将式(25)~(27)代入式(24)得正 n 边形孔边裂纹尖端附近的场强度因子:

$$[K_{\text{III}}^\sigma, K_{\text{III}}^H, K_{\text{III}}^D]^\text{T} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \sqrt{\pi} R \frac{\varepsilon + 1}{\sqrt{\omega''(1)}} [\tau_1, \tau_2, D_0]^\text{T}, \quad (28)$$

其中

$$\omega''(1) = R\mu''(1) [1 + c_1(1-n)\mu^{-n}(1) + c_2(1-2n)\mu^{-2n}(1) + \dots + c_k(1-kn)\mu^{-kn}(1)], \quad (29)$$

$$\mu''(1) = \frac{(\varepsilon + 1)(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2}{2(\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}. \quad (30)$$

再将场强度因子无量纲化,式(28)除以 $\sqrt{\pi L'}[\tau_1, \tau_2, D_0]^T$ 得到正 n 边形孔边裂纹尖端等效场强度因子:

$$K = \frac{R(\varepsilon + 1)}{\sqrt{L'\omega''(1)}}, \quad (31)$$

其中 $L' = (h + L)/2$. 当 n 为奇数时, h 为正 n 边形的高; 当 n 为偶数时, h 为正 n 边形两顶点之间的最大距离.

于是式(28)简化为

$$[K_{\text{III}}^\sigma, K_{\text{III}}^H, K_{\text{III}}^D]^T = K\sqrt{\pi L'}[\tau_1, \tau_2, D_0]^T, \quad (32)$$

其中 K 见式(31).

为了便于工程应用,针对几个特殊的情形 $n = 3, 4, 5, 6$, 给出等效强度因子 K 的具体表达式. 为此引入记号 $\mu_1 = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, 则计算结果如下.

当 $n = 3$ 时,式(31)退化为一维六方压电准晶含正三角形孔边裂纹的等效场强度因子:

$$K = \frac{6\mu_1^2\sqrt{R(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}}{\sqrt{(9\mu_1^6 + 6\mu_1^3 - 1)(\sqrt{3}a/2 + L)}}. \quad (33)$$

这与文献[29]所得结果一致.

当 $n = 4$ 时,式(31)退化为一维六方压电准晶含正方形孔边裂纹的等效场强度因子:

$$K = \frac{8\mu_1^5\sqrt{2R(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}}{\sqrt{(16\mu_1^{12} - 8\mu_1^8 - 2\mu_1^4 - 1)(\sqrt{2}a + L)}}. \quad (34)$$

当 $n = 5$ 时,式(31)退化为一维六方压电准晶含正五边形孔边裂纹的等效场强度因子:

$$K = \frac{10\sqrt{5R(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}\mu_1^{13}}{\sqrt{(125\mu_1^{15} - 50\mu_1^{10} - 15\mu_1^5 - 8)(1.86a + L)}}. \quad (35)$$

当 $n = 6$ 时,式(31)退化为一维六方压电准晶含正六边形孔边裂纹的等效场强度因子:

$$K = \frac{18\mu_1^8\sqrt{R(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - 1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}}{\sqrt{(81\mu_1^{18} - 27\mu_1^{12} - 9\mu_1^6 - 1)(2a + L)}}. \quad (36)$$

4 数值算例和分析

当 $n = 3$ 时,即退化为一维六方压电准晶中正三角形孔边裂纹的反平面问题.此时,等效场强度因子 K 可用于确定正三角形孔边裂纹的场强度因子.由式(30)可知,等效场强度因子与正三角形的边长和裂纹长度有关.引入无量纲参数 L/a (裂纹长度和边长之比)来表征裂纹尺寸,下面的数值计算可以更加直观地看出几何参数对等效场强度因子的影响规律.

图 3 给出了当 $a = 0.03, 0.04, 0.05$ m 时, 等效场强度因子 K 随裂纹长度 L/a 的变化关系曲线, 可以看出, 等效场强度因子 K 的值随着裂纹长度 L/a 的增大而增大, 然后趋于定值, 说明正三角形裂纹尺寸对等效场强度因子影响较小. 图 4 给出了当 $L/a = 0.01, 0.05, 0.10$ 时, 等效场强度因子 K 随孔洞边长 a 的变化关系曲线, 结果显示等效场强度因子 K 的值随着孔洞边长 a 的增大而增大, 具有明显增长趋势, 说明孔洞的尺寸对等效场强度因子 K 的影响特别显著, 很容易使材料产生损坏. 这与文献[29]的结果一致.

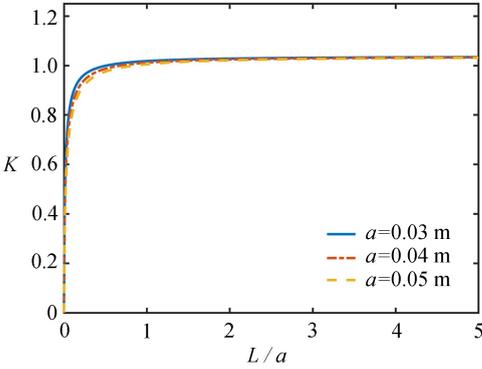


图 3 等效场强度因子 K 随 L/a 的变化关系
Fig. 3 Variation of K with L/a

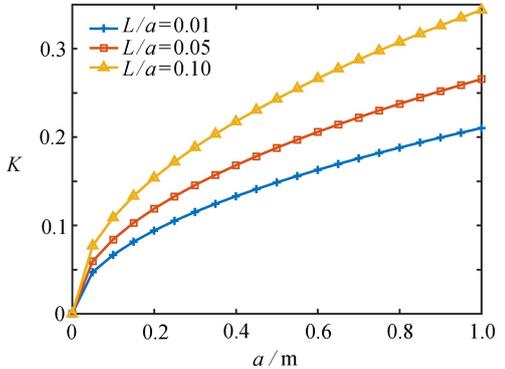


图 4 等效场强度因子 K 随 a 的变化关系
Fig. 4 Variation of K with a

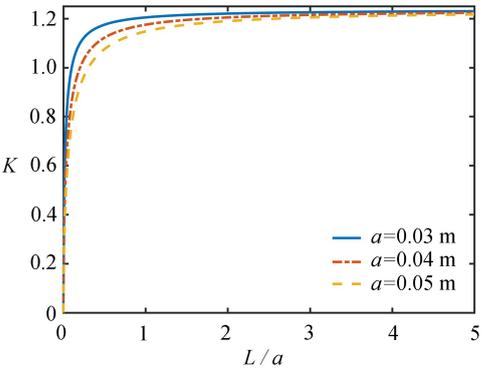


图 5 等效场强度因子 K 随 L/a 的变化关系
Fig. 5 Variation of K with L/a

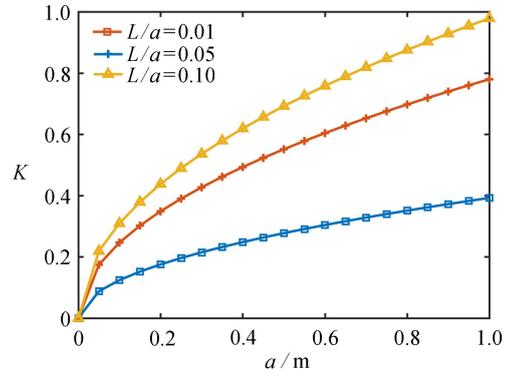


图 6 等效场强度因子 K 随 a 的变化关系
Fig. 6 Variation of K with a

当 $n = 5$ 时, 即退化为一维六方压电准晶中正五形孔边裂纹的反平面问题.

图 5 和图 6 分别给出了等效场强度因子 K 随裂纹长度和孔洞边长的变化关系. 可以看出, 等效场强度因子 K 的值随着裂纹长度 L/a 的增大而增大, 然后趋于一个稳定的常数, 表明裂纹扩展到一定程度后对等效场强度因子影响很小; 等效场强度因子 K 的值随着孔洞边长 a 的增大而增大, 增长趋势明显, 说明孔洞的尺寸对等效场强度因子 K 的影响特别显著, 很容易使材料产生损坏.

当 $n = 6$ 时, 即退化为一维六方压电准晶中正六边形孔边裂纹的反平面问题. 图 7 给出了当 $a = 0.03, 0.04, 0.05$ m 时, 等效场强度因子 K 随裂纹长度 L/a 的变化关系曲线, 可以看出, 等效场强度因子 K 的值随着裂纹长度 L/a 的增大而增大, 然后逐渐趋于平稳. 图 8 给出了当 $L/a = 0.01, 0.05, 0.10$ 时, 等效场强度因子 K 随边长 a 的变化关系曲线, 显示出等效场强度因子 K

的值随着边长 a 的增大而增大, 上升趋势明显, 说明孔洞的尺寸对等效场强度因子 K 的影响特别显著, 很容易使材料产生损坏. 这与文献[30]的结果一致。

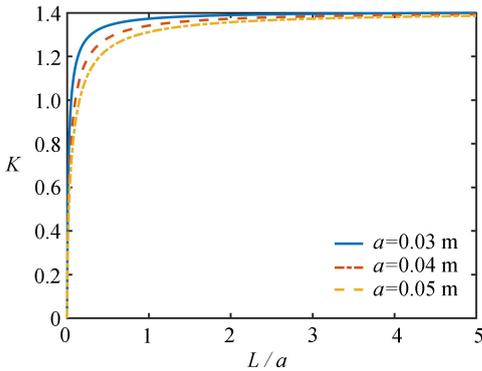


图7 等效场强度因子 K 随 L/a 的变化关系

Fig. 7 Variation of K with L/a

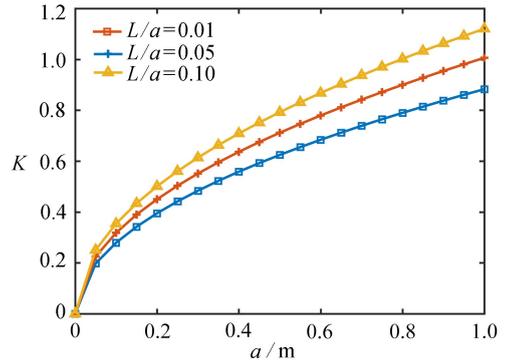


图8 等效场强度因子 K 随 a 的变化关系

Fig. 8 Variation of K with a

5 结 论

本文在电不可导通边界条件下, 利用复变函数方法和 SC 变换技术, 构造了新的映射函数, 研究了在无限大一维六方压电准晶中正 n 边形孔边裂纹的反平面问题. 应用 Cauchy 积分公式, 给出了裂纹尖端处声子场应力、相位子场应力和电位移强度因子的解析解. 数值结果也表明, 等效场强度因子 K 的值随着裂纹长度 L/a 的增大而增大, 然后逐渐趋于平稳. 等效场强度因子 K 的值随着孔洞边长 a 的增大而增大, 而且增长趋势明显, 说明孔洞的尺寸对等效场强度因子 K 的影响特别显著, 很容易使材料产生损坏, 这与文献[29-30]的相关结果一致, 从而为工程材料的制备和应用提供了良好的理论依据。

参考文献 (References):

- [1] VALDOVINOS J. Pediatric mechanical circulatory support applications for frequency-leveraged piezoelectric hydraulic pumps[D]. PhD Thesis. Los Angeles: University of California, 2014.
- [2] WANG Y J, GAO C F. The mode III cracks originating from the edge of a circular hole in a piezoelectric solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(16): 4590-4599.
- [3] WANG Y J, GAO C F, SONG H. The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material[J]. *Mechanics Research Communications*, 2015, **65**: 17-23.
- [4] GHERROUS M, FERDJANI H. Analysis of a Griffith crack at the interface of two piezoelectric materials under anti-plane loading[J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2016, **28**(6): 1683-1704.
- [5] SHECHTMAN D G, BLECH I A, GRATIAS D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. *Physical Review Letters*, 1984, **53**(20): 1951-1953.
- [6] LI L H, FAN T Y. Exact solutions of two semi-infinite collinear cracks in a strip of one dimensional hexagonal quasicrystal[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **196**(1): 1-5.

- [7] FAN T Y. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*[M]. Berlin: Springer, 2011.
- [8] HU C Z, WANG R H, DING D H, et al. Piezoelectric effects in quasicrystals[J]. *Physical Review B*, 1997, **56**(5) : 2463-2468.
- [9] RAO K R M, RAO P H, CHAITANYA B S K. Piezoelectricity in quasicrystals: a group-theoretical study[J]. *Pramana: Journal of Physics*, 2007, **68**(3) : 481-487.
- [10] ALTAY G, DÖKMECI M C. On the fundamental equations of piezoelectricity of quasicrystal media [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, **49**(23/24) : 3255-3262.
- [11] LI X Y, LI P D, WU T H, et al. Three-dimensional fundamental solutions for one-dimensional hexagonal quasicrystal with piezoelectric effect[J]. *Physics Letters A*, 2014, **378**(10) : 826-834.
- [12] ZHANG L L, ZHANG Y M, GAO Y. General solutions of plane elasticity of one-dimensional orthorhombic quasicrystals with piezoelectric effect [J]. *Physics Letters A*, 2014, **378**(37) : 2768-2776.
- [13] GUO J H, PAN E. Three-phase cylinder model of 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal composites[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2016, **83**(8) : 081007.
- [14] YU J, GUO J H, PAN E, et al. General solutions of plane problem in one-dimensional quasicrystal piezoelectric materials and its application on fracture mechanics [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2015, **36**(6) : 793-814.
- [15] FAN T Y, LI X F, SUN Y F. A moving screw dislocation in a one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, 1999, **8**(4) : 288-295.
- [16] LI X, HUO H S, SHI P P. Analytic solutions of two collinear fast propagating cracks in a symmetrical strip of one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2014, **35**(2) : 1-7.
- [17] TUPHOLME G E. A non-uniformly loaded anti-plane crack embedded in a half-space of a one-dimensional piezoelectric quasicrystal[J]. *Meccanica*, 2018, **53**(4/5) : 973-983.
- [18] ZHOU Y B, LI X F. Two collinear mode-III cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal strip[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, **189**: 133-147.
- [19] KIRSCH G. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre[J]. *Zentralblatt Verlin Deutscher Ingenieure*, 1898, **42**(29) : 797-807.
- [20] UKADGAONKER V G, AWASARE P J. A novel method of stress analysis of an infinite plate with circular hole with uniform loading at infinity[J]. *Indian Journal of Science and Technology*, 1993, **31**: 539-541.
- [21] WANG W S, YUAN H T, LI X, et al. Stress concentration and damage factor due to central elliptical hole in functionally graded panels subjected to uniform tensile traction[J]. *Materials*, 2019, **12**(3) : 422.
- [22] UKADGAONKER V G, AWASARE P J. A novel method of stress analysis of an infinite plate with rounded corners of a rectangular hole under uniform edge loading[J]. *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*, 1994, **1**: 17-25.
- [23] REZAEPAZH J, JAFARI M. Stress concentration in metallic plates with special shaped cut-out[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, **52**(1) : 96-102.
- [24] DAI L C, GUO W L, WANG X. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(6) : 1818-

- 1831.
- [25] 崔建斌, 姬安召, 熊贵明. 基于 Schwarz-Christoffel 变换的圆形隧道围岩应力分布特征研究 [J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(10): 1089-1098. (CUI Jianbin, JI Anzhao, XIONG Guiming. Research on surrounding rock stress distributions for circular tunnels based on the Schwarz-Christoffel transformation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(10): 1089-1098. (in Chinese))
- [26] YANG J, LI X, DING S H. Anti-plane analysis of a circular hole with three unequal cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2016, **33**(2): 184-198.
- [27] 杨娟, 李星, 周跃亭. 一维六方压电准晶中圆孔边周期裂纹分析 [J]. 振动与冲击, 2019, **38**(18): 62-71. (YANG Juan, LI Xing, ZHOU Yueting. Analysis of periodic cracks emanating from a circular hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38**(18): 62-71. (in Chinese))
- [28] YU J, GUO J H, XING Y M. Complex variable method for an anti-plane elliptical cavity of one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, **28**(4): 1287-1295.
- [29] 樊世旺, 郭俊宏. 一维六方压电准晶三角形孔边裂纹反平面问题 [J]. 应用力学学报, 2016, **33**(3): 421-426. (FAN Shiwang, GUO Junhong. Anti-plane problem of an edge crack emanating from a triangle hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, **33**(3): 421-426. (in Chinese))
- [30] 白巧梅, 丁生虎. 一维六方准晶中正六边形孔边裂纹的反平面问题 [J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(10): 1071-1080. (BAI Qiaomei, DING Shenghu. An anti-plane problem of cracks at edges of regular hexagonal holes in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystals [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(10): 1071-1080. (in Chinese))
- [31] GUO J H, LU Z X. Exact solution of four cracks originating from an elliptical hole in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **217**(22): 9397-9403.
- [32] MUSKHELISHVILI N I. *Some Fundamental Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [M]. Moscow: Nauka, 1966.
- [33] 路见可. 平面弹性复变方法 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002. (LU Jianke. *Plane Elastic Complex Method* [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002. (in Chinese))
- [34] SHARMA D S. Stress distribution around polygonal holes [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, **65**(1): 115-124.
- [35] 邵阳, 郭俊宏. 一维六方准晶中正方形孔边双裂纹的反平面问题 [J]. 内蒙古工业大学学报, 2014, **33**(2): 81-87. (SHAO Yang, GUO Junhong. Anti-plane analysis of double cracks originating from a square hole in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Journal of Inner Mongolia University of Technology*, 2014, **33**(2): 81-87. (in Chinese))
- [36] GUO J H, LIU G T. Stress analysis of the problem about a circular hole with asymmetry col-linear cracks [J]. *Journal of Inner Mongolia Normal University*, 2007, **36**(4): 418-422.

The Anti-Plane Problem of Regular n -Polygon Holes With Radial Edge Cracks in 1D Hexagonal Piezoelectric Quasicrystals

LIU Xingwei, LI Xing, WANG Wenshuai

(*School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, P.R.China*)

Abstract: With the complex variable function method and the Schwarz-Christoffel transformation, a conformal mapping function was constructed to address the anti-plane problem of regular n -polygon holes with radial edge cracks in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystals. Firstly, the constitutive equations, equilibrium equations and geometric equations for 1D hexagonal piezoelectric quasicrystals were employed to derive the governing equations subjected to anti-plane loading. Under the electrically nonconductive boundary conditions, the Cauchy integral formula was applied to solve the problem of an arbitrary regular polygon hole with a radial edge crack. The analytical solutions of the stress intensity factor and the electric displacement intensity factor were obtained, and the numerical examples in special cases of $n = 3, 5, 6$ were demonstrated to be consistent with the existing results. The research shows that, the value of the effective intensity factor increases with side length a and crack length L/a . Parameter a has a significant effect on effective field intensity factor K , which is critical to damage. The results are general and suitable for calculating the effective intensity factor of an arbitrary regular polygon hole with a radial edge crack, thereby providing a good theoretical basis for engineering mechanics, material preparation and application.

Key words: 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal; Schwarz-Christoffel transformation; regular n -polygon hole; crack; effective intensity factor

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11561055; 11762017; 11762016)