

重力载荷作用下柔性梁的结构变形与承载力分析*

王 单¹, 王 健²

- (1. 南京航空航天大学 航空学院 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016;
2. 南京工业大学 机械与动力工程学院, 南京 211816)

摘要: 柔性体在承受外载荷作用时,会通过自身变形,降低所承受的外载荷.为了研究重力载荷作用下柔性梁的结构变形与承载力之间的定量关系,首先建立模拟实验分析重力载荷在梁上的分布形式;基于 Timoshenko 梁的大变形本构方程,建立承受重力载荷作用下大变形梁的控制方程;通过量纲分析,确定研究两个无量纲变量,结构变形数与 Cauchy 数;数值求解控制方程,分析结构变形数与 Cauchy 数之间的定量关系;与实验结果对比,证实理论模型的可靠性,并结合文献中树枝承受雪载荷的实验数据,分析模型用于预测实际问题的可行性.所建理论模型可用于机械工程中柔性结构件的变形分析与承载力设计,也可用来预测自然界中风沙、大雪环境下植被的抗倒伏能力.

关键词: 柔性梁; 结构变形; 承载力分析; 大变形控制方程

中图分类号: O39 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410169

Analysis of Deformation and Bearing Capacity of Flexible Beams Under Gravitational Loads

WANG Dan¹, WANG Jian²

- (1. *State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;*
2. *School of Mechanical and Power Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, P.R.China*)

Abstract: The large deformation of flexible structure can decrease the load. The relation between the large deformation of the flexible beam and the gravitational load was studied. Based on the experiments, the distribution mode for the gravitational load was built. With the large deflection constitutive model for Timoshenko beams, the governing equation for the large-deformation beam under the gravitational load was derived. Two dimensionless parameters were defined, i.e. the Cauchy number and the deformation coefficient. Through numerical calculation of the governing equation, the quantitative relation between the Cauchy number and the deformation coefficient was discussed. The theoretical results are compared with the experimental data to confirm the reliability of the theoretical model. The model was used to analyze the snow load data in previous literatures to verify the applicability in reality. The research indicates that, the proposed method applies to the design of deflection and bearing capacity of flexible beams in engineering systems, as well as the prediction of the lodging

* 收稿日期: 2020-06-11; 修订日期: 2020-11-19

基金项目: 国家自然科学基金(11902151);江苏省自然科学基金(BK20180411;BK20190684)

作者简介: 王单(1991—),女,特聘副研究员,博士(通讯作者. E-mail: wangd12@nuaa.edu.cn).

引用格式: 王单,王健.重力载荷作用下柔性梁的结构变形与承载力分析[J].应用数学和力学,2021,42(6):611-622.

resistance of vegetations in sand storm or snow storm.

Key words: flexible beam; deformation; bearing capacity analysis; large deformation governing equation

引 言

自然界中,随风飘扬的杨柳、水中摇晃的水草以及被大雪压弯的树枝,虽是司空见惯的景色,却蕴藏着植物的一种智慧,即利用自身的结构变形来降低所承受的外载^[1-2].在传统的机械工程中,结构大多被设计成刚性,刚性的结构在承受荷载时变形很小,但是相应承受的荷载却较大.受自然界的启发,在变形允许的范围之内,可以考虑用柔性体来代替刚体,从而降低所承受的外载荷.

利用柔性体的结构变形降低外载荷有着广泛的应用.比如 Noyes 等^[3]提出可变形的锥形概念发电机,Zhu 等^[4]通过实验证实了利用可变形性可大幅提升叶片的能量转换;Thiria 等^[5]用弹性机翼代替刚性机翼,证实不仅能大幅度降低消耗功率,而且还能增加推力.研究外载荷对柔性体上的阻力变化对于农业、森林业等领域也有着重要的意义,如理解植物对于强风、暴雪等环境的适应性,农作物的抗倒伏等^[6-8];研究水生植物的水流阻力等,有助于平衡河流生态治理与汛期泄洪^[9-10].

为了研究柔性体的自身变形与阻力间的关系,研究人员进行了大量的实验及理论研究,主要是研究风速、水流等流体载荷对柔性体结构变形的影响.如 Harder 等^[11]对不同水生和陆生植物种类的结构变形效率以及 Vogel 指数进行了收集整理,Vollsinger 等^[12]对不同的硬木树种进行的风动测量.Alben 等^[13-15]研究了纤维在肥皂膜流体中的变形实验,发现纤维上的阻力与流速的平方成正比,同时阻力随着刚度的增大而增大.Silva-Leon 等^[16]和 Zhu^[17]通过数值计算扩展了对柔性体所受黏性流体的阻力研究.Luhar 和 Nepf^[18]研究了水流对于植被的阻力与植被自身变形间的关系,证实了阻力与流速、植物的刚度与浮力之间存在定量关系.Leclercq 等^[19-20]研究了不同形状的植物在风载下的结构变形与阻力之间的关系,并定量描述了 Vogel 指数与风速之间的关系.

前期的文献主要研究了柔性体结构变形与风速、水流等流体载荷之间的关系,但对承受雪、沙等固体载荷的柔性体变形规律尚未展开研究.本文以柔性梁为研究对象,以细小玻璃珠模拟雪、沙等载荷,通过实验观察,将柔性梁上载荷在重力作用下分布形式分为两种:三角形堆垛与梯形堆垛.结合 Timoshenko 梁的大变形本构方程,推导柔性梁在重力载荷作用下的变形控制方程.通过量纲分析,引入结构变形数与 Cauchy 数两个无量纲化变量.通过数值求解,得到两个变量之间的关系.从而建立起柔性梁在重力外载作用下的结构变形与承载力之间的定量关系模型.并通过与实验数据的对比,验证了模型的可靠性.

1 柔性体梁承受重力载荷的理论模型

1.1 模拟实验

为了对实际问题进行理论研究,采取模拟实验,如图 1(a)所示,实验采用了微小的玻璃细珠作为颗粒介质,模拟真实的雪、沙等载荷.玻璃珠的大小均匀且分散,有两种半径:平均半径为 500~600 μm 的大珠和 125~166 μm 的小珠,两者的密度相差不大,分别为 1 540 kg/m^3 和 1 530 kg/m^3 .采用如图 1(b)所示的磨砂纸来模拟柔性梁结构,因为磨砂纸表面有一定的粗糙度,可以保证承受载荷的稳定性.为了测量柔性梁的弹性模量,采用如图 1(c)所示的实验,在梁的末端吊起一定重量的物体,通过记录梁的弯曲曲率,改变悬挂物体的质量,多次实验,即可得到弯矩与曲率之间的定量曲线,根据材料力学的关系,进行拟合,即可算出柔性梁的弯曲刚度,相关实验数据放在附录 A 中.本文选用扭转变形最小的黄色纸片作为实验用纸片,并定义弯曲刚度为 $B = EI/w = 0.012\ 86\ \text{N}\cdot\text{m}$ ^[19].

为了研究玻璃细珠在柔性梁上的堆积分布,首先需要测量玻璃细珠在梁上堆垛的最大摩擦角 α .具体做法是在长方形纸片上将玻璃珠堆垛成一个金字塔形状,通过计算发现其上的重量与板的长 l 、宽 w 和最大摩擦角 α 有以下关系:

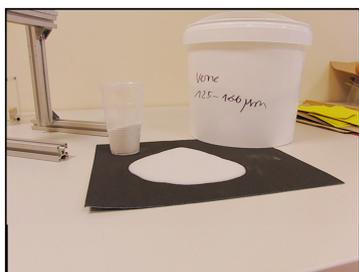
$$m = \frac{1}{4} \rho w^2 \tan(\alpha) \left(l - \frac{w}{3} \right), \quad \frac{l}{w} > 1, \quad (1)$$

$$m = \frac{1}{4} \rho l^2 \tan(\alpha) \left(w - \frac{l}{3} \right), \quad \frac{l}{w} < 1. \quad (2)$$

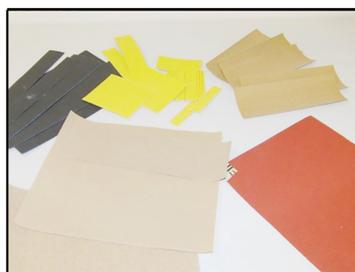
附录 B 中给出特定长宽比下,堆垛的最大重量 m 与长度 l 之间的关系,通过数据拟合,得到半径较大的玻璃珠最大摩擦角 α 为 30.1° ,半径较小的玻璃珠最大摩擦角 α 为 29.1° ,由于结果非常接近,因此忽略珠子的半径大小对实验结果的影响.注意对于不同载荷而言,因内聚力不同,最大摩擦角 α 的值也不同,后续模型中将讨论这一参数的影响.

下面考察载荷在梁上的分布形式(图 1(d)),通过观察发现,由于载荷的分布形式在梁的长度方向是一致的,因此可以将三维问题简化为二维问题来分析.根据梁的长宽比不同,将有两种分布形式,三角形堆垛与梯形堆垛(图 2),荷载在宽度方向上达到的最大高度 h_c 与纸片的宽度 w 、最大摩擦角 α 有以下关系:

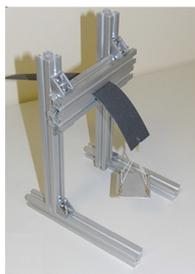
$$h_c = \frac{w}{2} \tan \alpha. \quad (3)$$



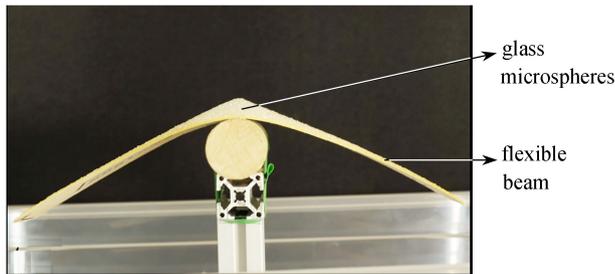
(a) 实验用玻璃细珠,模拟雪、沙等固体载荷
(a) The glass microspheres simulating solid loading like snow and sand



(b) 实验用磨砂纸,模拟柔性梁
(b) Experimental sand paper simulating flexible beams



(c) 测量柔性梁的弹性模量实验
(c) The experiment for testing elastic moduli of flexible beams



(d) 柔性梁上承载重力载荷后的变形与载荷间的关系
(d) The relation between the flexible beam deformation and the gravitational load

图 1 模拟实验

Fig. 1 The simulating experiment

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

1.2 柔性体梁在重力载荷下的变形控制方程

基于 1.1 小节中建立的理论模型(图 2),下面分析柔性体梁在重力载荷作用下的受力与变形.如图 3 所示,弧长 s 是经过梁截面质心的曲线, θ 为变形后弧长 s 处梁截面法向与变形前截面法向的夹角, h 为变形后弧长 s 处梁截面处的载荷高度, m 为梁单位面积的质量.根据 Timoshenko 梁的大变形本构关系^[21-23]:

$$M = EI \frac{\delta\theta}{\delta s}, \quad (4)$$

其中, θ 为变形后弧长 s 处梁截面法向与变形前截面法向的夹角.对弯矩求微分有

$$\frac{dM}{ds} = F_s. \quad (5)$$

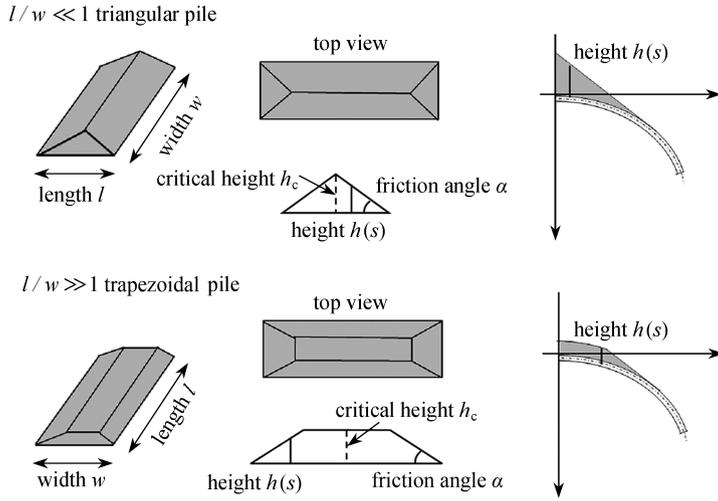


图2 三角形堆垛与梯形堆垛的载荷分布示意图

Fig. 2 The schematic of load distributions for the triangular pile and the trapezoidal pile

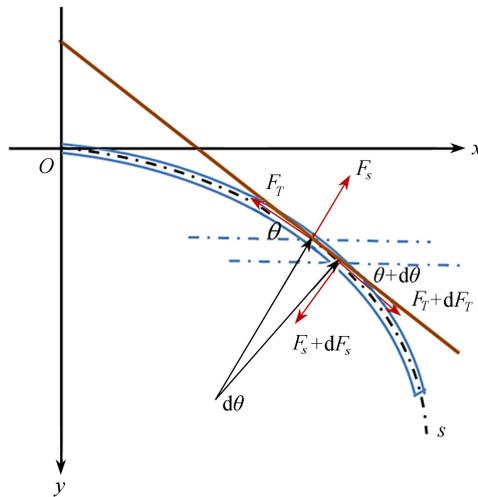


图3 柔性体承受重力载荷作用下的变形与受力图

Fig. 3 The deformation and forces of the flexible beam under the gravitational load

在 x, y 方向, 分别有力的平衡关系:

$$d(F_s \sin \theta) - d(F_T \cos \theta) = 0, \tag{6}$$

$$d(F_s \cos \theta) + d(F_T \sin \theta) = \rho g h dx + mg dx, \tag{7}$$

其中, F_T 为截取微段上沿着弧长切向的力, F_s 为截取微段上沿着弧长法线方向的力, $d(\cdot)$ 为力在截取的微单元内的增量.

dx 与 ds 之间存在几何关系:

$$dx = ds \cos \theta. \tag{8}$$

将式(4)代入式(5)得到

$$F_s = EI \theta''. \tag{9}$$

将式(9)代入式(6)得到

$$F_T = F_s \tan \theta + C = EI \theta'' \tan \theta + C. \tag{10}$$

梁的自由端的边界条件为 $F_s = F_T = 0$, 代入式(10)可以求出常数 $C = 0$, 则式(10)整理得

$$F_T = EI \theta'' \tan \theta. \tag{11}$$

将式(11)代入式(7), 化简之后导出变形梁的平衡控制方程:

$$EI\theta''' + EI\theta''\theta'\tan\theta = \rho gh\cos^2\theta + mg\cos^2\theta = \rho g\left(h + \frac{m}{\rho}\right)\cos^2\theta. \quad (12)$$

通过量纲分析,定义以下无量纲量:

$$t = s/l, H = h/l, C_Y = \frac{\rho gl^4}{EI}, M = \frac{m}{\rho l}. \quad (13)$$

将式(13)代入式(12),可以得到无量纲化的控制方程:

$$\theta''' + \theta''\theta'\tan\theta = C_Y(H(t) + M)\cos^2\theta. \quad (14)$$

注意,通过无量纲化操作,梁的变形 θ 仅与 Cauchy 数 C_Y 、外载高度 $H(t)$ 和自重因子 M 有关。

对于三角形堆垛,外载分布高度 $H(t)$ 与最大摩擦角 α 的关系为

$$\frac{dH}{dT} = \begin{cases} -\tan\alpha\cos\theta + \sin\theta, & \theta < \alpha, \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (15)$$

对于梯形堆垛,存在一个临界高度,即 $h_c = \tan\alpha \cdot w/2$,其中 w 为宽度,此时外载分布高度 $H(t)$ 的函数为

$$\frac{dH}{dT} = \begin{cases} -\tan\alpha\cos\theta + \sin\theta, & \theta < \alpha, h < h_c, \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (16)$$

为了研究结构变形后承受外载荷的改变量,定义柔性梁承受的外载荷重量 W_f 与相同尺度的刚性梁承受外载荷重量 W_r 之比为结构变形数 \mathfrak{R} ,对于三角形堆垛与梯形堆垛的计算公式分别为

$$\mathfrak{R} = \frac{W_f}{(\rho gl^2 \tan\alpha)/2} = \frac{2\int_0^l H(t) dt}{\tan\alpha}, \quad (17)$$

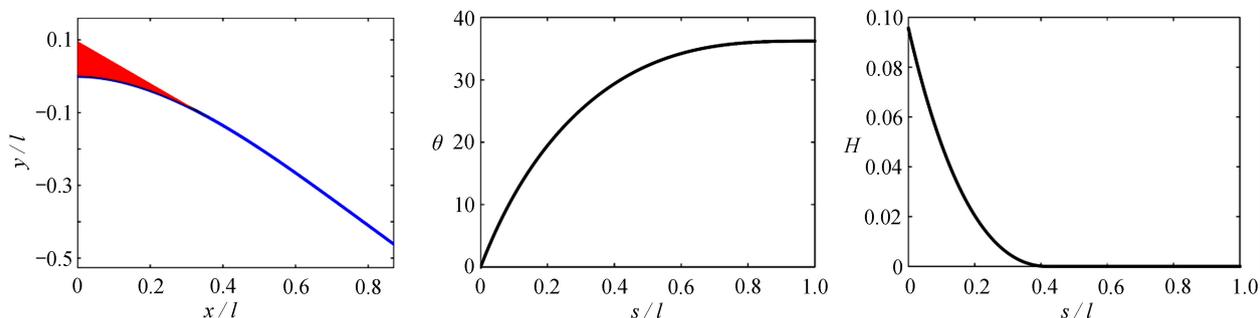
$$\mathfrak{R} = \frac{W_f}{W_r} = \frac{\int_0^l H(t) dt}{h_c(1 - h/\tan\alpha) + h_c \cdot h/(2\tan\alpha)}. \quad (18)$$

通过求解式(14),可以得到结构变形数 \mathfrak{R} 与 Cauchy 数 C_Y 之间的函数关系,从而分析各参数对于变形和承载力的影响。

2 数值求解

2.1 三角型堆垛的结构变形与承载力分析

采用 MATLAB 的 `bvp4c` 函数对式(12)进行数值求解,可以分析摩擦角 α 与梁自重因子 M 、Cauchy 数 C_Y 与结构变形参数 \mathfrak{R} 之间的关系.当载荷呈现三角形堆垛时,边界条件取式(15).如图 4 所示,在一定值的摩擦角 α 、自重因子参数 M 与 Cauchy 数 C_Y 下,通过求解式(12)与式(15),可以画出梁的变形与载荷图(图 4(a))、梁的弯曲转角图(图 4(b))与载荷的高度分布图(图 4(c)).



(a) 梁的变形与梁上载荷

(b) 梁的转角 θ 随坐标变化的分布图

(c) 梁上载荷高度 H 随坐标变化的分布图

(a) The flexible beam deformation and the external load

(b) The distribution of rotation angle θ

(c) The distribution of pile height H

图 4 当 $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$, $C_Y = 1\ 000$ 时,三角形堆垛下柔性梁的变形

Fig. 4 The deformation of the flexible beam under the triangular pile for $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$, $C_Y = 1\ 000$

从图4中可以看出,随着梁的弯曲变形,载荷在梁上的分布高度 H 也逐渐降低,并在一定位置处降为零.与刚性梁相比,柔性梁上承受的载荷显著降低.下面,为了研究梁的变形对载荷变化的影响,通过取一定的摩擦角 α 与自重因子 M ,研究 Cauchy 数 C_Y 与结构变形数 \mathfrak{R} 的关系.对于三角形堆垛,结构变形数 \mathfrak{R} 的计算公式为式(17),变化关系如图5所示.

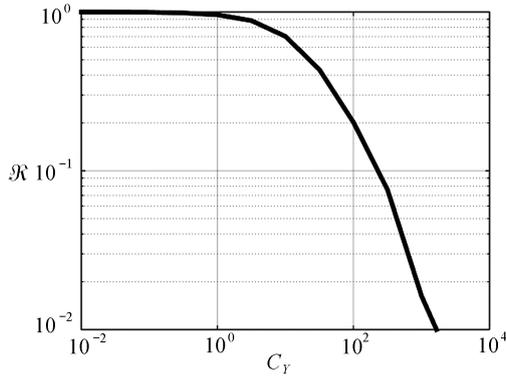


图5 当 $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$ 时,结构变形数 \mathfrak{R} 随 Cauchy 数 C_Y 的变化图

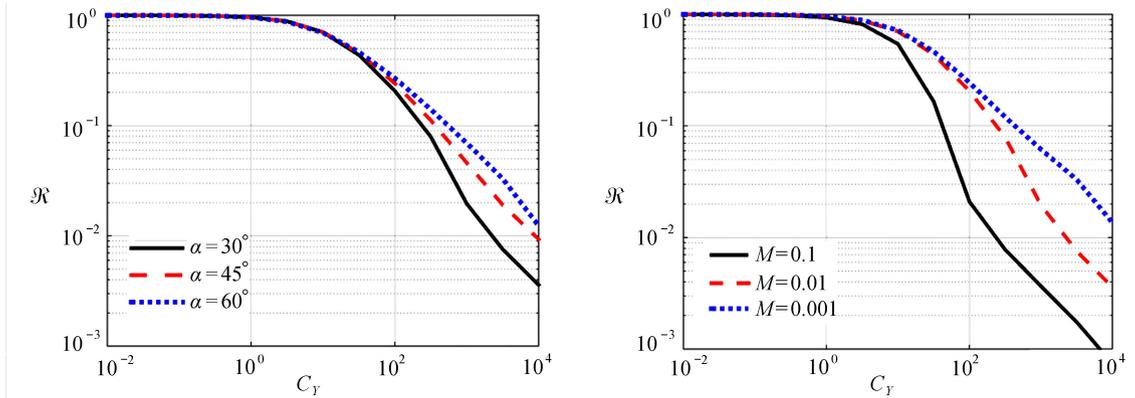
Fig. 5 The variation of reconfiguration number \mathfrak{R} with Cauchy number C_Y for $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$

从图5中可见,当 Cauchy 数 C_Y 较小时, $\mathfrak{R}-C_Y$ 曲线基本平坦,接近于1,因为当梁的弯曲刚度 B 较大, Cauchy 数 C_Y 较小时,梁的变形非常小,因此承受载荷与刚性梁基本相同.随着 Cauchy 数 C_Y 的增大,即随着弯曲刚度 B 的减小,梁的变形也越来越大,所能承受的载荷也越来越小,因此结构变形数 \mathfrak{R} 也减小.当 C_Y 增大到一定值以后(如图中的100), $\mathfrak{R}-C_Y$ 的对数关系曲线近似于一条直线,通过拟合参数得到以下近似关系:

$$\mathfrak{R} = C_Y^{-0.8}. \quad (19)$$

根据式(19),如果已知柔性梁的 Cauchy 数 C_Y 值,可以预测柔性梁所能承受的最大载荷.

注意式(19)是在一定的摩擦角 α 与自重因子 M 下得到的关系式,对于不同的摩擦角 α 与自重因子 M ,对 $\mathfrak{R}-C_Y$ 曲线的影响,如图6所示.



(a) 当 $M = 0.01$ 时,不同摩擦角 α 下 $\mathfrak{R}-C_Y$ 曲线

(a) The $\mathfrak{R}-C_Y$ curves with different friction angles α for $M = 0.01$

(b) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时,不同自重因子 M 下 $\mathfrak{R}-C_Y$ 曲线

(b) The $\mathfrak{R}-C_Y$ curves with different gravitational factors M for $\alpha = 30^\circ$

图6 摩擦角 α 与自重因子 M 对 $\mathfrak{R}-C_Y$ 曲线的影响

Fig. 6 The effects of friction angle α and gravitational factor M on $\mathfrak{R}-C_Y$ curves

从图6(a)中可以看出,当 Cauchy 数 C_Y 较小时,即梁变形较小时,摩擦角 α 的影响不明显.但是当 C_Y 超过100时,随着摩擦角 α 的增大,相同 Cauchy 数下的结构变形数 \mathfrak{R} 越大,即重力载荷的摩擦角越大,梁弯曲带来的载荷降低幅度越小.但是从图6(a)中也可以看出,摩擦角对载荷降低幅度的影响并不显著.在图6(b)中,当 Cauchy 数 C_Y 取较小值时,梁的自重因子 M 对结构变形数已有影响.这是因为当梁的自重因子 M 发生改变,梁在自重作用下会发生弯曲.而随着 Cauchy 数 C_Y 的增大,自重因子 M 越大的柔性梁,梁的弯曲程度越

大,因弯曲带来的结构变形数 \mathfrak{R} 也越小。

2.2 梯型堆垛的结构变形与承载力分析

当梁的长宽比远大于 1 时,与三角形堆垛不同,梯型堆垛形式下载荷会有一个临界高度 h_c , 载荷分布的边界条件为式(16),求解过程与 2.1 小节相似。图 7 展示了取一定值的 Cauchy 数、摩擦角、长宽比与自重因子下,梁的变形与载荷分布(图 7(a))、梁的弯曲转角(图 7(b))与载荷的高度分布(图 7(c))。

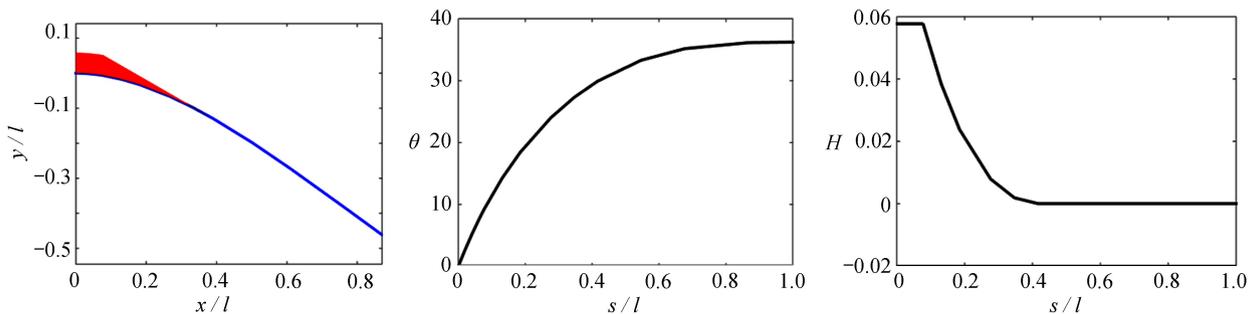
对于梯形分布,当梁弯曲到一定程度时,从梁的固定端到自由端,载荷先以临界高度 h_c 分布,然后逐渐降低,在某一位置处变成零。与刚性梁相比,承受载荷也大大降低。

下面,固定摩擦角 α 、长宽比 l/w 与自重因子 M ,可以得到结构变形数 \mathfrak{R} 与 Cauchy 数 C_Y 之间的关系,如图 8(a)所示。通过数据拟合,发现与三角形堆垛时的类似规律:

$$\mathfrak{R} = C_Y^{-0.43} \tag{20}$$

式(20)的系数 0.43 与三角形堆垛的式(19)系数 0.8 相比,系数明显减小,这证明了在梯型堆垛形式下,柔性体变形带来的外载降低幅度比三角形堆垛时要小。

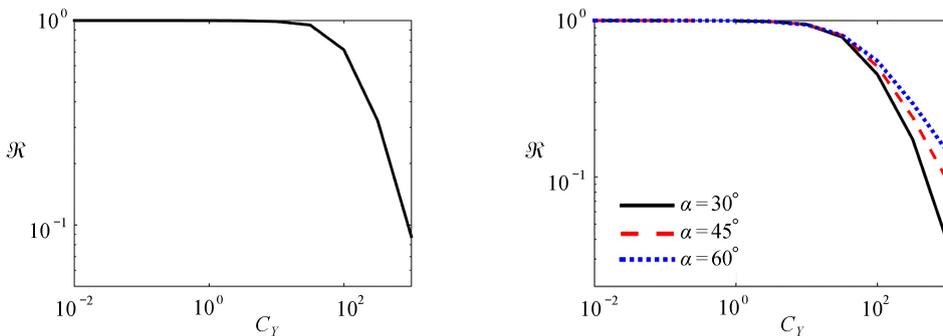
图 8(b)展示了摩擦角 α 对结构变形数 \mathfrak{R} 与 Cauchy 数 C_Y 的关系影响,趋势与三角形堆垛非常接近,在相同 Cauchy 数 C_Y 下,摩擦角 α 越大,结构变形数 \mathfrak{R} 也越大;图 8(c)展示了在相同的 Cauchy 数 C_Y 下,自重因子 M 越大,结构变形数 \mathfrak{R} 越小,趋势与三角形堆垛时也相同。长宽比 l/w 对于 $\mathfrak{R}-C_Y$ 的影响展示在图 8(d)中,尽管在相同 Cauchy 数 C_Y 下,结构变形数随着长宽比的增大而增大,但是曲线的斜率基本相同,即长宽比不改变式(20)的指数系数。



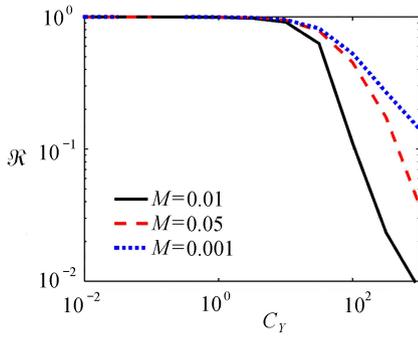
(a) 梁的变形与梁上载荷分布图 (b) 梁的转角 θ 随坐标变化的分布图 (c) 梁上载荷高度 H 随坐标变化的分布图
 (a) The flexible beam deformation and the external load (b) The distribution of rotation angle θ of the flexible beam (c) The distribution of pile height H

图 7 当 $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$, $l/w = 5$, $C_Y = 1\ 000$ 时,梯型堆垛下柔性梁的变形

Fig. 7 The flexible beam deformation under the trapezoidal pile for $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$, $l/w = 5$, $C_Y = 1\ 000$

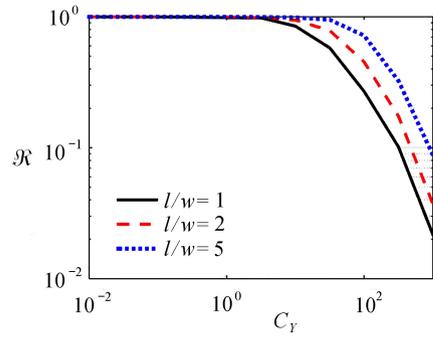


(a) 当 $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$, $l/w = 5$ 时,结构变形数 \mathfrak{R} 随 Cauchy 数 C_Y 的变化曲线 (b) 当 $M = 0.01$, $l/w = 5$ 时, $\mathfrak{R}-C_Y$ 曲线随摩擦角 α 的变化
 (a) The $\mathfrak{R}-C_Y$ curve for $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$, $l/w = 5$ (b) The $\mathfrak{R}-C_Y$ curves with different friction angles α for $M = 0.01$, $l/w = 5$



(c) 当 $\alpha = 30^\circ$, $l/w = 5$ 时, \Re - C_Y 曲线
随自重因子 M 的变化

(c) The \Re - C_Y curves with different gravitational
factors M for $\alpha = 30^\circ$, $l/w = 5$



(d) 当 $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$ 时, \Re - C_Y 曲线
随长宽比 l/w 的变化

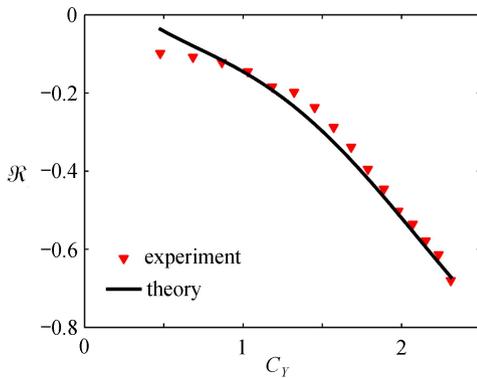
(d) The \Re - C_Y curves with different gravitational
factors M for $\alpha = 30^\circ$, $M = 0.01$

图 8 结构变形数 \Re 与 Cauchy 数 C_Y 之间的关系

Fig. 8 The relation between reconfiguration number \Re and Cauchy number C_Y

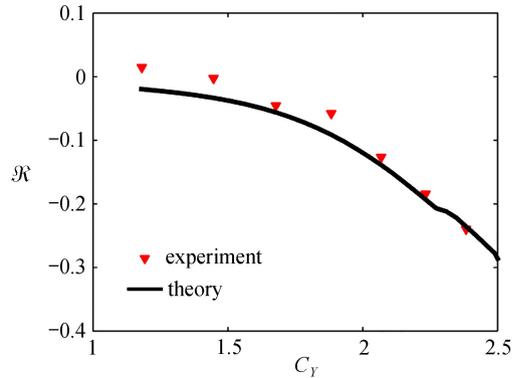
3 实验对比与结果讨论

为了验证理论模型的正确性,采用黄色的磨砂纸与两种直径的玻璃细珠进行实验,相关实验数据在附录 C 中.实验数据与理论预测曲线的对比如图 9 所示.考虑到实验数据的误差,理论曲线对实验值的预测较为理想,从而证明了理论模型的可靠性.



(a) 黄色磨砂纸支撑与大半径玻璃细珠

(a) Results of the yellow abrasive paper support and
glass microspheres with larger radii



(b) 黄色磨砂纸支撑与小半径玻璃细珠

(b) Results of the yellow abrasive paper support and
glass microspheres with smaller radii

图 9 实验数据与理论预测曲线

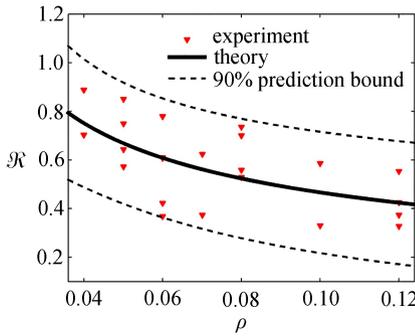
Fig. 9 The experimental data and theoretical prediction curves

下面,我们将理论模型应用到实际问题中.在雪灾严重地区,大雪会对植物、房屋等造成积压,而雪融化后也容易形成河流的水位上涨.因此,预测地面植被承受的降雪量对于预防雪灾有着重要的作用.Schmidt 等做了大量的实验,记录了美国黑松树枝、英国针枞树枝、亚高山带的冷杉树枝和人造树枝的积雪量^[24],注意,除了树枝本身的弯曲,温度、风速等其他因素也会影响到积雪量.由于文献中的实验数据仅记录了积雪量与密度间的关系,而缺少树枝的弯曲刚度、长度、宽度等数据,根据理论模型,仅能研究结构变形数 \Re 与密度间的关系:

$$\Re = C_Y^\eta = \left(\frac{\rho g l^4}{B} \right)^\eta = C \rho^\eta. \quad (21)$$

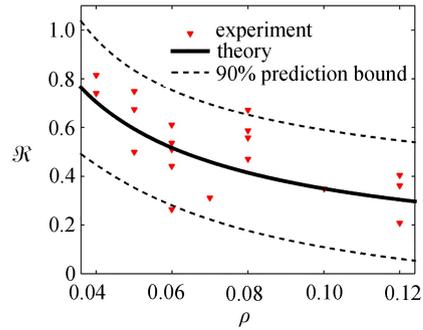
文献中记录了雪的等效高度 (h_{SWE}),即树枝上雪的重量除以树枝的投影面积和水的密度,因此定义结构变

形数为 $\mathfrak{R} = \frac{h_{\text{SWE-branch}}}{h_{\text{SWE-ground}}}$, 其中 $h_{\text{SWE-branch}}$ 表示树枝上的积雪等效高度, $h_{\text{SWE-ground}}$ 表示地面上的积雪等效高度. 用幂函数对各个树枝积雪量的拟合结果如图 10 所示.



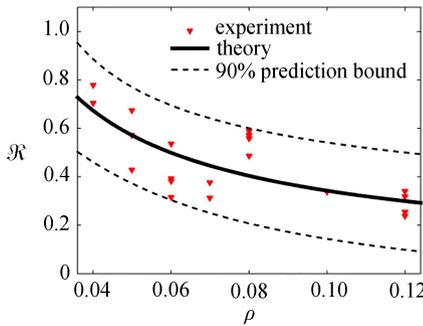
(a) 亚高山带的冷杉树枝的实验数据与拟合曲线 $\mathfrak{R} = 0.14\rho^{-0.52}$

(a) The comparison between experimental data for subalpine fir and fitting curve $\mathfrak{R} = 0.14\rho^{-0.52}$



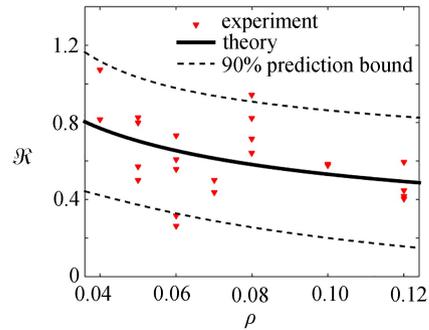
(b) 美国黑松树枝的实验数据与拟合曲线 $\mathfrak{R} = 0.06\rho^{-0.77}$

(b) The comparison between experimental data for lodgepole pine and fitting curve $\mathfrak{R} = 0.06\rho^{-0.77}$



(c) 英国针枞树枝的实验数据与拟合曲线 $\mathfrak{R} = 0.06\rho^{-0.74}$

(c) The comparison between experimental data for Engelmann spruce and fitting curve $\mathfrak{R} = 0.06\rho^{-0.74}$



(d) 人造树枝的实验数据与拟合曲线 $\mathfrak{R} = 0.21\rho^{-0.40}$

(d) The comparison between experimental data for artificial branch and fitting curve $\mathfrak{R} = 0.21\rho^{-0.40}$

图 10 理论模型对树枝积雪量的预测

Fig. 10 The predictions with the theoretical model for snow on branch

从图 10 中可以看出, 由于模型未考虑温度、风速等因素, 且实际的树枝形状也不是标准的长方形, 因此, 理论模型拟合结果并不十分理想. 但是, 从拟合的数据看, 幂指数数据与理论预测值范围基本一致, 从而进一步证实了理论模型的潜在应用. 而对于更复杂的实际问题, 需要在理论模型上再增加其他参数来修正影响.

4 结 论

本文研究了柔性梁在承受重力载荷作用下的结构变形与承载力之间的关系, 通过理论建模与数值求解, 得到以下几点结论:

- 1) 柔性梁在重力载荷作用下将发生自身的结构变形, 从而减少所承受的重力载荷;
- 2) 描述柔性梁弯曲的 Cauchy 数与描述载荷变化程度的结构变形数之间存在着幂指数的关系;
- 3) 载荷的摩擦角、柔性梁的长宽比和自重均会影响到梁的弯曲与承载能力, 这些影响在理论模型中均可以体现.

附 录 A

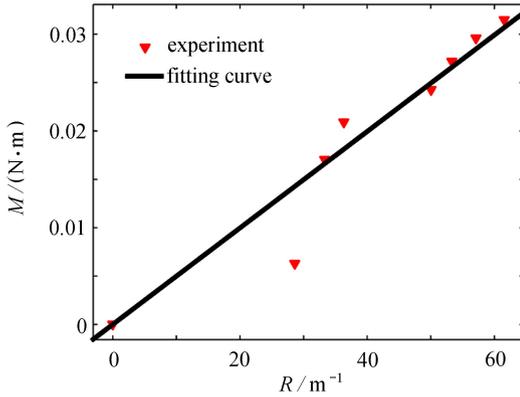
表 A1 列出了黄色磨砂纸支撑与黑色磨砂纸支撑端部所受弯矩 M_e 与曲率 R , 其中黄色磨砂纸支撑宽度为 0.04 m, 黑色磨砂纸支撑宽度为 0.041 m, 拟合曲线如图 A1 所示. 可见, 黄色磨砂纸未发生显著扭转, 拟合结果较好, 计算其弯曲刚度为 $B =$

$$EI/w = 0.01286 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

表 A1 黄色支撑与黑色支撑的端部弯矩及曲率

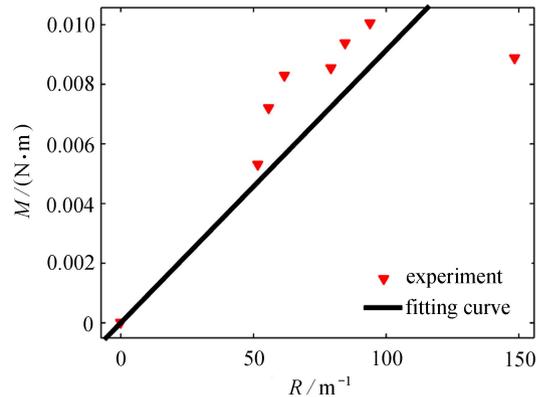
Table A1 The end moment and curvature of the yellow and black supports

yellow support		black support	
$M_r / (\text{N}\cdot\text{m})$	R / m^{-1}	$M_r / (\text{N}\cdot\text{m})$	R / m^{-1}
0	0	0	0
0.006 3	28.571 428 57	0.005 316 923	51.587 301 59
0.017	33.333 333 33	0.007 194 203	55.645 161 29
0.020 9	36.363 636 36	0.008 289 855	61.607 142 86
0.024 3	50	0.008 553 02	79.255 319 15
0.027 2	53.333 333 33	0.009 374 648	84.523 809 52
0.029 6	57.142 857 14	0.010 064	93.75
0.031 5	61.538 461 54	0.008 871 91	148.333 333 3



(a) 黄色支撑

(a) The yellow support



(b) 黑色支撑

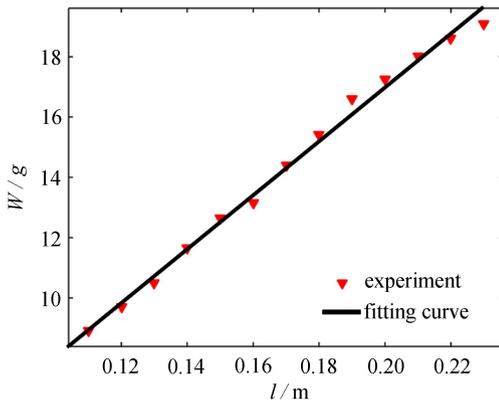
(b) The black support

图 A1 支撑的弯曲刚度拟合图

Fig. A1 The fittings of supports' bending moduli

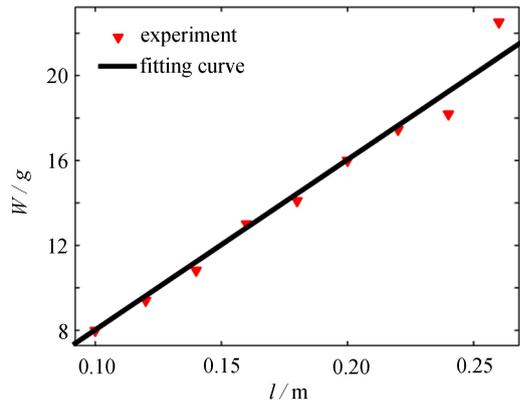
附录 B

图 B1 中列出了刚性支撑所能承受大珠与小珠的最大重量 W 与长度 l 之间的关系,根据式(1)和(2),可以拟合出大珠的摩擦角为 30.1° ,小珠的摩擦角为 29.1° .



(a) 500~600 μm 的大珠

(a) Larger microspheres with diameters of 500~600 μm



(b) 125~166 μm 的小珠

(b) Smaller microspheres with diameters of 125~166 μm

图 B1 刚性物体上堆垛的最大玻璃细珠重量

Fig. B1 The maximum weights of glass microsphere piles on the rigid body

附 录 C

表 C1 与 C2 分别列出了大珠、小珠与刚性支撑、柔性支撑上的最大载荷重量 W_f, W_r , 以及支撑的长度 l 、载荷密度 ρ 、长宽比 l/w 和 Cauchy 数 C_v 等参数,其中大珠和小珠的密度分别为 $1\,540\text{ kg/m}^3$ 和 $1\,530\text{ kg/m}^3$,纸片宽度分别为 0.095 m 和 0.02 m ,弯曲刚度均为 $0.012\,86\text{ N}\cdot\text{m}$.注意,柔性支撑上的最大载重量取三次实验的平均值.

表 C1 大珠在刚性支撑与柔性支撑上的最大载重量

Table C1 The maximum weights of larger microspheres on the rigid support and the flexible support

Cauchy number C_v	length l/m	ratio of length to width l/w	maximum load on the flexible support W_f/g	maximum load on the rigid support W_r/g
3.315 039 538	0.023	0.208 877 28	80	383
2.775 032 615	0.022	0.243 802 14	88.1	361.358 6
2.303 851 846	0.021	0.263 940 7	90.3	342.122 3
1.895 384 615	0.02	0.291 743 84	94.2	322.886
1.543 802 615	0.019	0.314 013 15	95.35	303.649 7
1.243 561 846	0.018	0.358 214 29	100.3	280
0.989 402 615	0.017	0.402 749 71	106.8	265.177 1
0.776 349 538	0.016	0.459 460 16	113	245.940 8
0.599 711 538	0.015	0.515 869 78	116.95	226.704 5
0.455 081 846	0.014	0.578 883 9	120.1	207.468 2
0.338 338	0.013	0.633 792 68	119.3	188.231 9
0.245 641 846	0.012	0.654 385 96	111.9	171
0.173 439 538	0.011	0.716 483 05	107.3	149.759 3
0.118 461 538	0.01	0.756 188 56	98.7	130.523
0.077 722 615	0.009	0.777 720 97	86.55	111.286 7
0.048 521 846	0.008	0.796 846 08	73.35	92.050 4

表 C2 小珠在刚性支撑与柔性支撑上的最大载重量

Table C2 The maximum weights of smaller microspheres on the rigid support and the flexible support

Cauchy number C_v	length l/m	ratio of length to width l/w	maximum load on the flexible support W_f/g	maximum load on the rigid support W_r/g
70.374 304	0.26	1.3	9.237 5	22.5
51.093 504	0.24	1.2	10.487 5	18.2
36.075 424	0.22	1.1	11.412 5	17.45
24.64	0.2	1	11.962 5	16
16.166 304	0.18	0.9	12.337 5	14.1
10.092 544	0.16	0.8	11.7	13
5.916 064	0.14	0.7	10.737 5	10.8
3.193 344	0.12	0.6	9.725	9.4

参考文献(References):

- [1] MARJORIBANKS T I, LAGUE D, HARDY R J, et al. Flexural rigidity and shoot reconfiguration determine wake length behind saltmarsh vegetation patches[J]. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2019, **124**(8): 2176-2196.
- [2] BHATI A, SAWANNI R, KULKARNI K, et al. Role of skin friction drag during flow-induced reconfiguration of a flexible thin plate[J]. *Journal of Fluids & Structures*, 2018, **77**: 134-150.
- [3] NOYES C, QIN C, LOTH E. Tower shadow induced blade loads for an extreme-scale downwind turbine[J]. *Wind Energy*, 2020, **23**(3): 458-470.
- [4] ZHU X, CHEN J, SHEN X, et al. Impact of blade flexibility on wind turbine loads and pitch settings[J]. *Journal of Solar Energy Engineering*, 2019, **141**(4). DOI: 10.1115/1.4042315.

- [5] THIRIA B, GODOY D R. How wing compliance drives the efficiency of self-propelled flapping flyers[J]. *Physical Review E*, 2010, **82**(1): 015303.
- [6] WU W, MA B L, FAN J J, et al. Management of nitrogen fertilization to balance reducing lodging risk and increasing yield and protein content in spring wheat[J]. *Field Crops Research*, 2019, **241**: 107584.
- [7] BIGGS H J, NIKORA V I, GIBBINS C N, et al. Flow interactions with an aquatic macrophyte: a field study using stereoscopic particle image velocimetry[J]. *Journal of Ecohydraulics*, 2019, **4**(2): 113-130.
- [8] GARDINER B, BERRY P, MOULIA B. Wind impacts on plant growth, mechanics and damage[J]. *Plant Science*, 2016, **245**: 94-118.
- [9] 王祥斌, 吴龙华. 挺水植被弯曲变形对水流阻力的影响研究[J]. 人民长江, 2019, **50**(5): 164-169. (WANG Xiangbin, WU Longhua. Study on the influence of bending deformation of emergent vegetation on flow resistance[J]. *Yangtze River*, 2019, **50**(5): 164-169. (in Chinese))
- [10] 江春波, 侯迪, 惠二青. 河道植被对水流运动影响研究之现状[J]. 水力发电, 2009, **35**(7): 11-13. (JIANG Chunbo, HOU Di, HUI Erqing. Current status of studies on effects of river vegetation on flow movement[J]. *Water Power*, 2009, **35**(7): 11-13. (in Chinese))
- [11] HARDER D, SPECK O, HURD C, et al. Reconfiguration as a prerequisite for survival in highly unstable flow dominated habitats[J]. *Journal of Plant Growth Regulation*, 2004, **23**(2): 98-107.
- [12] VOLLSINGER S, MITCHELL S J, BYRNE K E. Wind tunnel measurements of crown streamlining and drag relationships for several hardwood species[J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 2005, **35**(5): 1238-1249.
- [13] ALBEN S, SHELLEY M, ZHANG J. Drag reduction through self similar bending of a flexible body[J]. *Nature*, 2002, **420**(6915): 479-481.
- [14] ALBEN S, SHELLEY M, ZHANG J. How flexibility induces streamlining in a two dimensional flow[J]. *Physics of Fluids*, 2004, **16**(5): 1694-1713.
- [15] 贾来兵. 二维流场中板状柔性体与流体相互作用的研究[D]. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2009. (JIA Laibing. The interaction between flexible plates and fluid in two-dimensional flow [D]. PhD Thesis. Hefei: University of Science and Technology of China, 2009. (in Chinese))
- [16] SILVA-LEON J, CIONCOLINI A, FILIPPONE A, et al. Flow-induced motions of flexible filaments hanging in cross-flow[J]. *Experimental Thermal & Fluid Science*, 2018, **97**: 254-269.
- [17] ZHU L. Scaling laws for drag of a compliant body in an incompressible viscous flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, **607**: 387-400.
- [18] LUHAR M, NEPF H M. Flow-induced reconfiguration of buoyant and flexible aquatic vegetation[J]. *Limnology and Oceanography*, 2011, **56**(6): 2003-2017.
- [19] LECLERCQ T, LANGRE D E. Reconfiguration of elastic blades in oscillatory flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, **838**: 606-630.
- [20] LECLERCQ T, LANGRE D E. Vortex-induced vibrations of cylinders bent by the flow[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2018, **80**: 77-93.
- [21] TIMOSHENKO S P, GERE J M. *Mechanics of Materials*[M]. Van Nostrand Reinhold Co, 1972.
- [22] 张志刚, 齐朝晖, 吴志刚. 基于曲率插值的大变形梁单元[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(6): 620-629. (ZHANG Zhigang, QI Zhaohui, WU Zhigang. Large deformation beam element based on curvature interpolation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(6): 620-629. (in Chinese))
- [23] 卜万奎, 徐慧, 赵玉成. 基于曲梁弹性理论的弯曲覆岩变形及应力分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(3): 302-318. (BU Wankui, XU Hui, ZHAO Yucheng. Deformation and stress analysis of curved overburden based on curved beam elastic theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(3): 302-318. (in Chinese))
- [24] SCHMIDT R A, GLUNS D R. Snowfall interception on branches of three conifer species[J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 1991, **21**(8): 1262-1269.