

含正三角形孔口热电材料的断裂力学分析*

朱明明, 李联和

(内蒙古师范大学 数学科学学院, 呼和浩特 010022)

摘要: 采用复变函数方法研究了含正三角形孔口热电材料中受到无穷远处均匀电流密度和能量流作用下的断裂问题. 在电绝缘和热绝缘边界条件下, 获得了温度场和应力场的解析表达式, 分析了三角形尺寸、能量流载荷对热电材料性能的影响. 结果表明, 能量流载荷和三角形尺寸的变化对环向能量流、环向应力、环向热流有较明显的影响.

关键词: 热电材料; 复变函数方法; 正三角形孔口

中图分类号: O357.4⁺1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410232

Fracture Mechanics Analysis of Thermoelectric Materials With Equilateral Triangle Holes

ZHU Mingming, LI Lianhe

(*Mathematics Science College, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, P.R.China*)

Abstract: The fracture mechanics for thermoelectric materials with equilateral triangle holes subjected to uniform electric current densities and uniform energy fluxes at infinity was studied by means of the complex variable method. The analytic expressions of temperature fields and stress fields were obtained under the boundary conditions of electric insulation and thermal insulation. Effects of the triangle size, the applied electric current density and the energy flux on the thermoelectric material were analyzed. The results show that, the variations of the current density and the triangle size have obvious influences on the annular energy flux, the annular stress and the annular heat flux.

Key words: thermoelectric material; complex variable method; equilateral triangle hole

引 言

热电材料作为一种新型材料,有着优良的性能和广阔的应用前景.然而在工程实际中,由于应力集中和孔洞裂纹等各种缺陷,容易造成材料的断裂和结构的破损.因此,对热电材料断裂力学的研究显得尤为重要.利用有限元方法, Gao 等^[1]针对热电模块的热应力问题进行了优化设计,获得了具有更好力学性能的热电模块. Schmidt 等^[2]研究了热电材料的慢裂纹扩展行为和室温力学性能.利用复变函数方法, Zhang 等^[3]给出了

* 收稿日期: 2020-08-05; 修订日期: 2021-01-18

基金项目: 国家自然科学基金(11962026;12002175);内蒙古自然科学基金(2020MS1018)

作者简介: 朱明明(1983—),女,硕士生(E-mail: 921767370@qq.com);

李联和(1978—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: nmglilianhe@163.com).

引用格式: 朱明明, 李联和. 含正三角形孔口热电材料的断裂力学分析[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(6): 656-664.

无限介质中裂纹问题的解,并得出远场电通量负荷和应用的总能量负荷决定了电通量强度因子和热流强度因子的结论。Song 等^[4]研究了热电材料的二维裂纹问题,发现热流场、电流场、应力场在裂纹尖端均表现出传统的平方根奇异性。在无限远热电载荷作用下,Yu 等^[5]给出了无限远热电介质中圆弧裂纹的平面问题的解析解,并获得了裂纹尖端的能量通量和应力强度因子。在两种裂纹表面条件下,Song 等^[6]得到了热电材料裂纹问题的闭式解,并详细讨论了裂纹对热电材料转换效率的影响。锁娟^[7]以热电材料为例,利用复变函数方法把周期共线裂纹问题退化为有附加条件的单一裂纹问题来研究,对共线裂纹之间干涉效应的变化情况进行了详细的分析。杜昕鲲等^[8]采用保角变换技术和复变函数方法得到了热电材料中含椭圆夹杂问题的精确解,并分析了椭圆夹杂物对热流和电流的影响。针对正三角形孔口问题,郭怀民^[9]首次给出了带正三角形孔口的平面弹性问题应力强度因子的解析解。王玮华等^[10]利用复变函数方法研究了压电弹性体中光滑顶点的正三角形孔边裂纹的反平面问题,并分别讨论了电可通和电不可通边界条件下裂纹尺寸与能量释放率之间的关系。王永健等^[11]利用 Stroh 公式和 Cauchy 积分解决了含等边三角形孔边裂纹横观各向同性压电弹性的反平面问题。肖俊华等^[12]利用保角映射技术给出了考虑表面弹性效应时正三角形孔边裂纹反平面剪切问题的精确解,并分析了三角形孔的尺寸对裂尖应力强度因子的影响。在电非渗透边界条件下,樊世旺等^[13]利用 Stroh 公式给出了一维六方压电准晶中正三角形孔边裂纹尖端的场强度因子和能量释放率。高媛媛等^[14]通过构造保角映射函数研究了一维六方压电准晶中三角形孔边快速传播裂纹的反平面剪切问题,并给出了裂纹尖端处的应力强度因子和电位移强度因子的解析解。刘兴伟等^[15]利用复变函数方法和 Schwarz-Christoffel (SC)变换得出了任意正 n 边形孔边裂纹尖端附近应力强度因子和电位移强度因子的解析解,当 $n = 3$ 时所得结果与文献[13]一致。

本文采用复变函数方法研究了受到无限远均匀电流密度和能量通量作用下的含正三角形孔口热电材料的断裂问题,给出了电势、温度场、应力场的解析表达式,分析了载荷及三角形尺寸对环向能量流、环向应力及环向热流的影响。

1 热电材料基本方程

在无电荷和热源条件下,均匀热电材料的控制方程为^[16]

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_e = 0, \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{j}_e \cdot \nabla V = 0, \quad (1)$$

这里电流密度矢量 $\mathbf{j}_e = [j_{ex}, j_{ey}]^T$ 和热通量矢量 $\mathbf{q} = [q_x, q_y]^T$ 满足如下输运方程:

$$\mathbf{j}_e = -\gamma \nabla V - \gamma \varepsilon \nabla T, \mathbf{q} = -\gamma \varepsilon T \nabla V - (k + \gamma \varepsilon^2 T) \nabla T, \quad (2)$$

其中 V 和 T 分别表示电势和温度, γ, k 和 ε 分别表示电导率、热导率和 Seebeck 系数。能量通量可表示为^[16]

$$\mathbf{j}_u = \mathbf{q} + \mathbf{j}_e V. \quad (3)$$

为简化方程,引入函数 $F = V + \varepsilon T$ ^[3],则由方程(2)、(3)可得

$$\mathbf{j}_e = -\gamma \nabla F, \mathbf{j}_u = -\gamma F \nabla F - k \nabla T. \quad (4)$$

将方程(3)和(4)代入方程(1),则控制方程(1)可以改写为

$$\nabla^2 F = 0, k \nabla^2 T + \gamma (\nabla F)^2 = 0. \quad (5)$$

由方程(5),可以获得 F 和 T 的复变函数表示如下:

$$F = \operatorname{Re}[f_1(z)], T = \operatorname{Re}[g(z)] - \frac{\gamma}{4k} f_1(z) \overline{f_1(z)}, \quad (6)$$

这里 $z = x + iy$, $f_1(z)$ 和 $g(z)$ 表示解析函数, $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示实部。因此,方程(4)可表示为

$$j_{ex} - ij_{ey} = -\gamma f_1'(z), j_{ux} - ij_{uy} = -\frac{\gamma}{2} f_1(z) f_1'(z) - kg'(z). \quad (7)$$

另一方面,由方程(7)可知,电流密度和能量通量的边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \int j_{en}(s) ds = -\frac{\gamma}{2i} (f_1(z) - \overline{f_1(z)}), \\ \int j_{un}(s) ds = -\operatorname{Im} \left[\frac{\gamma}{4} f_1^2(z) + kg(z) \right], \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\text{Im}(\cdot)$ 表示虚部, $j_{en}(s)$ 和 $j_{un}(s)$ 分别表示沿边界点的法向电流密度和法向能量通量.

应力和位移的复变函数可表示为^[8]

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}[\varphi'(z)] + \frac{2\mu\alpha^*\gamma}{k(\kappa+1)}f_1(z)\overline{f_1(z)}, \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] + \frac{2\mu\alpha^*\gamma}{k(\kappa+1)}f_2(z)\overline{f_2'(z)}, \end{cases} \quad (9)$$

$$2\mu[u_x + iu_y] = k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + 2\mu\alpha^*\int g(z)dz - \frac{\mu\alpha^*\gamma}{k(\kappa+1)}f_2(z)\overline{f_1(z)}, \quad (10)$$

其中 $f_2(z) = f_1(z)$, $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是待确定的复应力函数, μ 是剪切模量, κ 和 α^* 定义如下:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{plane stress,} \\ 3-4\nu, & \text{plane strain,} \end{cases} \quad \alpha^* = \begin{cases} \alpha, & \text{plane stress,} \\ (1+\nu)\alpha, & \text{plane strain,} \end{cases} \quad (11)$$

ν 是 Poisson 比, α 是线性热膨胀系数. 由方程(9)可知, 应力边界条件可以表示为

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i\int(p_x + ip_y)ds - \frac{\mu\alpha^*\gamma}{k(\kappa+1)}f_2(z)\overline{f_1(z)}, \quad (12)$$

其中 p_x 和 p_y 是作用在边界上的外力. 本文中主要讨论的是热电材料在热电载荷作用下的力学行为, 因此, 常数项 p_x 和 p_y 取为零.

2 正三角形孔口的解

本文考虑的物理模型是在无限远处受到均匀的电流密度 j_{e0} 和均匀的能量流 j_{u0} 的共同作用下含三角形孔口热电材料的力学行为, 即

$$\begin{cases} j_{ex} = 0, j_{ey} = j_{e0}, \\ j_{ux} = 0, j_{uy} = j_{u0}, \end{cases} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (13)$$

相应的示意图见图 1.

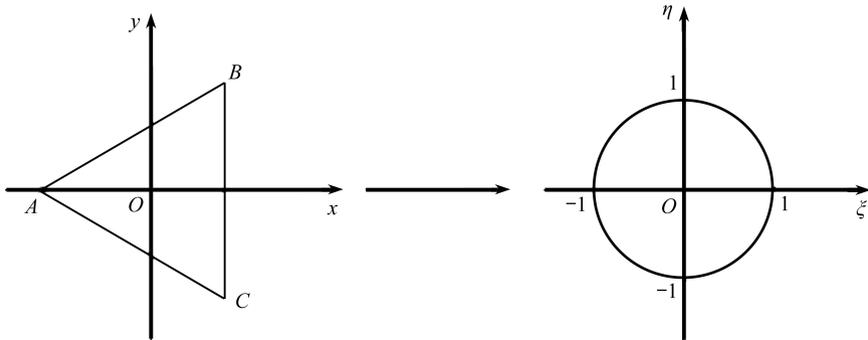


图 1 含有正三角形孔口的无限大平面到单位圆盘的映射

Fig. 1 The mapping of the infinite plate containing an equilateral triangle hole onto the inside of a unit circle

引入如下的保角映射函数^[9]:

$$z = w(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} + \dots\right), \quad (14)$$

其中 $R = 0.8381a$ 是与正三角形大小有关的常数, a 为正三角形的边长, 此映射将正三角形孔口外部映射到单位圆内部. 根据文献[9]近似地取

$$z = w(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45}\right). \quad (15)$$

基于方程(8)的第一式, 由孔口边缘处的电流密度的电绝缘边界条件可得

$$f_1(z) - \overline{f_1(z)} = 0,$$

这里我们假设 $f_1(z) = c_1^\infty z + f_0(z)$, 其中 c_1^∞ 是一个复常数, 且 $f_0(\infty) = 0$. 将 $f_1(z)$ 代入方程(7)的第一式, 并令 $z \rightarrow \infty$, 得到 $c_1^\infty = ij_{e0}/\gamma$.

注意到在单位圆周上有 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$, 可得

$$f_0(\sigma) - \overline{f_0(\sigma)} = -i \frac{j_{e0}}{\gamma} \left[a \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \right]. \tag{16}$$

两边同乘 $d\sigma/(2\pi i(\sigma - \zeta))$, 并进行 Cauchy 积分得 $f_0(\zeta) = -(ij_{e0}a/\gamma)\zeta$, 进而我们有

$$f_1(z) = \frac{ij_{e0}R}{\gamma} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right). \tag{17}$$

由于 $f_2'(z) = f_1(z)$, 对方程(17)积分得

$$f_2(z) = \frac{ij_{e0}R^2}{\gamma} \left(\ln \zeta - \frac{\zeta^6}{54} + \frac{\zeta^4}{36} + \frac{2\zeta^3}{9} - \frac{2\zeta}{3} + \frac{1}{2\zeta^2} \right). \tag{18}$$

2.1 孔内温度场

假设温度场具有如下形式:

$$T_h = \text{Re}[g_h(z)], \tag{19}$$

其中 $g_h(z)$ 是一个解析函数, 那么孔内的热通量可以表示为

$$q_{hx} - iq_{hy} = -k_h g_h'(z), \tag{20}$$

这里 k_h 是空气的导热系数, 应用 Gauss 定理, 可以得到

$$\text{Im}[k_h g_h(z)] = - \int q_{hn}(s) ds, \tag{21}$$

其中 $q_{hn}(s)$ 表示沿边界 s 点的法向热通量. 函数 $g_h(z)$ 可以用 Taylor 级数表示如下:

$$g_h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^h \zeta^{-n}, \tag{22}$$

其中常数 a_n^h 是待定的复系数.

2.2 热电材料内的温度场

在热电材料内部, 假设复温度函数 $g(z)$ 有如下形式:

$$g(z) = c_2^\infty z^2 + c_3^\infty z + g_0(z), \tag{23}$$

其中 c_2^∞ 和 c_3^∞ 是两个与无穷远处的载荷条件有关的复常数, $g_0'(\infty) = 0$. 将方程(17)和(23)代入方程(7)的第二式, 然后令 $z \rightarrow \infty$, 得到

$$c_2^\infty = \frac{j_{e0}^2}{4k\gamma}, \quad c_3^\infty = \frac{ij_{u0}}{k}. \tag{24}$$

由热通量和温度的法向导量的连续条件及电绝缘边界条件, 由方程(6)的第二式、方程(8)的第二式、方程(19)和(21)可得

$$\text{Im} \left[\frac{\gamma}{4} f_1^2(\sigma) + kg(\sigma) \right] = \text{Im}[k_h g_h(\sigma)], \tag{25}$$

$$- \frac{\gamma}{4k} f_1(\sigma) \overline{f_1(\sigma)} + \text{Re}[g(\sigma)] = \text{Re}[g_h(\sigma)]. \tag{26}$$

将方程(17)、(22)、(23)代入方程(25)、(26), 然后两边同时乘以 $d\sigma/(2\pi i(\sigma - \zeta))$, 积分得到

$$\begin{aligned} g_0(\zeta) - \overline{g_0(0)} &= - \frac{j_{e0}^2 R^2}{4k\gamma} \left(\frac{\zeta^{10}}{2025} - \frac{2\zeta^7}{135} + \frac{7\zeta^4}{45} - \frac{2\zeta}{3} - \zeta^2 \right) - \\ &\quad \frac{ij_{u0}R}{k} \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} \right) - \frac{k_h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n^h} \zeta^n, \\ g_0(\zeta) + \overline{g_0(0)} &= - \frac{j_{e0}^2 R^2}{2k\gamma} (\zeta^2 - 2) - \frac{j_{e0}^2 R^2}{4k\gamma} \left(\zeta^2 + \frac{\zeta^{10}}{2025} - \frac{2\zeta^7}{135} + \frac{7\zeta^4}{45} - \frac{2\zeta}{3} \right) - \end{aligned} \tag{27}$$

$$\frac{ij_{u0}R}{k}\left(\frac{\zeta^5}{45} - \frac{\zeta^2}{3} - \zeta\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n^h} \zeta^n. \quad (28)$$

将方程(27)代入方程(28),然后让方程(28)两边 ζ^n 同次幂的系数相等,有

$$\overline{g_0(0)} = \frac{j_{e0}^2 R}{2k\gamma}, a_1^h = \frac{2ij_{u0}R}{k_h + k}, a_2^h = \frac{j_{e0}^2 R^2}{\gamma(k_h + k)}, a_n^h = 0, \quad n \geq 3. \quad (29)$$

因此,由方程(28)、(29)可得

$$g_0(\zeta) = -\frac{j_{e0}^2 R^2}{4k\gamma} \left(\frac{\zeta^{10}}{2025} - \frac{2\zeta^7}{135} + \frac{7\zeta^4}{45} - \frac{2\zeta}{3} - \zeta^2 \right) - \frac{ij_{u0}R}{k} \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} \right) - \frac{k_h}{k} (\overline{a_2^h} \zeta^2 + \overline{a_1^h} \zeta) + \frac{j_{e0}^2 R^2}{2k\gamma}. \quad (30)$$

最后,将方程(15)、(24)、(30)代入方程(23)得到

$$g(z) = \frac{j_{e0}^2 R^2}{4k\gamma} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2 + \frac{ij_{u0}R}{k} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right) - \frac{k_h}{k} (\overline{a_2^h} \zeta^2 + \overline{a_1^h} \zeta). \quad (31)$$

2.3 弹性场

假设应力和位移复表示中的复势 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 具有如下的形式:

$$\varphi(z) = A(\zeta) \ln \zeta + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = B(\zeta) \ln \zeta + \psi_0(z), \quad (32)$$

其中 $A(\zeta)$ 和 $B(\zeta)$ 是两个未知函数.把方程(32)代入方程(10)和(12),由应力和位移的单值性条件可得

$$A(\zeta) = \frac{2}{3} R^3 P_0 + A_0 R^2 \left(1 - \frac{2k_h}{k_h + k} \right), \quad (33)$$

$$B(\zeta) = \bar{A} + 2R^3 P_0 \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right), \quad (34)$$

其中 $A_0 = -\frac{2\mu\alpha^* j_{u0}}{k(\kappa + 1)} i$, $P_0 = \frac{\mu\alpha^* j_{e0}^2}{2k\gamma(\kappa + 1)}$,为简便起见我们令 $A(\zeta) = A$.

在单位圆周上,应力边界条件方程(12)可以表示为

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = -\frac{\mu\alpha^* \gamma}{k(\kappa + 1)} \overline{f_2(\sigma)} \overline{f_1(\sigma)}. \quad (35)$$

把方程(15)、(17)、(18)和(32)~(34)代入方程(35),并在方程(35)的两端乘以 $d\sigma/(2\pi i(\sigma - \zeta))$,进行Cauchy积分,可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) = & \frac{1}{27} R^3 P_0 \zeta^7 - \frac{5}{54} R^3 P_0 \zeta^5 - \left[\frac{58}{135} R^3 P_0 + \frac{(k - k_h)}{45(k + k_h)} A_0 R^2 \right] \zeta^4 + \\ & \left[\frac{1}{36} \frac{837}{396} R^3 P_0 - \frac{47(k - k_h)}{6066(k + k_h)} A_0 R^2 \right] \zeta^3 + \frac{80}{43} R^3 P_0 \zeta^2 + \\ & \left[-\frac{925}{4044} R^3 P_0 + \frac{235(k - k_h)}{674(k + k_h)} A_0 R^2 \right] \zeta. \end{aligned} \quad (36)$$

对方程(35)两边取共轭,进行Cauchy积分,可得

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{45\zeta^6 - 15\zeta^3 + 1}{5\zeta^{10} - 30\zeta^7 - 45\zeta^4} A + R^3 P_0 (\zeta^3 - \zeta) - \frac{45\zeta^6 - 15\zeta^3 + 1}{5\zeta^9 - 30\zeta^6 - 45\zeta^3} \varphi_0'(\zeta). \quad (37)$$

因此,由方程(32)、(36)和(37),可获得复应力势 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 如下:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & A \ln \zeta + \frac{1}{27} R^3 P_0 \zeta^7 - \frac{5}{54} R^3 P_0 \zeta^5 - \left[\frac{58}{135} R^3 P_0 + \frac{(k - k_h)}{45(k + k_h)} A_0 R^2 \right] \zeta^4 + \\ & \left[\frac{1}{36} \frac{837}{396} R^3 P_0 - \frac{47(k - k_h)}{6066(k + k_h)} A_0 R^2 \right] \zeta^3 + \frac{80}{43} R^3 P_0 \zeta^2 + \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{925}{4\,044}R^3P_0 + \frac{235(k-k_h)}{674(k+k_h)}A_0R^2 \right] \zeta, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \left[\bar{A} + 2R^3P_0 \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right) \right] \ln \zeta - \frac{45\zeta^6 - 15\zeta^3 + 1}{5\zeta^{10} - 30\zeta^7 - 45\zeta^4} A + R^3P_0(\zeta^3 - \zeta) - \\ & \frac{45\zeta^6 - 15\zeta^3 + 1}{5\zeta^9 - 30\zeta^6 - 45\zeta^3} \left\{ \frac{7}{27}R^3P_0\zeta^6 - \frac{25}{54}R^3P_0\zeta^4 - \right. \\ & \left. \left[\frac{232}{135}R^3P_0 + \frac{4(k-k_h)}{45(k+k_h)}A_0R^2 \right] \zeta^3 + \left[\frac{1\,837}{12\,132}R^3P_0 - \frac{47(k-k_h)}{2\,022(k+k_h)}A_0R^2 \right] \zeta^2 + \right. \\ & \left. \frac{160}{43}R^3P_0\zeta + \left[-\frac{925}{4\,044}R^3P_0 + \frac{235(k-k_h)}{674(k+k_h)}A_0R^2 \right] \right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

由方程(38)和(39)可获得弹性场应力的表达式.为便于实际应用,下面着重讨论能量通量和环向应力的实表达式.由方程(7)的第二式、方程(9)的第一式和方程(15),在曲线坐标系 (r, θ) 中能量通量 j_{ur} 和 $j_{u\theta}$,以及应力分量 σ_{rr} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 可以表示为

$$j_{ur} - ij_{u\theta} = \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{|\zeta \omega'(\zeta)|} (j_{ux} - ij_{uy}) = -\frac{\zeta}{|\zeta \omega'(\zeta)|} \left[\frac{\gamma}{2} f_1(\zeta) f_1'(\zeta) + k g'(\zeta) \right], \quad (40)$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + \frac{2\mu\alpha^* \gamma}{k(\kappa + 1)} f_1(\zeta) \overline{f_1(\zeta)}. \quad (41)$$

由方程(17)、(31)、(38)、(40)和(41)有

$$j_{ur} - ij_{u\theta} = \frac{\zeta}{\left| R \left(-\frac{1}{\zeta} - \frac{2\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{9} \right) \right|} \left[ij_{u0} R(1 + \zeta^{-2}) + k_h(2\overline{a_3^h} \zeta + \overline{a_1^h}) \right], \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = & 4\text{Re} \left(\frac{1}{R(\zeta^6 - 6\zeta^3 - 9)} \left\{ 9A\zeta + \frac{7}{3}R^3P_0\zeta^8 - \frac{25}{6}R^3P_0\zeta^6 - \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{232}{15}R^3P_0 + \frac{4(k-k_h)}{5(k+k_h)}A_0R^2 \right] \zeta^5 + \left[\frac{1\,837}{1\,348}R^3P_0 - \frac{141(k-k_h)}{674(k+k_h)}A_0R^2 \right] \zeta^4 + \right. \\ & \left. \frac{1\,440}{43}R^3P_0\zeta^3 + \left[-\frac{2\,775}{1\,348}R^3P_0 + \frac{2\,115(k-k_h)}{674(k+k_h)}A_0R^2 \right] \zeta^2 \right\} \right) + \\ & 4R^2P_0 \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right) \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} - \bar{\zeta} \right). \quad (43) \end{aligned}$$

注意到在单位圆上有 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$,可获得 $j_{u\theta}$ 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 的实表达式如下:

$$j_{u\theta} = \frac{-18k_h R j_{e0}^2 \sin(2\theta)}{\gamma(k_h + k) \sqrt{118 + 96\cos(3\theta) - 18\cos(6\theta)}} - \frac{18j_{u0} k \cos \theta}{(k_h + k) \sqrt{118 + 96\cos(3\theta) - 18\cos(6\theta)}}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \frac{R^2P_0}{-9\cos(6\theta) + 48\cos(3\theta) + 59} \left(-42\cos(8\theta) + 75\cos(6\theta) + \frac{1\,312}{5}\cos(5\theta) - \right. \\ & \left. \frac{9\,654}{337}\cos(4\theta) - \frac{20\,890}{43}\cos(3\theta) + \frac{798\,928}{5\,055}\cos(2\theta) - \frac{660\,098}{5\,055}\cos\theta - \frac{52\,915}{129} \right) + \\ & \frac{2iA_0R(k-k_h)}{(-9\cos(6\theta) + 48\cos(3\theta) + 59)(k+k_h)} \left(-\frac{9}{5}\sin(5\theta) - \frac{423}{337}\sin(4\theta) + \right. \\ & \left. \frac{51\,843}{1\,685}\sin(2\theta) - \frac{101\,297}{1\,685}\sin\theta \right) + 16R^2P_0\sin^2\theta. \quad (45) \end{aligned}$$

由方程(7)的第一式和方程(15),在曲线坐标系 (r, θ) 中,电流密度 j_{er} 和 $j_{e\theta}$ 可以表示为

$$j_{er} - \dot{j}_{e\theta} = -\gamma \frac{\zeta f'_1(\zeta)}{|\zeta \omega'(\zeta)|} = \frac{18j_{e0} \cos \theta}{\sqrt{118 + 96 \cos(3\theta) - 18 \cos(6\theta)}}, \quad (46)$$

从而得到

$$j_{e\theta} = -\frac{18j_{e0} \cos \theta}{\sqrt{118 + 96 \cos(3\theta) - 18 \cos(6\theta)}}. \quad (47)$$

环向热流量 q_θ 的表达式如下:

$$q_\theta = j_{u\theta} + \frac{18j_{e0}^2 R \sin(2\theta)}{\gamma \sqrt{118 + 96 \cos(3\theta) - 18 \cos(6\theta)}} - \frac{18\varepsilon j_{e0}^3 R^2 \cos \theta \cos(2\theta)}{\gamma(k + k_h) \sqrt{118 + 96 \cos(3\theta) - 18 \cos(6\theta)}}. \quad (48)$$

3 数值分析和讨论

下面以 Bi_2Te_3 基热电材料为例,讨论三角形尺寸、远场均匀能量流 j_{u0} 和远场均匀电流密度 j_{e0} 对环向能量流、环向应力以及环向热流的影响,材料常数如下:

$$\gamma = 1.1 \times 10^5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}, k = 1.6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \varepsilon = 2 \times 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{K}^{-1}, \nu = 0.4, k_h = 0.024 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

图2表明了远场均匀电流密度一定的条件下,不同三角形边长下环向能量流随 θ 的变化趋势.由图可知,当三角形边长 $a \geq 0.0005 \text{ m}$ 时,三角形边长的变化对环向能量流的影响不容忽视.图3表明,在无外加电场的条件下,远场载荷始终导致环向能量流的集中,远场均匀能量流越大,环向能量流的集中现象就会越明显.

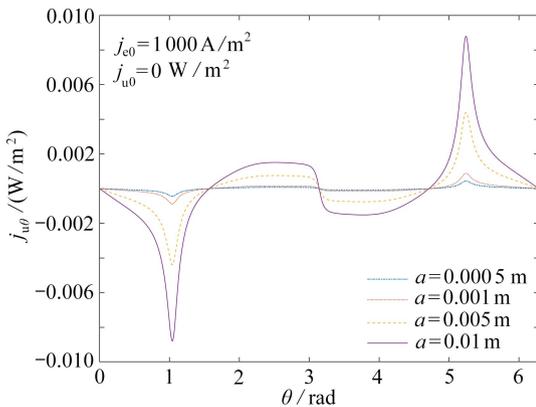


图2 三角形边长对环向能量流的影响

Fig. 2 Effects of the triangle size on the annular energy flux

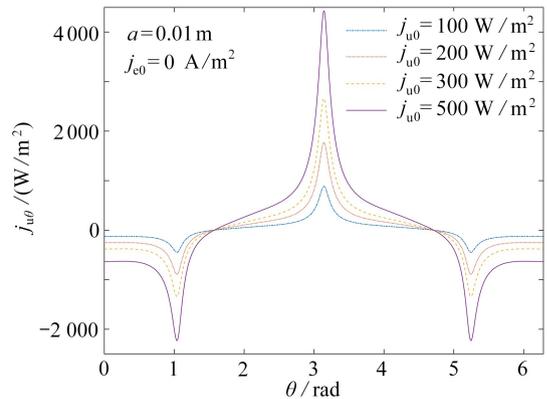


图3 远场均匀能量流 j_{u0} 对环向能量流的影响

Fig. 3 Effects of j_{u0} on the annular energy flux

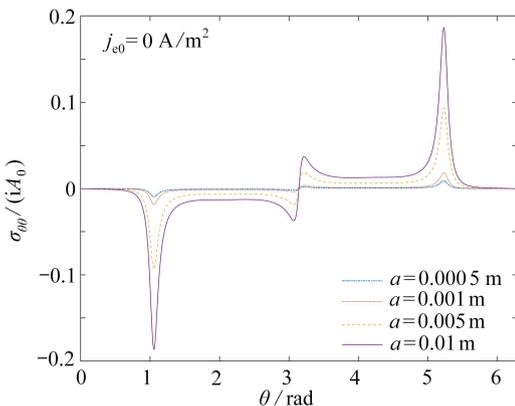


图4 三角形边长对环向应力的影响

Fig. 4 Effects of the triangle size on the annular stress

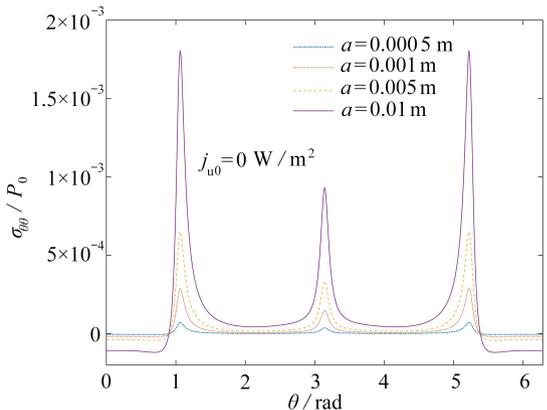


图5 只有外加电场时三角形边长对环向应力的影响

Fig. 5 Effects of the triangle size on the annular stress under a solely applied electric field

图4、5给出了远场载荷一定时环向应力随 θ 的变化趋势,可以看出:无论是否有外加电场,环向应力的

集中都与正三角形边长的大小有关,随着三角形边长的增大,环向应力的集中现象也越明显,集中现象均出现在 $\theta = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ 处,也就是正三角形的顶点处,说明正三角形孔口的顶点处是最容易导致材料断裂的地方。

图 6 给出了只有外加电场作用,三角形边长不同时,环向热流随 θ 的变化趋势;图 7 描绘了三角形边长 $a = 0.001$ m 时,外加电流密度的变化对环向热流的影响。可以看出,三角形边长越大,外加电流密度越大,环向热流的集中现象更为明显。由于热电耦合效应,即使只有外加电场的作用,三角形边长的改变以及外加电流密度的变化也会影响温度场的分布。

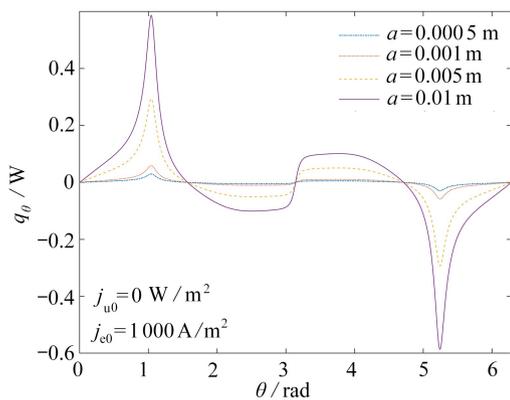


图 6 三角形边长对环向热流的影响

Fig. 6 Effects of the triangle size on the annular heat flux

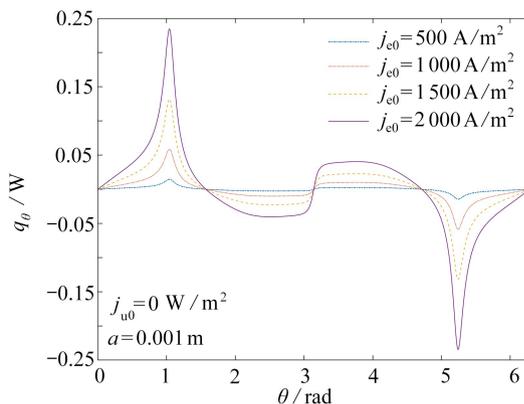


图 7 远场均匀电流密度 j_{e0} 对环向热流的影响

Fig. 7 Effects of j_{e0} on the annular heat flux

4 结 论

本文利用复变函数方法和保角映射技术得到了含正三角形孔口热电材料中的温度场和应力场的表达式,并通过数值计算和图例分析得出如下结论:三角形尺寸的变化会导致远场载荷作用下热电材料的环向应力的集中,集中现象发生在正三角形孔口的顶点处;当三角形边长 $a \geq 0.0005$ m 时,随着三角形边长的增大,环向能量流、环向应力、环向热流集中现象更为明显;由于热电耦合效应,远场载荷的变化会影响环向能量流以及环向热流的集中。

致谢 本文作者衷心感谢内蒙古师范大学研究生科研创新基金(CXJJS19101)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] GAO J L, DU Q G, ZHANG X D, et al. Thermal stress analysis and structure parameter selection for a Bi_2Te_3 -based thermoelectric module[J]. *Journal of Electronic Materials*, 2011, **40**(5): 884-888.
- [2] SCHMIDT R D, CASE E D, GILES I I I J, et al. Room-temperature mechanical properties and slow crack growth behavior of Mg_2Si thermoelectric materials[J]. *Journal of Electronic Materials*, 2012, **41**: 1210-1216.
- [3] ZHANG A B, WANG B L. Crack tip field in thermoelectric media[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2013, **66**: 33-36.
- [4] SONG H P, GAO C F, LI J Y. Two-dimensional problem of a crack in thermoelectric materials[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2015, **38**: 325-337.
- [5] YU C B, GAO C F. Analysis of a circular arc-crack in thermoelectric media[C]//*National Doctoral Academic Forum on Aeronautical Science and Technology*. Xi'an, 2016: 207-212.
- [6] SONG H P, SONG K. Electric and heat conductions across a crack in a thermoelectric material[J]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **46**(1): 83-98.
- [7] 锁娟. 热电材料中共线裂纹问题的复变方法研究[D]. 硕士学位论文. 银川:宁夏大学, 2018. (SUO Juan. Complex variable method of collinear cracks in thermoelectric materials[D]. Master Thesis. Yinchuan: Ningxia University, 2018. (in Chinese))

- [8] 杜昕鲲, 丁生虎. 热电材料中含椭圆夹杂问题的精确解[J]. 数学的实践与认识, 2019, **49**(17): 213-218. (DU Xinkun, DING Shenghu. Exact solutions of elliptical inclusion in thermoelectric materials[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2019, **49**(17): 213-218. (in Chinese))
- [9] 郭怀民. 带正三角形孔口的平面弹性问题的解析解[J]. 阴山学刊(自然科学版), 2009, **23**(1): 9-11. (GUO Huaimin. Analytic solutions for a finite plane with an equilateral triangle hole[J]. *Yinshan Academic Journal (Natural Science)*, 2009, **23**(1): 9-11. (in Chinese))
- [10] 王玮华, 郭俊宏, 邢永明. 压电弹性体中光滑顶点的正三角形孔边裂纹的反平面问题分析[J]. 复合材料学报, 2015, **32**(2): 601-607. (WANG Weihua, GUO Junhong, XING Yongming. Anti-plane problem analysis of edge crack emanating from regular triangle hole with smooth vertices in piezoelectroelastic solids[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2015, **32**(2): 601-607. (in Chinese))
- [11] 王永健, 高存法. 含等边三角形孔孔边裂纹横观各向同性压电弹性体的反平面问题研究[J]. 应用力学学报, 2015, **32**(6): 973-979. (WANG Yongjian, GAO Cunfa. The anti-plane solution for the cracked equilateral triangle hole in transverse isotropic piezoelectric materials[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2015, **32**(6): 973-979. (in Chinese))
- [12] 肖俊华, 韩彬, 徐耀铃, 等. 考虑表面弹性效应时正三角形孔边裂纹反平面剪切问题的断裂力学分析[J]. 固体力学学报, 2017, **38**(6): 530-536. (XIAO Junhua, HAN Bin, XU Yaoling, et al. Fracture analysis of cracked equilateral triangular hole with surface elasticity effect under antiplane shear[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2017, **38**(6): 530-536. (in Chinese))
- [13] 樊世旺, 郭俊宏. 一维六方压电准晶三角形孔边裂纹反平面问题[J]. 应用力学学报, 2016, **33**(3): 421-426. (FAN Shiwang, GUO Junhong. Anti-plane problem of an edge crack emanating from a triangle hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, **33**(3): 421-426. (in Chinese))
- [14] 高媛媛, 刘官厅. 一维六方压电准晶中三角形孔边快速传播裂纹的解析解[J]. 数学的实践与认识, 2019, **49**(11): 206-213. (GAO Yuanyuan, LIU Guanting. Analytic solutions of a fast propagating crack from triangular hole in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2019, **49**(11): 206-213. (in Chinese))
- [15] 刘兴伟, 李星, 汪文帅. 一维六方压电准晶中正 n 边形孔边裂纹的反平面问题[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(7): 713-724. (LIU Xingwei, LI Xing, WANG Wenshuai. The anti-plane problem of regular n -polygon holes with radial edge cracks in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(7): 713-724. (in Chinese))
- [16] PEREZ-APARICIO J L, TAYLOR R L, GAVELA D. Finite element analysis of nonlinear fully coupled thermoelectric materials[J]. *Computational Mechanics*, 2007, **40**: 35-45.