

### 结构参数对静电驱动微机械陀螺动态性能的影响

李欣业, 王雅雪, 张华彪, 张利娟, 于涛

### Effects of Structure Parameters on Dynamic Performances of Electrostatic Drive Micro-Machined Gyroscopes

LI Xinye, WANG Yaxue, ZHANG Huabiao, ZHANG Lijuan, and YU Tao

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410316>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 装药驱动飞片引爆炸药性能影响参数分析

Analysis of Effects on Shock Initiation Performances for Booster Charge Structure Parameters

应用数学和力学. 2019, 40(8): 893–909

#### 功能梯度梁在热-机械荷载作用下的几何非线性分析

Geometrically Nonlinear Analysis of Functionally Graded Beams Under Thermomechanical Loading

应用数学和力学. 2019, 40(5): 508–517

#### 非线性阻尼非线性刚度隔振系统随机动力学特性研究

An Investigation on Nonlinear-Damping and Nonlinear-Stiffness Vibration Isolation Systems Under Random Excitations

应用数学和力学. 2017, 38(6): 613–621

#### 一类含五次非线性恢复力的Duffing系统共振与分岔特性分析

Analysis of Resonance and Bifurcation Characteristics of Some Duffing Systems With Quintic Nonlinear Restoring Forces

应用数学和力学. 2019, 40(10): 1122–1134

#### 机械多体系统动力学非线性最优控制问题的Noether理论

The Noether Theorem for Nonlinear Optimal Control Problems of Mechanical Multibody System Dynamics

应用数学和力学. 2018, 39(7): 776–784

#### 广义带导数的非线性Schrödinger方程的动态分析和精确解

Dynamic Analysis and Exact Solution of the General Nonlinear Schrödinger Equation With Derivative

应用数学和力学. 2018, 39(10): 1198–1205



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 结构参数对静电驱动微机械陀螺动态性能的影响\*

李欣业<sup>1</sup>, 王雅雪<sup>1</sup>, 张华彪<sup>2</sup>, 张利娟<sup>3</sup>, 于涛<sup>1</sup>

(1. 河北工业大学 机械工程学院, 天津 300401;

2. 天津商业大学 机械工程学院, 天津 300134;

3. 天津职业技术师范大学 汽车与交通学院, 天津 300222)

**摘要:** 为研究结构参数对静电驱动微机械陀螺动态性能的影响, 考虑支承刚度的三次非线性和静电力的分式非线性, 基于两自由度动力学模型, 利用谐波平衡法结合留数定理求解了系统的周期响应, 得到了驱动电极的梳齿厚度、梳齿间隙以及检测电极的极板面积、极板间隙变化时电容变化量随驱动力频率和载体角速度的变化曲线, 以及电容灵敏度和非线性度随这些参数的变化曲线. 结果表明, 检测电容变化量随驱动力频率的变化曲线会呈现明显的非线性特征, 即第二个峰向右倾斜, 从而引起跳跃现象. 驱动电极的梳齿厚度、梳齿间隙和检测电极的极板间隙对检测电容变化量随载体角速度的变化影响较大, 而检测电极的极板面积的影响很小. 驱动电极梳齿厚度、梳齿间隙以及检测电极的极板面积对电容灵敏度和非线性度的影响基本上是线性的, 但检测电极的极板间隙对电容灵敏度和非线性度的影响是非线性的.

**关键词:** 微机械陀螺; 三次非线性刚度; 分式非线性静电力; 周期响应; 灵敏度分析; 非线性度分析  
**中图分类号:** O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410316

## Effects of Structure Parameters on Dynamic Performances of Electrostatic Drive Micro-Machined Gyroscopes

LI Xinye<sup>1</sup>, WANG Yaxue<sup>1</sup>, ZHANG Huabiao<sup>2</sup>, ZHANG Lijuan<sup>3</sup>, YU Tao<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, P.R.China;

2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Commerce, Tianjin 300134, P.R.China;

3. School of Automotive & Transportation, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, P.R.China)

**Abstract:** In view of the cubic nonlinear stiffness and the nonlinear electrostatic force in fraction form, a 2DOF model was analyzed with the harmonic balance method and the residue theorem, and the effects of structure parameters on dynamic performances of micro-machined gyroscopes were studied. The variations of the capacitance with the driving force frequency and the carrier angular velocity were obtained for different thicknesses and gaps of driving electrode comb teeth, different electrode plate areas and different detecting electrode gaps. In addition, the variations of sensitivity and nonlinearity with these structure parameters were also presented. It is found that, the variation curves of the detection capacitance with the driving force frequency show obvious nonlinear characteristics. In other words, the 2nd peak leans rightward, which results in jumping. The effects of thicknesses and gaps of driving electrode comb teeth, and gaps between

\* 收稿日期: 2020-10-19; 修订日期: 2021-01-27

基金项目: 国家自然科学基金(11972145; 11302223)

作者简介: 李欣业(1966—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: xyliebut@163.com).

引用格式: 李欣业, 王雅雪, 张华彪, 张利娟, 于涛. 结构参数对静电驱动微机械陀螺动态性能的影响[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(12): 1248-1257.

detecting electrode plates on the variation curves of the capacitance with the carrier angular velocity are much greater than those of detecting electrode plate areas. The variations of sensitivity and nonlinearity with thicknesses and gaps of driving electrode comb teeth and detecting electrode plate areas, are approximately linear, however, those with gaps between detecting electrode plates are nonlinear.

**Key words:** micro-machined gyroscope; cubic nonlinear stiffness; nonlinear electrostatic force in fraction form; periodic response; sensitivity analysis; nonlinearity analysis

## 引 言

微机械陀螺由于其体积小、重量轻、制造成本低、易于批量生产、响应稳定等优点,广泛应用于航空航天、汽车、电子等领域<sup>[1-2]</sup>。微机械陀螺中非线性因素,如支承梁刚度的非线性以及静电力的非线性等普遍存在,因此微机械陀螺的非线性动力学问题一直是近年来的研究热点之一。

Asokanthan 等<sup>[3]</sup>研究了单轴振动微陀螺仪在输入角速度周期性波动下的非线性不稳定性问题,在角速度输入小幅周期波动的情况下,采用了一种渐近方法,得到了由参数共振引起的幅频特性曲线。Braghin 等<sup>[4]</sup>考虑一个 MEMS 线振动陀螺,利用有限元模型对支承梁的非线性参数进行识别,将识别后的参数用于陀螺的集总参数模型,利用半解析和数值方法研究了系统的动态响应,并进行了实验验证,研究发现支撑梁的非线性硬化特性使得结构的共振峰向更高的频率弯曲。考虑材料的非线性, Martynenko 等<sup>[5]</sup>研究了具有环形谐振子和弹性扭转支撑的微机械陀螺的动力学问题,结果表明,非线性会引起附加误差,并导致共振曲线存在不稳定分支。Mojahedi 等<sup>[6]</sup>基于拓展的 Hamilton 原理,建立了具有预变形的悬臂梁式微/纳陀螺的控制微分方程,并利用数值方法研究了几何非线性和分子间作用力对系统的静、动态变形,固有频率以及静、动态不稳定性的影响。Kacem 等<sup>[7]</sup>考虑支撑刚度和静电力的非线性以及 Coriolis 参数激励,推导了驱动方向和检测方向的运动方程,并基于 Galerkin 法和摄动技术求解了静电驱动微机械共振陀螺仪在主共振情况下的响应。Lajimi 等<sup>[8]</sup>建立了一个由集中质量和弹性梁构成的静电驱动微机械陀螺的连续体模型,并利用多尺度法进行了求解。尚慧琳等<sup>[9]</sup>基于一类切向梳齿驱动型微陀螺,建立两自由度、具有刚度立方非线性和参数激励驱动的微陀螺系统动力学模型,考虑主参数共振和 1:1 内共振的情况,利用多尺度法研究了系统参数对驱动和检测模态振幅和分岔行为的影响。研究结果表明在 1:1 内共振和较大的载体角速度下,激励频率的变化容易引起微陀螺振动系统的多稳态解、振幅跳跃现象和概周期响应等复杂动力学行为。文永蓬等<sup>[10]</sup>探讨了驱动微弹性梁和检测微弹性梁的非线性刚度对微陀螺输出的影响规律,结果表明微陀螺振动系统的检测灵敏度和带宽呈反比关系,微弹性梁的非线性刚度会使得输入角速度与检测输出呈非线性关系。郝淑英等<sup>[11-12]</sup>利用多尺度法,并考虑 Coriolis 力的影响,分别研究了检测刚度非线性和驱动刚度非线性对双检测微陀螺的输出信号和灵敏度稳定性的影响,研究发现微陀螺灵敏度的稳定性和失稳的带宽范围对刚度非线性非常敏感。Hamed 等<sup>[13]</sup>基于一个两自由度模型,考虑亚谐共振和内共振情形,利用平均法研究了非线性参数激励微陀螺仪的动力学、能量传递与振动控制问题。Awrejcewicz 等<sup>[14]</sup>研究了带扭转关节的微机械陀螺,考虑了刚度和关节非线性的影响,利用多尺度法分析了系统在主共振和内共振情况下的稳态响应。Tsai 等<sup>[15]</sup>考虑了弯曲刚度的非线性和静电力的非线性,研究了微陀螺仪在不同的驱动频率和固有频率下的不稳定区域,求解了系统的稳态周期响应。Nitzan 等<sup>[16]</sup>讨论了三次非线性对速率积分陀螺工作的影响,结果表明,在分叉阈值以下,三次非线性导致陀螺仪两种谐振模态频率出现差值,进而导致零偏和正交误差。Lestev 等<sup>[17]</sup>考虑支撑刚度和静电力的非线性,利用平均法讨论了非线性对两种形式的振动微机械陀螺的稳态响应和测量精度的影响。

本文基于静电驱动微机械陀螺的两自由度动力学模型,考虑支撑刚度的三次非线性以及静电力的原始分式形式,讨论了驱动电极的梳齿厚度和梳齿间隙以及检测电极的极板面积和极板间隙等结构参数对微机械陀螺系统动态性能的影响。全文包括以下几个部分:第 1 节是基于简化的物理模型给出的微机械陀螺的动力学方程;第 2 节是基于谐波平衡法和留数定理求其周期响应,给出周期响应振幅满足的方程;第 3、4 节利用同伦算法分别讨论了驱动电极的结构参数和检测电极的结构参数对系统动态性能的影响;最后是本文的结论。

### 1 微机械陀螺系统的动力学方程

图 1 (a) 为静电驱动微机械陀螺的结构简图, 图 1 (b) 是其等效弹簧-质量系统模型, 其中  $m$  为微陀螺的敏感质量,  $x_a O_a y_a$  为绝对坐标系,  $x O y$  为载体坐标系,  $x$  和  $y$  分别为微陀螺的驱动方向和检测方向. 陀螺整体封装安装在载体上, 工作时在驱动电极上施加随时间变化的电压, 敏感质量在静电力的作用下在驱动方向产生往复振动. 当载体有绕  $z$  轴的角速度时, 在 Coriolis 力的作用下敏感质量产生了沿检测方向的振动. 在检测电极上施加电压, 测量敏感质量在检测方向的振幅可确定载体角速度的大小. 对于图 1 所示微机械陀螺, 假定载体角速度为常数, 当敏感质量沿驱动和检测方向的位移分别为  $x, y$ , 且载体有绕  $z$  轴的角位移  $\theta$  时, 其在绝对坐标系中的位移可表示为

$$\begin{aligned} x_a &= x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y_a &= x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $\theta = \omega_z t$ . 对上式求导, 可得敏感质量在绝对坐标系中的速度, 则敏感质量的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2). \tag{2}$$

考虑微机械陀螺的支承结构的三次非线性刚度<sup>[12]</sup>, 则其弹性势能为

$$V = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{4} \alpha_x x^4 + \frac{1}{4} \alpha_y y^4. \tag{3}$$

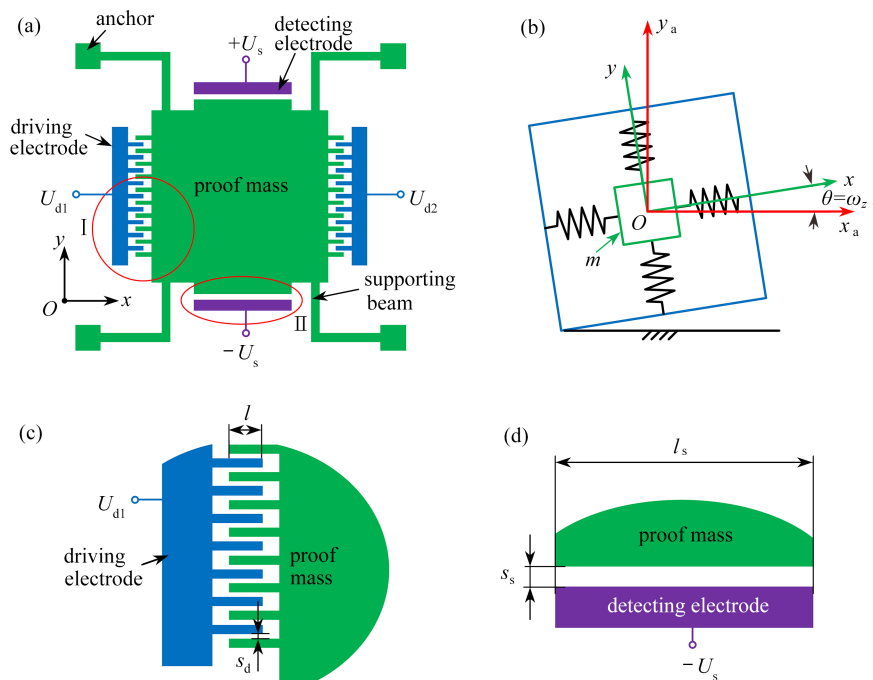


图 1 微机械陀螺结构示意图

Fig. 1 The schematic of the micro-machined gyroscope

考虑系统为真空封装, 可忽略气体阻尼, 只考虑结构阻尼, 则系统的 Rayleigh 耗散函数为

$$D = \frac{1}{2} c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \dot{y}^2. \tag{4}$$

根据 Lagrange 方程可求得微机械陀螺系统的动力学方程如下:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - 2m\omega_z \dot{y} + (k_x - m\omega_z^2)x + \alpha_x x^3 + c_x \dot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} + 2m\omega_z \dot{x} + (k_y - m\omega_z^2)y + \alpha_y y^3 + c_y \dot{y} = F_y, \end{cases} \tag{5}$$

其中  $F_x, F_y$  分别为驱动和检测方向的静电力, 其表达式如下<sup>[18]</sup>:

$$F_x = E_x \cos(\omega t), F_y = \frac{E_y y}{(s_s - y)^2 (s_s + y)^2}, \tag{6}$$

其中

$$E_x = \frac{4\eta U_d U_a n h}{s_d}, E_y = 2\eta S s_s U_s^2, \tag{7}$$

式中  $\eta$  为介电常数,  $U_d$  为驱动电压的直流部分,  $U_a$  为驱动电压的交流部分的幅值,  $U_s$  为检测电压,  $n$  为驱动梳齿对数,  $s_d$  为驱动梳齿间隙,  $h$  为驱动梳齿厚度,  $s_s$  为检测电极间隙,  $S$  为检测电极极板的面积. 考虑到  $k_x \gg m\omega_z^2, k_y \gg m\omega_z^2$ , 系统的动力学方程可简化为

$$\begin{cases} m\ddot{x} - 2m\omega_z \dot{y} + k_x x + \alpha_x x^3 + c_x \dot{x} = E_x \cos(\omega t), \\ m\ddot{y} + 2m\omega_z \dot{x} + k_y y + \alpha_y y^3 + c_y \dot{y} = \frac{E_y y}{(s_s - y)^2 (s_s + y)^2}. \end{cases} \tag{8}$$

定义  $X = x/r, Y = y/r, \tau = \omega_0 t$ , 其中  $\omega_0$  为检测方向的固有圆频率, 即  $\omega_0^2 = k_y/m$ ,  $r$  为与陀螺结构参数无关的常数, 对方程 (8) 进行无量纲化, 得

$$\begin{cases} X'' - GY' + \Omega_X^2 X + \beta_X X^3 + \xi_X X' = E_X \cos(\Omega\tau), \\ Y'' + GX' + Y + \beta_Y Y^3 + \xi_Y Y' = E_Y F_Y, \end{cases} \tag{9}$$

式中各无量纲系数的表达式如下:

$$F_Y = \frac{Y}{(S_s - Y)^2 (S_s + Y)^2}, S_s = \frac{s_s}{r}, G = \frac{2\omega_z}{\omega_0}, \Omega_X^2 = \frac{k_x}{m\omega_0^2}, \beta_X = \frac{\alpha_x r^2}{m\omega_0^2}, \beta_Y = \frac{\alpha_y r^2}{m\omega_0^2}, \\ \xi_X = \frac{c_x}{m\omega_0}, \xi_Y = \frac{c_y}{m\omega_0}, A_d = \frac{a_d}{\omega_0^2 r}, A_s = \frac{a_s}{\omega_0^2 r}, E_X = \frac{E_x}{m\omega_0^2 r}, E_Y = \frac{E_y}{\omega_0^2 m r^4}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

## 2 周期响应分析

本节利用谐波平衡法求解系统的周期响应, 设方程 (9) 的解为

$$\begin{cases} X = A_1 \cos(\Omega\tau) + A_2 \sin(\Omega\tau) = A_X \sin(\Omega\tau + \phi_1), \\ Y = B_1 \cos(\Omega\tau) + B_2 \sin(\Omega\tau) = A_Y \sin(\Omega\tau + \phi_2). \end{cases} \tag{10}$$

注意到  $F_Y$  为分式项, 要将其展开为如下 Fourier 级数形式方能进行计算:

$$F_Y = C_1 \cos(\Omega\tau) + C_2 \sin(\Omega\tau), \tag{11}$$

其中

$$C_1 = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} F_Y \cos(\Omega\tau) d\tau, \tag{12}$$

$$C_2 = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} F_Y \sin(\Omega\tau) d\tau. \tag{13}$$

这里采用留数定理求解各展开项的系数, 从而避免将  $F_Y$  展开为 Taylor 级数, 引起不必要的误差. 定义  $z = \exp(i\theta)$ , 其中  $\theta = \Omega\tau$ , 则

$$\cos\theta = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}. \tag{14}$$

将式 (14) 代入到式 (12) 中, 根据留数定理<sup>[19]</sup> 有

$$C_1 = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \frac{Y}{(S_s - Y)^2 (S_s + Y)^2} \cos(\Omega\tau) d\tau = \\ \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} f(z) dz = i \sum \text{Res}[f(z), z_k], \tag{15}$$

其中

$$f(z) = \frac{-4iz(1+z^2)(-iB_2z^2 + B_1z^2 + iB_2 + B_1)}{[iB_2(1-z^2) + B_1z^2 + B_1 - 2S_s z]^2 [iB_2(1-z^2) + B_1z^2 + B_1 + 2S_s z]^2},$$

$z_k$ 为包含在单位圆内 $f(z)$ 的孤立奇点. 被积函数只有2个二级极点在单位圆内, 分别是

$$z_1 = -\frac{-S_s + \sqrt{-B_1^2 - B_2^2 + S_s^2}}{-iB_2 + B_1}, z_2 = \frac{-S_s + \sqrt{-B_1^2 - B_2^2 + S_s^2}}{-iB_2 + B_1}, \tag{16}$$

于是有

$$\text{Res}[f(z), z_k] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_k)^m f(z_k)\}, \quad k = 1, 2, m = 2. \tag{17}$$

将上式代入式(15), 可得

$$C_1 = \frac{B_1}{(S_s^2 - B_1^2 - B_2^2)^{3/2}}.$$

同理可求得

$$C_2 = \frac{B_2}{(S_s^2 - B_1^2 - B_2^2)^{3/2}}.$$

将式(10)和(11)代入方程(9), 令等号左右两边同次谐波的系数相等可得

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\beta_X A_1 (A_1^2 + A_2^2) - A_1 \Omega^2 + A_1 \Omega_X^2 + A_2 \Omega \xi_X - B_2 G \Omega - E_X = 0, \\ \frac{3}{4}\beta_X A_2 (A_1^2 + A_2^2) - A_2 \Omega^2 + A_2 \Omega_X^2 - A_1 \Omega \xi_X + B_1 G \Omega = 0, \\ \frac{3}{4}\beta_Y B_1 (B_1^2 + B_2^2) + A_2 G \Omega - B_1 \Omega^2 + B_2 \Omega \xi_Y + B_1 - C_1 E_Y = 0, \\ \frac{3}{4}\beta_Y B_2 (B_1^2 + B_2^2) - A_1 G \Omega - B_2 \Omega^2 - B_1 \Omega \xi_Y + B_2 - C_2 E_Y = 0. \end{cases} \tag{18}$$

上式为无量纲方程(9)形如式(10)的稳态周期解满足的方程. 基于此可对微陀螺系统自身的结构参数对周期解的影响进行分析, 而周期解的稳定性可由 Floquet 理论进行判断.

在以下的分析中, 如无特殊说明, 各参数的取值如下:

$$\begin{aligned} m &= 0.01 \text{ g}, k_y = 1\,000 \text{ N/m}, k_x = 1\,050 \text{ N/m}, \alpha_x = \alpha_y = 3.0 \times 10^{12} \text{ N/m}^3, \\ c_x = c_y &= 1.5 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}, U_d = 100 \text{ V}, U_a = U_s = 50 \text{ V}, \eta = 8.858\,9 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \\ n &= 100, h = 50 \text{ }\mu\text{m}, r = 4 \text{ }\mu\text{m}, s_s = s_d = 4 \text{ }\mu\text{m}, S = 0.08 \text{ mm}^2, \omega_z = 50 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

图2给出了微机械陀螺系统的幅频特性曲线, 图中AS为解析解(其中实线表示稳定解, 虚线表示不稳定解), NSFI为频率增大时的数值解, NSFD为频率减小时的数值解, SBP为鞍结分岔点. 可以看到, 在曲线右侧存在两个鞍结分岔点, 当驱动频率增大或者减小时, 系统响应的振幅将发生跳跃. 图2也给出了随驱动频率增大和减小的 Runge-Kutta 法的数值计算结果, 可以看到数值解和解析解吻合得很好.

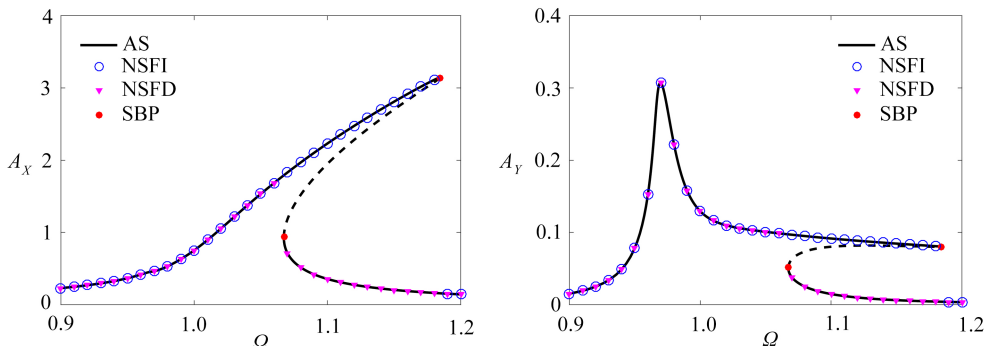


图2 微机械陀螺系统的幅频特性曲线

Fig. 2 The amplitude-frequency curves of the micro-machined gyroscope

### 3 驱动电极结构参数的影响

式(18)给出了系统的周期响应振幅与结构参数以及驱动参数之间的关系, 但实际上陀螺工作时检测的是

电容的变化量. 对应敏感质量在检测方向的位移振幅, 两检测电容的变化量分别为

$$\Delta C_1 = \frac{\eta S}{(S_s - A_Y)r} - \frac{\eta S}{S_s r},$$

$$\Delta C_2 = \frac{\eta S}{S_s r} - \frac{\eta S}{(S_s + A_Y)r}.$$

故对较小的 $A_Y$ , 检测电容变化量的计算公式为

$$\Delta C = \frac{\eta S A_Y}{S_s^2 r} \approx \Delta C_1 \approx \Delta C_2, \tag{19}$$

其中 $A_Y = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ . 利用同伦延拓法求解方程 (18), 代入式 (19) 可求得检测电容的变化量. 据此得到对应不同的驱动梳齿厚度和梳齿间隙, 检测电容的变化量随驱动力频率的变化曲线分别如图 3 和图 4 所示(其中实线表示稳定解, 虚线表示不稳定解, 后同). 不难看出, 检测电容变化量随驱动力频率的变化会呈现明显的非线性特征. 与一般的两自由度线性机械振动系统不同, 曲线中的第二个峰向右倾斜, 从而引起跳跃现象.

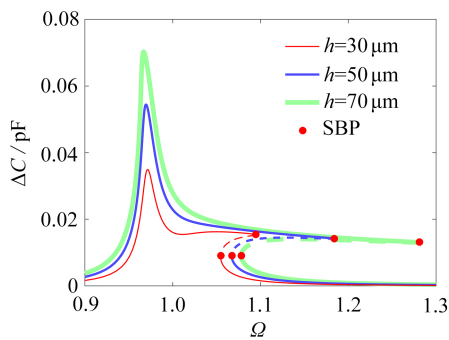


图 3 不同驱动电极梳齿厚度对应的检测电容变化量随驱动力频率的变化

Fig. 3 Variation of the detection capacitance with the driving force frequency for different thicknesses of driving electrode comb teeth

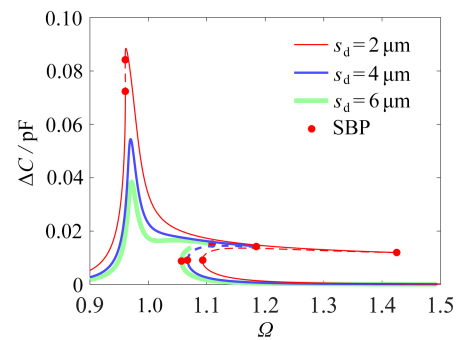


图 4 不同驱动电极梳齿间隙对应的检测电容变化量随驱动力频率的变化

Fig. 4 Variation of the detection capacitance with the driving force frequency for different gaps of driving electrode comb teeth

对应不同的驱动电极梳齿厚度和梳齿间隙, 检测电容的变化量随载体角速度的变化曲线如图 5 和图 6 所示. 可以看出, 驱动电极的梳齿厚度越大, 梳齿间隙越小, 电容变化这种微弱信号的量值越大, 所以从设计的角度, 应尽可能增加驱动电极的梳齿厚度, 而尽可能减小驱动电极的梳齿间隙. 从图 5 和图 6 还可以看出, 对应不同梳齿厚度和间隙, 检测电容变化量随载体旋转角速度变化曲线的斜率和线性程度都发生了变化, 在陀螺系统响应特性上分别表现为系统的机械灵敏度和非线性度. 为了对系统的电容灵敏度和非线性度进行分析, 设定系统的量程为 0~100 rad/s, 基于最小二乘法对检测电容变化量随载体旋转角速度的变化曲线进行线性拟合, 即令

$$\Delta C_1 = S_e \omega_z, \tag{20}$$

其中 $S_e$ 定义为电容灵敏度, 并定义非线性度为

$$\gamma = \frac{\max |\Delta C_1 - \Delta C|}{\max(\Delta C)}. \tag{21}$$

根据式 (20) 和 (21), 驱动电极的梳齿厚度对电容灵敏度和非线性度的影响分别如图 7 和图 8 所示. 从图 7 和图 8 可以看出, 电容灵敏度基本上随着驱动电极梳齿厚度的增加而线性增大; 但非线性度在梳齿厚度小于 40  $\mu\text{m}$  时变化不大, 大于此值后, 亦随着驱动电极梳齿厚度的增加而线性增大. 所以从设计的角度驱动电极的梳齿厚度的确定, 要兼顾电容灵敏度和非线性度的要求.

驱动梳齿间隙变化时, 电容灵敏度和非线性度的变化分别如图 9 和图 10 所示. 从图中不难看出, 电容灵敏度基本上随着驱动电极梳齿间隙的增加而线性减小; 但非线性度在梳齿厚度大于 4  $\mu\text{m}$  后变化不大; 小于此值前, 亦随着驱动电极梳齿间隙的增加而线性减小. 所以从设计的角度, 在确定驱动电极的梳齿间隙时, 与设计驱动电极的梳齿厚度类似, 也要兼顾电容灵敏度和非线性度的要求.

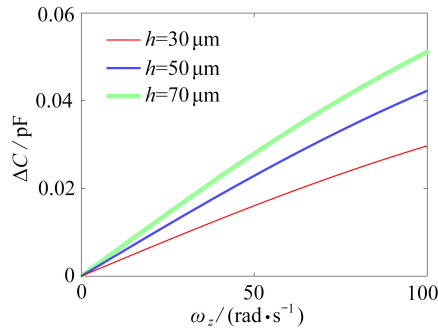


图5 不同驱动电极梳齿厚度对应的检测电容变化量随载体角速度的变化

Fig. 5 Variation of the detection capacitance with the carrier angular velocity for different thicknesses of driving electrode comb teeth

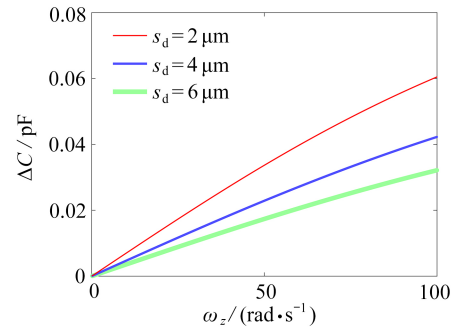


图6 不同驱动电极梳齿间隙对应的检测电容变化量随载体角速度的变化

Fig. 6 Variation of the detection capacitance with the carrier angular velocity for different gaps of driving electrode comb teeth

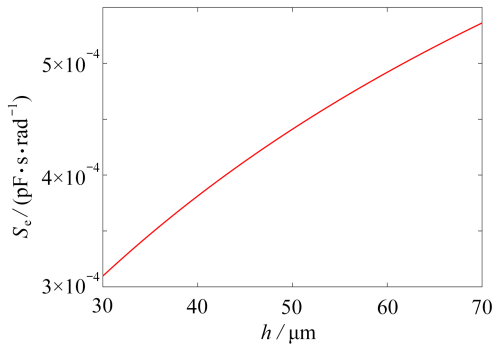


图7 电容灵敏度随驱动电极梳齿厚度的变化

Fig. 7 Variation of the sensitivity with the thickness of driving electrode comb teeth

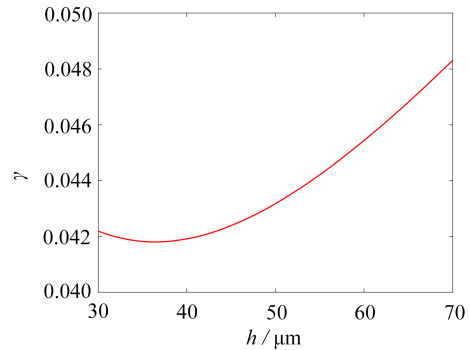


图8 非线性度随驱动电极梳齿厚度的变化

Fig. 8 Variation of the nonlinearity with the thickness of driving electrode comb teeth

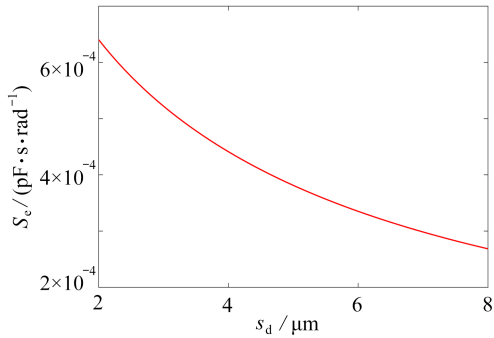


图9 电容灵敏度随驱动电极梳齿间隙的变化

Fig. 9 Variation of the sensitivity with the gap of driving electrode comb teeth

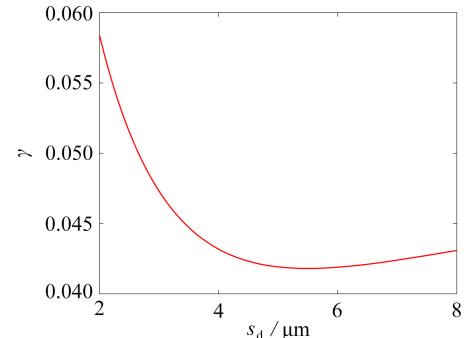


图10 非线性度随驱动电极梳齿间隙的变化

Fig. 10 Variation of the nonlinearity with the gap of driving electrode comb teeth

### 4 检测电极结构参数的影响

根据式 (18) 和 (19), 检测电极的结构参数亦对微机械陀螺的性能有直接影响, 所以下面给出检测电极的极板面积和极板间隙变化时, 电容变化量、电容灵敏度和非线性度的变化规律。

根据式 (18) 和 (19), 对应不同的检测电极极板面积和极板间隙, 检测电容的变化量随驱动力频率的变化曲线如图 11 和图 12 所示. 与图 3 和图 4 中所表现出的规律类似, 在驱动力频率较大时, 亦有跳跃现象发生。

对应不同的检测电极极板面积和极板间隙, 检测电容的变化量随载体角速度的变化曲线分别如图 13 和图 14 所示. 从图 13 和图 14 可以看出, 检测电极的极板面积变化对检测电容变化量的影响很小, 而检测电极



的极板间隙变化对检测电容变化量的影响则较大. 极板间隙越大, 电容变化这种微弱信号的量值也越大, 所以从设计的角度应尽可能增加检测电极的极板间隙.

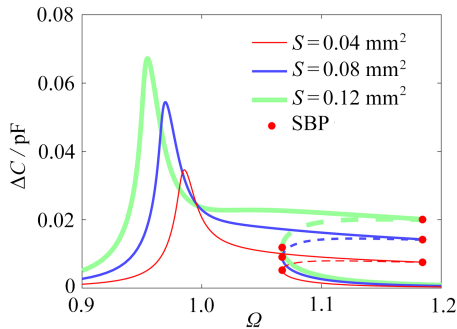


图 11 不同检测极板面积对应的检测电容变化量随驱动力频率的变化

Fig. 11 Variation of the detection capacitance with the driving force frequency for different detecting electrode plate areas

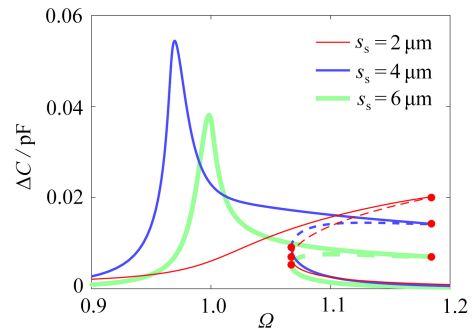


图 12 不同检测极板间隙对应的检测电容变化量随驱动力频率的变化

Fig. 12 Variation of the detection capacitance with the driving force frequency for different gaps between detecting electrode plates

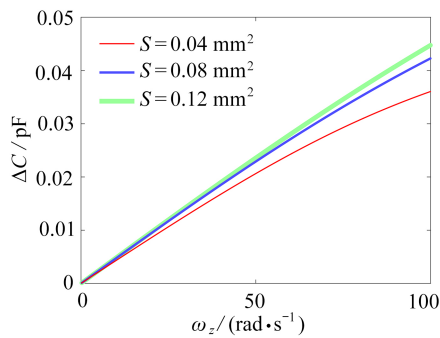


图 13 不同检测极板面积对应的检测电容变化量随载体角速度的变化

Fig. 13 Variation of the detection capacitance with the carrier angular velocity for different detecting electrode plate areas

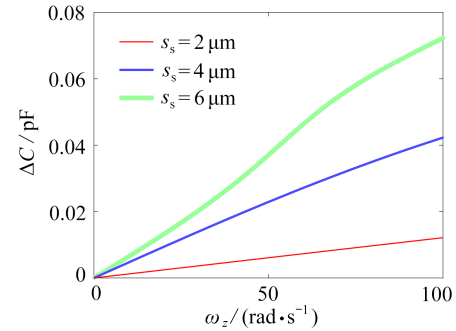


图 14 不同检测极板间隙对应的检测电容变化量随载体角速度的变化

Fig. 14 Variation of the detection capacitance with the carrier angular velocity for different gaps between detecting electrode plates

根据式 (20) 和 (21), 检测电极的极板面积对电容灵敏度和非线性度的影响分别如图 15 和图 16 所示, 可以看出电容灵敏度基本上随着检测电极极板面积的增加而线性增大, 但非线性度则随着检测电极极板面积的增加而线性减小, 所以设计的检测电极的极板面积应尽可能大.

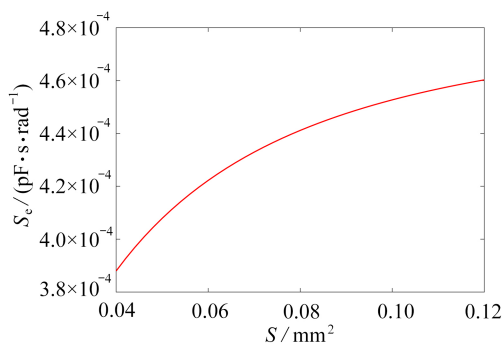


图 15 电容灵敏度随检测极板面积的变化

Fig. 15 Variation of the sensitivity with the detecting electrode plate area

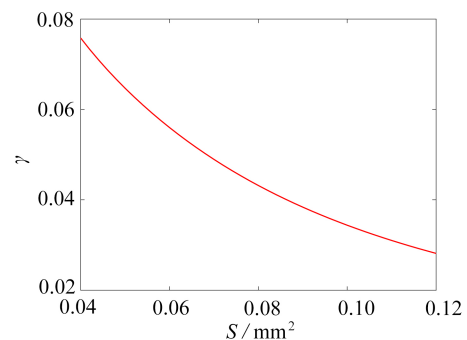


图 16 非线性度随检测极板面积的变化

Fig. 16 Variation of the nonlinearity with the detecting electrode plate area

检测电极的极板间隙对电容灵敏度和非线性度的影响分别如图 17 和图 18 所示. 从图 17 可以看出, 电容灵敏度随着检测电极极板间隙的增加而增大时, 会出现一个峰值, 此后, 电容灵敏度则随着检测电极极板间隙

的增加而减小.从图 18 可以看出,在一个范围内,非线性度随检测电极极板间隙的增加会出现波动,而在此范围以外,非线性度则随着检测电极极板间隙的增加而增大.

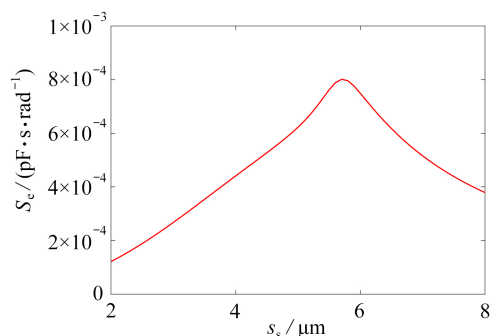


图 17 电容灵敏度随检测极板间隙的变化

Fig. 17 Variation of the sensitivity with the gap between detecting electrode plates

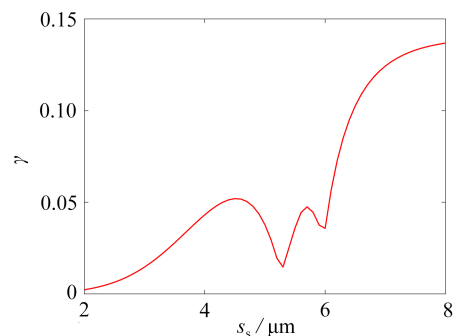


图 18 非线性度随检测极板间隙的变化

Fig. 18 Variation of the nonlinearity with the gap between detecting electrode plates

## 5 结 论

本文考虑支承刚度和检测静电力的非线性,利用谐波平衡法结合留数定理直接求解含分式项的两自由度动力学方程,得到了静电驱动微机械陀螺系统的周期响应,从而分析驱动电极的梳齿厚度和梳齿间隙以及检测电极的极板面积和极板间隙对系统幅频特性、电容灵敏度和非线性度等的影响,得到了如下结论:

1) 驱动和检测电极的结构参数无论如何变化,检测电容的变化量随驱动力频率的变化曲线都会呈现明显的非线性特征,即第二个峰向右倾斜,从而引起跳跃现象.

2) 检测电容的变化量基本上随着载体角速度的增大而线性增大,但驱动电极梳齿厚度、梳齿间隙和检测电极的极板间隙对检测电容变化量的影响较大,而检测电极极板面积的影响较小.

3) 电容灵敏度基本上随着驱动电极梳齿厚度和检测电极极板面积的增加而线性增大,随着驱动电极梳齿间隙的增加而线性减小.但其随着检测电极极板间隙的增加而增大时,会出现一个峰值.

4) 整体上说,非线性度随着驱动电极梳齿厚度的增加而线性增大,随着驱动电极梳齿间隙和检测电极极板面积的增加而线性减小,但在梳齿厚度较小和梳齿间隙较大时非线性度的变化不大.在一个范围内,非线性度的变化随检测电极极板间隙的增加会出现波动,而在此范围以外,非线性度则随着检测电极极板间隙的增加而增大.

## 参考文献(References):

- [1] GUO Z S, CHENG F C, LI B Y, et al. Research development of silicon MEMS gyroscopes: a review[J]. *Microsystem Technologies*, 2015, **21**(10): 2053-2066.
- [2] 杨波, 吴磊, 周浩, 等. 双质量解耦硅微陀螺仪的非理想解耦特性研究和性能测试[J]. 中国惯性技术学报, 2015, **23**(6): 794-799. (YANG Bo, WU Lei, ZHOU Hao, et al. Non-ideal decoupled characteristics' research and system performance test of dual-mass decoupled silicon micro-gyroscope[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2015, **23**(6): 794-799.(in Chinese))
- [3] ASOKANTHAN S F, WANG T. Nonlinear instabilities in a vibratory gyroscope subjected to angular speed fluctuations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, **54**(1/2): 69-78.
- [4] BRAGHIN F, RESTA F, LEO E, et al. Nonlinear dynamics of vibrating MEMS[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2007, **134**(1): 98-108.
- [5] MARTYNENKO Y G, MERKURIEV I V, PODALKOV V V. Dynamics of a ring micromechanical gyroscope in the forced-oscillation mode[J]. *Gyroscopy and Navigation*, 2010, **1**(1): 43-51.
- [6] MOJAHEDI M, AHMADIAN M T, FIROOZBAKHS K. The oscillatory behavior, static and dynamic analyses of a micro/nano gyroscope considering geometric nonlinearities and intermolecular forces[J]. *Acta Mechanica*

- Simica*, 2013, **29**(6): 851-863.
- [7] KACEM N, HENTZ S, BAGUET S, et al. Forced large amplitude periodic vibrations of non-linear Mathieu resonators for microgyroscope applications[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, **46**(10): 1347-1355.
- [8] LAJIMI S A M, HEPPLER G R, ABDEL-RAHMAN E M. Primary resonance of an amplitude-frequency-modulation beam-rigid body microgyroscope[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, **77**: 364-375.
- [9] 尚慧琳, 张涛, 文永蓬. 参数激励驱动微陀螺系统的非线性振动特性研究[J]. 振动与冲击, 2017, **36**(1): 102-107. (SHANG Huilin, ZHANG Tao, WEN Yongpeng. Nonlinear vibration behaviors of a micro-gyroscope system actuated by a parametric excitation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, **36**(1): 102-107.(in Chinese))
- [10] 文永蓬, 尚慧琳. 微陀螺动力学建模与非线性分析[J]. 振动与冲击, 2015, **34**(4): 69-73. (WEN Yongpeng, SHANG Huilin. Dynamic modeling and nonlinear analysis for a microgyroscope[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**(4): 69-73.(in Chinese))
- [11] 郝淑英, 李会杰, 张辰卿, 等. 检测刚度非线性对双检测微陀螺灵敏度稳定性影响[J]. 振动与冲击, 2018, **37**(24): 46-52. (HAO Shuying, LI Huijie, ZHANG Chenqing, et al. Influence of sense stiffness nonlinearity on the sensitivity stability of a double-sense micro-gyroscope[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, **37**(24): 46-52.(in Chinese))
- [12] 郝淑英, 李伟雄, 李会杰, 等. 驱动刚度非线性对双检测微陀螺性能的影响[J]. 振动与冲击, 2019, **38**(14): 131-137. (HAO Shuying, LI Weixiong, LI Huijie, et al. Effect of driving stiffness nonlinearity on the performance of a double sense-mode micro gyroscope[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38**(14): 131-137.(in Chinese))
- [13] HAMED Y S, EL-SAYED A T, EL-ZAHAR E R. On controlling the vibrations and energy transfer in MEMS gyroscope system with simultaneous resonance[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **83**(3): 1687-1704.
- [14] AWREJCEWICZ J, STAROSTA R, SYPNIEWSKA-KAMIŃSKA G. Complexity of resonances exhibited by a nonlinear micromechanical gyroscope: an analytical study[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, **97**(3): 1819-1836.
- [15] TSAI N C, SUE C Y. Stability and resonance of micro-machined gyroscope under nonlinearity effects[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, **56**(4): 369-379.
- [16] NITZAN S H, TAHERI-TEHRANI P, DEFOORT M, et al. Countering the effects of nonlinearity in rate-integrating gyroscopes[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, **16**(10): 3556-3563.
- [17] LESTEV M A, TIKHONOV A A. Nonlinear phenomena in the dynamics of micromechanical gyroscopes[J]. *Vestnik St Petersburg University: Mathematics*, 2009, **42**(1): 53-57.
- [18] LEE K B. *Principles of Micro Electromechanical System*[M]. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons International Rights, 2011.
- [19] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013. (ZHONG Yuquan. *Complex Variable Theory*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2013. (in Chinese))