http://www.applmathmech.cn

多目标优化问题 McRow 最优解的刻画*

赵春杰，　高　英，　刘芙萍

(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要： 基于多目标优化问题的 McRow 模型,该文确定了 W- 鲁棒有效解(也称为 McRow 最优解)与弱有效解、有效解以及真有效解的关系.首先，针对确定多目标优化问题,研究了 W- 鲁棒有效解与各种精确解的关系.随后,针对随机多目标优化问题,引进 McRow 最优解的概念,给出了它与其余各种解的关系.算例表明,利用 McRow 模型所得到的解更具有鲁棒性.

关　键　词： 多目标优化；　随机多目标优化；　鲁棒优化；　McRow 最优解

中图分类号： O221.6　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.410338

Equivalent Characterization of McRow Optimal Solutions to Multiobjective Optimization Problems

ZHAO Chunjie，　GAO Ying，　LIU Fuping

(*School of Mathematical Sciences*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 401331, *P.R.China*)

Abstract: Based on the McRow model for multiobjective optimization problems, the relationships between the W-robust efficient solution (also known as the McRow optimal solution) and the weakly efficient solution, the efficient solution and the properly efficient solution were established. Firstly, the relationship between the W-robust efficient solution and various exact solutions to multiobjective optimization problems was studied. Then, the concept of the McRow optimal solution to stochastic multiobjective optimization problems was introduced, and the relationship between the McRow optimal solution and other solutions was given. The examples show that, the solutions obtained with the McRow model are of better robustness.

Key words: multiobjective optimization; stochastic multiobjective optimization; robust optimization; McRow optimal solution

引　　言

多目标优化问题为极大化或极小化多个目标函数的优化问题,它在很多领域,如金融、交通和航天等有

* **收稿日期：** 2020-11-05；**修订日期：** 2021-01-13

基金项目： 国家自然科学基金(11771064;11991024);重庆市科学技术研究重点项目(KJZD-K202001104);重庆市高校创新研究群体项目(CXQT20014);重庆市留学人员回国创业创新支持计划(cx2020096)

作者简介： 赵春杰(1995—),男,硕士生(E-mail：Zcj296020056@163.com)；
高英(1982—),女,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail：gaoyingimu@163.com)；
刘芙萍(1975—),女,馆员,硕士(E-mail：lfp751214@163.com).

引用格式： 赵春杰，高英，刘芙萍. 多目标优化问题 McRow 最优解的刻画[J]. 应用数学和力学，2021，**42**(6)：602-610.

着广泛的应用.多目标优化问题的研究最早可以追溯到 18 世纪.1772 年,Franklin 提出了多目标优化问题如何协调的问题.1896 年,Pareto 首次从数学的角度提出了多目标优化决策问题[1].1951 年,数理经济学家 Koopamans 引入了有效解的定义并得到了一些基本的结果,为多目标最优化学科奠定了初步的基础[2].同年,Kuhn 和 Tucker 从数学规划的角度,给出了多目标优化问题 Pareto 最优解的概念,并研究了它的充分与必要条件[3].在多目标优化问题中,决策者需要同时考虑几个相互冲突的目标, 它们一般不可能同时达到最优.在多目标优化问题的求解中最常见、最简单的方法为给每个目标函数分配权重,将其转化为线性加权标量化问题,并将此方法称之为线性标量化方法[4].对于多个决策者的多目标优化问题,由于每个决策者的观点不同,想要使每个决策者都得到一个满意解不容易实现.为了解决该问题,文献[5]针对多个决策者的多目标优化问题利用权重鲁棒性建立了 McRow 模型,并将 McRow 问题的解称为多目标优化问题的 W- 鲁棒有效解或 McRow 最优解,并分别给出了当权重集合 W 是多面体区域和圆锥区域时 McRow 的等价形式.同时,针对随机多目标优化问题,在权重集合受随机变量影响的情况下,给出了随机多目标优化问题的 McRow 模型及其等价形式.

本文受文献[5]的启发,进一步研究了多目标优化问题、随机多目标优化问题的 W- 鲁棒解与弱有效解和真有效解的关系.本文安排如下:第 1 节给出基本概念和已知结论;第 2 节利用多目标优化问题的弱有效解与 Benson 真有效解的概念,给出了 McRow 最优解的一个充分性刻画;第 3 节将其关系推广到随机变量分布已知的随机优化问题中,通过算例说明在随机多目标优化问题中,通过 Sr-McRow 所得到的解比层次分析法所得到的解更具有鲁棒性;第 4 节给出了本文的结论.

1　预备知识

设 R^n 是 n 维 Euclid 空间, R^n_+ 是它的非负象限,$S \subset R^n$ 为非空子凸集,$I = \{1,2,\cdots,m\}$ 为指标集,$W_{\mathrm{f}} = \{\boldsymbol{\omega} \in R^m_+ \mid \sum_{i=1}^m \omega_i = 1\}$ 表示权重集,$W \subset W_{\mathrm{f}}$.对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^n$, 引进如下序关系:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, && \forall i = 1,2,\cdots,n,\\
&\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i > y_i, && \forall i = 1,2,\cdots,n,\\
&\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \geqq y_i, && \forall i = 1,2,\cdots,n,\\
&\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \geqq y_i, && \forall i = 1,2,\cdots,n,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$ 为 S 上的向量值映射,文献[6-7]中针对向量值映射给出了如下广义凸性概念.

定义 1　(i) 称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为集合 S 上的锥似凸映射,若对于任意的 $\lambda \in (0,1)$ 和 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in S$,存在 $\boldsymbol{x}_3 \in S$, 使得

$$\lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3) \in R^m_+.$$

(ii) 称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在集合 $S \subset R^n$ 上是锥次似凸映射, 如果存在 $\boldsymbol{\theta} \in \operatorname{int} R^m_+$,对任意的 $\lambda \in (0,1)$, $\forall \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in S$ 和 $\epsilon > 0$,存在 $\boldsymbol{x}_3 \in S$, 使得

$$\epsilon\boldsymbol{\theta} + \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3) \in R^m_+.$$

(iii) 称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在集合 $S \subset R^n$ 上是邻近锥次似凸映射,若 $\operatorname{clcone}(\boldsymbol{f}(S) + R^n_+)$ 是凸集.

文献[8-9]中给了锥似凸映射、锥次似凸的等价形式,即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 锥似凸 $\Leftrightarrow \boldsymbol{f}(S) + R^m_+$ 是凸集,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 锥次似凸 $\Leftrightarrow \boldsymbol{f}(S) + \operatorname{int} R^m_+$ 是凸集.

下面引进多目标优化问题

$$(\mathrm{MOP})\quad \min_{\boldsymbol{x}\in S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

的弱有效解、有效解和真有效解的概念.

定义 2[4]　设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$.

(i) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为 MOP 的弱有效解,若不存在 $\boldsymbol{x} \in S$,使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即

$$(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap (-\operatorname{int} R^m_+) = \varnothing.$$

(ii) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为 MOP 的有效解,若不存在 $\boldsymbol{x} \in S$,使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即

$$(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-R_{+}^{m})=\{0\}.$$

(iii) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 被称之为 MOP 的 G-真有效解,若存在实数 $M>0$,使得对满足 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\boldsymbol{x}^*)$ 的每一个 $i\in I$ 和 $\boldsymbol{x}\in S$,至少存在一个满足 $f_j(\boldsymbol{x})>f_j(\boldsymbol{x}^*)$ 的 $j\in I\backslash\{i\}$,使得

$$\frac{f_i(\boldsymbol{x}^*)-f_i(\boldsymbol{x})}{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}^*)}\leqslant M.$$

(iv) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为 MOP 的 Benson 真有效解,若

$$\operatorname{clcone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+R_{+}^{m})\cap(-R_{+}^{m})=\{0\}.$$

注 1　文献[4]中给出了 G-真有效解等价于 Benson 真有效解.

考虑如下的线性标量化问题:

$$(\mathrm{WSO})\qquad \min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

其中　　$\boldsymbol{\omega}\in W_{\mathrm{f}}$.

文献[10-11]给出了广义凸性条件下 MOP 问题的各种解与 WSO 问题最优解的关系.

引理 1　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$.

(i) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 S 上的锥次似凸映射, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MOP 的弱有效解,当且仅当存在 $\boldsymbol{\omega}\in W_{\mathrm{f}}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 WSO 问题的最优解.

(ii) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 S 上的邻近锥次似凸映射,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MOP 问题的真有效解,当且仅当存在 $\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0},\boldsymbol{\omega}\in W_{\mathrm{f}}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 WSO 问题的最优解.

(iii) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 S 上的锥次似凸映射,$\boldsymbol{\omega}\geqslant\boldsymbol{0}$,$\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 WSO 问题的唯一最优解,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MOP 问题的有效解;若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不唯一, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MOP 问题的弱有效解.

对于多个决策者的多目标优化问题,由于每个决策者偏好不同,故其权重集合一般不是单点集.针对此情况,文献[5]利用权重鲁棒性,建立了如下 McRow 模型:

$$(\mathrm{McRow})\qquad \min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

将 McRow 最优解称为 MOP 的 W- 鲁棒解,或 McRow 最优解;同时,文献[5]又给出了 McRow 最优解与 MOP 弱有效解、有效解以及真有效解的关系和 McRow 最优解的等价刻画.

引理 2[5]　设 $W\subset W_{\mathrm{f}}$ 为闭集,$\boldsymbol{x}^*$ 为 McRow 的最优解,则

(i) $\boldsymbol{x}^*$ 为 MOP 的弱有效解.

(ii) 若 $\forall\boldsymbol{\omega}\in W,\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0}$,或者若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 McRow 唯一的最优解,则 $\boldsymbol{x}^*$ 为 MOP 的有效解.

(iii) 若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 McRow 唯一的最优解,并且对 $\forall\boldsymbol{\omega}\in W,\omega_i>0,\forall i\in I$, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 MOP 的真有效解.

引理 3[5]　设 $S\subset R^n,W\subset R_{+}^{m}$,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 McRow 的最优解,当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in\operatorname{conv}W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

的最优解.

引理 4[5]　若 W 是多面体,$\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\cdots,\boldsymbol{\omega}_m$ 是 W 的极点,则 McRow 的解等价于如下形式的解:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x},\zeta}\zeta,\\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{\omega}_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqslant\zeta,\qquad i=1,2,\cdots,n,\\ \qquad\ \boldsymbol{x}\in S.\end{cases}$$

2　多目标优化问题的解与 McRow 最优解的关系

本节我们将给出确定多目标优化问题的解与 McRow 最优解的关系.

2.1　多目标优化问题的弱有效解与 McRow 最优解的关系

定理 1　设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 $S\subset R^n$ 上的锥次似凸映射,若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 MOP 的弱有效解,则存在闭凸集 $W\subset W_{\mathrm{f}}$,使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 McRow 最优解.

证明　若 $\bar{x}$ 为 MOP 的弱有效解,则

$$(f(S)-f(\bar{x}))\cap -\operatorname{int}R_+^m=\varnothing.$$

由 $f(x)$ 是锥似凸映射可得 $f(S)-f(\bar{x})+\operatorname{int}R_+^m$ 是凸集,故由凸集分离定理可知,存在 $\omega\in W_f$,使得

$$\omega^{\mathrm{T}}[f(x)-f(\bar{x})]\geqslant 0,\qquad \forall x\in S,$$

即

$$\omega^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant\omega^{\mathrm{T}}f(\bar{x}),\qquad \forall x\in S.$$

故 $\bar{x}$ 为 $\min_{x\in S}\omega^{\mathrm{T}}f(x)$ 的最优解.

令 W 为满足以上所有 ω 的全体.若 W 是单点集时,则 W 是闭凸集;若 W 不是单点集,则至少存在 $\omega_1\neq\omega_2,\omega_1,\omega_2\in W$,使得 $\bar{x}$ 为 $\min_{x\in S}\omega_1^{\mathrm{T}}f(x)$ 的最优解,同时也为 $\min_{x\in S}\omega_2^{\mathrm{T}}f(x)$ 的最优解.

下面证明 W 是凸集.任取 $\forall\lambda\in(0,1)$,下面证明 $\lambda\omega_1+(1-\lambda)\omega_2\in W$.由 $\bar{x}$ 为最优解可知

$$\begin{cases}\omega_1^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant\omega_1^{\mathrm{T}}f(\bar{x}), & \forall x\in S,\\ \omega_2^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant\omega_2^{\mathrm{T}}f(\bar{x}), & \forall x\in S.\end{cases}$$

由 $\lambda\in(0,1)$ 可知

$$\begin{cases}\lambda\omega_1^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant\lambda\omega_1^{\mathrm{T}}f(\bar{x}), & \forall x\in S,\\ (1-\lambda)\omega_2^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant(1-\lambda)\omega_2^{\mathrm{T}}f(\bar{x}), & \forall x\in S.\end{cases}$$

将上式相加可得

$$[\lambda\omega_1+(1-\lambda)\omega_2]^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant[\lambda\omega_1+(1-\lambda)\omega_2]^{\mathrm{T}}f(\bar{x}).$$

这表明 $\lambda\omega_1+(1-\lambda)\omega_2\in W$.因此 W 是凸集.

再证明 W 是闭集.任取 $\omega_n\in W,\omega_n\to\omega$,下面证明 $\omega\in W$.事实上

$$\langle\omega,f(x)-f(\bar{x})\rangle=\langle\lim_{n\to\infty}\omega_n,f(x)-f(\bar{x})\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\omega_n,f(x)-f(\bar{x})\rangle\geqslant 0.$$

所以 $\omega\in W$,即 W 是闭集.

综上所述,存在闭凸集 W 使得 $\bar{x}$ 是 $\min_{x\in S}\omega^{\mathrm{T}}f(x),\forall\omega\in W$ 的最优解,即 $\bar{x}$ 为 McRow 最优解.　□

下面通过一个例子来说明定理 1 的合理性.

例 1　在 MOP 中,令 $p=2,S=\mathbf{R}$,且 $f:S\to T^2$ 定义为

$$f_1(x)=x_1,\ f_2(x)=x_2.$$

容易验证,$\bar{x}=(0,0)$,$\bar{x}=(x_1,0)$,$\bar{x}=(0,x_2)$ 都是弱有效解.

(i) 当 $\bar{x}=(0,0)$ 时,存在超平面 $H=\{x\in R^2\mid\omega\in W_f,\omega_1x_1+\omega_2x_2=0\}$ 使得 $f(S)-f(\bar{x})+\operatorname{int}R_+^2$ 与 $-R_+^2$ 可用超平面 H 分离,如图 1 所示.容易验证,对该问题定理 1 中的 $W=\{\omega\in R_+^2\mid\omega_1+\omega_2=1\}$.

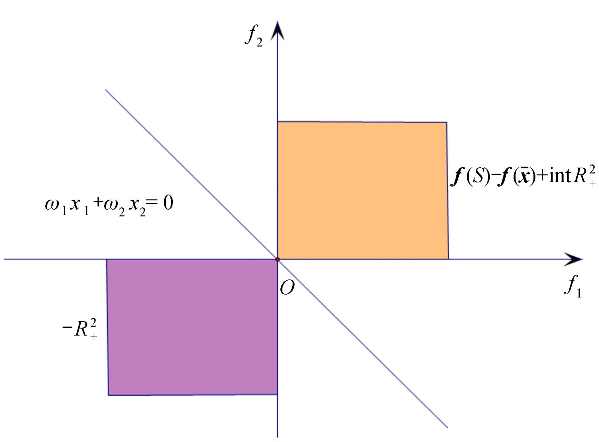

图 1　$f(S)-f(\bar{x})+\operatorname{int}R_+^2,-R_+^2(\bar{x}=(0,0))$

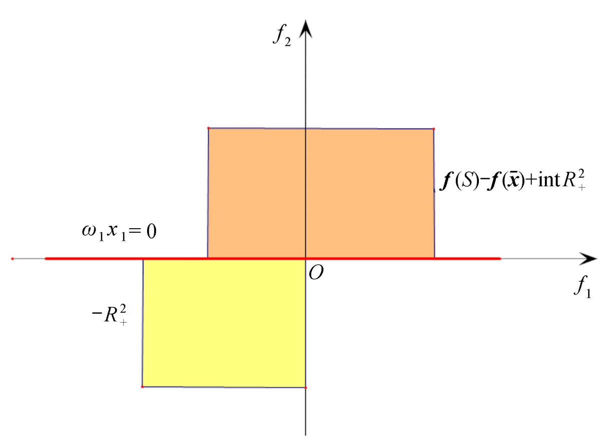

图 2　$f(S)-f(\bar{x})+\operatorname{int}R_+^2,-R_+^2(\bar{x}=(x_1,0))$

(ii) 当 $\bar{x}=(x_1,0)$ 时,存在一个超平面 $H=\{x\in R^2\mid\omega\in W_f,\omega_1x_1=0\}$ 使得 $f(S)-f(\bar{x})+\operatorname{int}R_+^2$ 与 $-R_+^2$ 被 H 分离,如图 2 所示.此时 $W=\{\omega\in R_+^2\mid\omega_1=0,\omega_2=1\}=\{(0,1)\}$.

(iii) 当 $\bar{\boldsymbol{x}}=(0,x_2)$ 时，存在一个超平面 $H=\{\boldsymbol{x}\in R^2\mid \boldsymbol{\omega}\in W_{\mathrm{f}},\omega_2x_2=0\}$，使得 $\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+\mathrm{int}\,R_+^2$ 与 $-R_+^2$ 被 H 分离，如图 3 所示.此时 $W=\{\boldsymbol{\omega}\in R_+^2\mid \omega_1=1,\omega_2=0\}=\{(1,0)\}$.

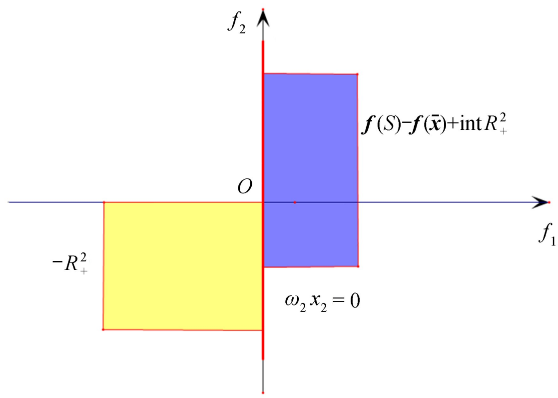

图 3　$\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+\mathrm{int}\,R_+^2$, $-R_+^2(\bar{\boldsymbol{x}}=(0,x_2))$

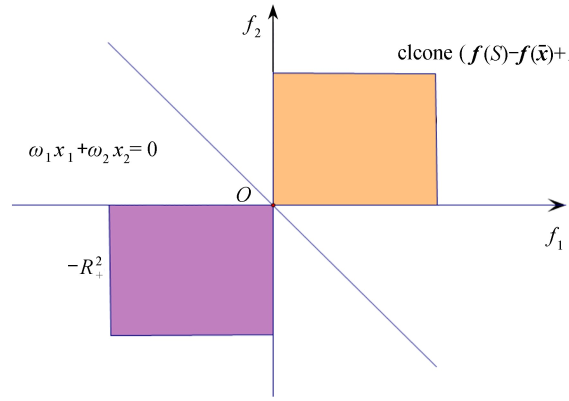

图 4　$\mathrm{clcone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+R_+^2)$, $-R_+^2$

2.2　多目标优化问题的真有效解与 McRow 最优解的关系

定理 2　设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是 S 上的邻近锥次似凸映射.若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 MOP 的 Benson 真有效解，则存在闭凸集 $W\subset W_{\mathrm{f}}$，使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 McRow 最优解.

证明　因为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 MOP 的 Benson 真有效解，则

$$\mathrm{clcone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+R_+^m)\cap -R_+^m=\{0\}.$$

由 $\boldsymbol{f}$ 邻近锥次似凸映射[12] 可知 $\mathrm{clcone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+R_+^m)$ 是凸集，从而由引理 1 可知存在 $\boldsymbol{\omega}\in W_{\mathrm{f}},\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0}$ 使得

$$\langle \boldsymbol{\omega},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{d}\rangle\geqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{x}\in S,\ \forall \boldsymbol{d}\in R_+^m.$$

特别地，取 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ 可得

$$\langle \boldsymbol{\omega},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\rangle\geqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{x}\in S,$$

即

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\geqslant \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}),\qquad \forall \boldsymbol{x}\in S.$$

从而 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 $\min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的最优解.

由定理 1 中证明 W 是闭凸集类似可得 W 也是一个闭凸集.

综上所述，存在闭凸集 W，使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 McRow 的最优解.　□

可以借助例 1 来说明定理 2 的合理性.

容易验证 $\bar{\boldsymbol{x}}=(0,0)$ 是 MOP 的 Benson 真有效解，则存在超平面 $H=\{\boldsymbol{x}\in R^2\mid \boldsymbol{\omega}\in W,\omega_1x_1+\omega_2x_2=0\}$，使得 $\mathrm{clcone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+R_+^2)$ 与 $-R_+^2$ 分离，如图 4 所示.其中 $W=\{\boldsymbol{\omega}\in R_+^2\mid \omega_1+\omega_2=1\}$.

3　随机多目标优化问题的 McRow 最优解

在经典的多目标优化问题中，各种数据和信息都是被假定为绝对精确，目标函数和约束函数都假定被严格的定义并有良好的数学表示.然而在很多实际问题中都存在着许多不确定因素，这导致使用确定优化的方法解决带有不确定因素的问题并不合理，因此，不确定多目标优化问题就被有关学者提了出来.其中，不确定多目标优化问题分为两大类，一类是随机多目标优化问题，而另一类则是随着模糊集理论的产生与发展而提出的模糊多目标优化问题.

本文考虑如下随机多目标优化(SMP)问题：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)=(F_1(\boldsymbol{x},\xi),F_2(\boldsymbol{x},\xi),\cdots,F_m(\boldsymbol{x},\xi))^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$，ξ 是定义在概率空间 $(\boldsymbol{\Omega},\mathcal{F},\boldsymbol{P})$ 上的随机变量，并且 ξ 的分布是已知的，故可考虑 SMP 对应的如下确定优化问题(SMPE)：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S} E(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi))=(\bar{F}_1(\boldsymbol{x}),\bar{F}_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\bar{F}_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}},$$

其中 $E(F_i(\boldsymbol{x},\xi))=\bar{F}_i(\boldsymbol{x})$, $\forall i\in I$, 并通过确定优化问题最优解给出随机优化问题如下期望值解的概念.

定义 3[13]　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$.

(i) 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题 SMPE 的弱有效解,则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 SMP 的期望值弱有效解.

(ii) 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题 SMPE 的有效解,则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 SMP 的期望值有效解.

(iii) 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题 SMPE 的 G-真有效解,则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 SMP 的期望值 G-真有效解.

为得到确定化多目标优化问题的解,最常用的方法之一就是线性加权法.若将线性加权法用到 SMP[11] 中,那么 SMP 就转化为如下随机单目标优化问题:

$$(\mathrm{SSMP})\qquad \min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\sum_{i=1}^{m}\omega_i F_i(\boldsymbol{x},\xi),$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$ 是权重系数,$\omega_i\geqslant 0$, $\forall i\in I$.由于随机变量 ξ 的分布是已知, 则可将 SSMP 转化为确定单目标优化问题:

$$(\mathrm{SSMPE})\qquad \min_{\boldsymbol{x}\in S}E(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi))=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi))=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

注 2

$$E(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi))=E\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_iF_i(\boldsymbol{x},\xi)\right)=\sum_{i=1}^{m}E(\omega_iF_i(\boldsymbol{x},\xi))=\sum_{i=1}^{m}\omega_iE(F_i(\boldsymbol{x},\xi))=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi))=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

定理 3　设 $\boldsymbol{x}^*\in S$ 为 SSMPE 的一个可行解.

(i) 若 $\boldsymbol{x}^*$ 为 SSMPE 的最优解,且 $\boldsymbol{\omega}\in R_{+}^{m}$,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMP 的期望值弱有效解.

(ii) 若 $\boldsymbol{x}^*$ 为 SSMPE 的最优解,且 $\boldsymbol{\omega}\in R_{++}^{m}$, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMP 的期望值有效解.

(iii) 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)$ 是凸函数,且 S 是凸集,若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMP 期望值 G-真有效解,则存在 $\boldsymbol{\omega}\in W_{\mathrm{f}}$,$\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0}$,使得 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SSMPE 的最优解.

证明　(i) 因为 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SSMPE 的最优解,并且 $\boldsymbol{\omega}\in R_{+}^{m}$ 由引理 1 可知,$\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的有效解,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMP 的期望值有效解;(ii)、(iii)证明类似.　□

3.1　随机多目标优化问题的解与 McRow 最优解的关系

接下来我们考虑随机多目标优化问题 SMP 的 McRow 模型,并将 McRow 最优解称为 SMPE 的 Pareto 最优解,记为 Sr-McRow.本文中,我们所考虑的权重集 W 是与随机变量无关的闭集,那么 Sr-McRow 可表示为

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}E(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)).$$

下面我们将给出随机多目标优化问题的 McRow 最优解与随机多目标优化问题解的一些关系.

定理 4　设 $W\subset W_{\mathrm{f}}$ 是一个闭子集,若 $\boldsymbol{x}^*\in S$ 是 Sr-McRow 的最优解,则

(i) $\boldsymbol{x}^*$ 为 SMPE 的弱有效解,即为 SMP 的期望值弱有效解.

(ii) 若 $\forall\boldsymbol{\omega}\in W$,$\boldsymbol{\omega}\in R_{++}^{m}$,则 $\boldsymbol{x}^*$ 为 SMPE 的有效解, 即为 SMP 的期望值有效解.

(iii) 若 $\boldsymbol{x}^*$ 的唯一最优解,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的有效解,即为 SMP 的期望值有效解.

(iv) 在(iii)成立的情况下,若 $\forall\boldsymbol{\omega}\in W$,$\boldsymbol{\omega}\in R_{++}^{m}$,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的 G-真有效解, 即为 SMP 的期望值 G-真有效解.

证明　(i) 若 x^* 不是 SMPE 的弱有效解,则存在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$,$\bar{\boldsymbol{x}}\neq\boldsymbol{x}^*$,有 $\bar{F}_i(\bar{\boldsymbol{x}})<\bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*)$, $\forall i\in I$, 故有

$$\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}})<\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*).$$

又因为

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})<\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}),\ \max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}),$$

故有

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})<\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}})<\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

这与 $\boldsymbol{x}^*$ 是 Sr-McRow 的最优解矛盾,因此 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的弱有效解,即为 SMP 的期望值弱有效解.

(ii) 假设 $\boldsymbol{x}^*$ 不是 SMPE 的有效解,则存在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S, \bar{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}^*$,有 $\bar{F}_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant \bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*)$, $\forall i \in I$, $\exists j \neq i, \bar{F}_j(\bar{\boldsymbol{x}}) < \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)$,又因为 $\boldsymbol{\omega} \in R^m_{++}$,则

$$\max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}) < \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*).$$

又因为

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) < \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}), \quad \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in S} \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}),$$

从而有

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) < \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}) < \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in S} \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

这与 $\boldsymbol{x}^*$ 是 Sr-McRow 的最优解矛盾,因此 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的有效解,即为 SMP 的期望值有效解.

(iii) 如果 $\boldsymbol{x}^*$ 不是 SMPE 的有效解,则存在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S, \bar{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}^*$,有 $\bar{F}_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant \bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*)$, $\forall i \in I$, $\exists j \neq i, \bar{F}_j(\bar{\boldsymbol{x}}) < \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)$,又因为 $\boldsymbol{\omega}$ 不是严格正的,则

$$\max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant \max_{\boldsymbol{\omega} \in W} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*).$$

由此可知 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 Sr-McRow 的另一个最优解,则与 $\boldsymbol{x}^*$ 是唯一的最优解矛盾.

(iv) 由(ii)可知,$\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的有效解,下面证明 $\boldsymbol{x}^*$ 是 G-真有效解.

令 $k = (m-1) \max_{\substack{\boldsymbol{\omega} \in W \\ i,\, j \in I}} (\omega_j / \omega_i)$,根据 $\boldsymbol{\omega}$ 的定义可知,存在一个常数 $\epsilon > 0$,使得

$$\epsilon \leqslant \omega_i < 1, \qquad i \in I,$$

由 $k = (m-1) \max_{\substack{\boldsymbol{\omega} \in W \\ i,\, j \in I}} (\omega_j / \omega_i)$ 可知

$$k < (m-1)/\epsilon.$$

假设 $\boldsymbol{x}^*$ 不是 G-真有效解,则对无论多大的 $M > 0$,总存在 $\boldsymbol{x} \in S$ 与 i,使得 $\bar{F}_i(\boldsymbol{x}) < \bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*)$ 的同时,对任意满足 $\bar{F}_j(\boldsymbol{x}) > \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)$ 的 j, $j \neq i$, $i, j \in I$,有

$$\frac{\bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*) - \bar{F}_i(\boldsymbol{x})}{\bar{F}_j(\boldsymbol{x}) - \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)} > M.$$

特别地,取 $M = k$,则有

$$\bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*) - \bar{F}_i(\boldsymbol{x}) > k(\bar{F}_j(\boldsymbol{x}) - \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)).$$

根据 k 的构造可知

$$\bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*) - \bar{F}_i(\boldsymbol{x}) > (m-1)\frac{\omega_j}{\omega_i}(\bar{F}_j(\boldsymbol{x}) - \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)),$$

再两边同时乘以 $\omega_i/(m-1) > 0$ 可得

$$\frac{\omega_i}{m-1}(\bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*) - \bar{F}_i(\boldsymbol{x})) > \omega_j(\bar{F}_j(\boldsymbol{x}) - \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)), \qquad j \neq i,\ j \in I.$$

将所有 j 可能的取值都相加起来,则可得

$$\omega_i(\bar{F}_i(\boldsymbol{x}^*) - \bar{F}_i(\boldsymbol{x})) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \omega_j(\bar{F}_j(\boldsymbol{x}) - \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*)),$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \bar{F}_j(\boldsymbol{x}^*) > \sum_{j=1}^{m} \omega_j \bar{F}_j(\boldsymbol{x}),$$

即

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*) > \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

又根据 $\boldsymbol{\omega}$ 的任意性可知

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)=\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)>\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})\geqslant\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{\omega}\in W}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}).$$

这与 $\boldsymbol{x}^*$ 是最优解矛盾,因此 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的 G-真有效解, 即为 SMP 的期望值 G-真有效解. □

与第 2 节中定理 1、定理 2 的证明类似,针对确定化后的优化问题可以建立如下结果.

定理 5 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)$ 是 S 上的锥次似凸映射,若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的弱有效解,则存在闭凸子集 $W\subset W_{\mathrm{f}}$,使得 $\boldsymbol{x}^*$ 是 Sr-McRow 的最优解.

定理 6 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)$ 是 S 上的邻近锥次似凸映射.若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SMPE 的 Benson 真有效解,则存在闭凸子集 $W\subset W_{\mathrm{f}}$,使得 $\boldsymbol{x}^*$ 是 Sr-McRow 的最优解.

例 2 考虑如下随机优化问题:

$$(\mathrm{SMP})\quad \min_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\xi)=(F_1(\boldsymbol{x},\xi),F_2(\boldsymbol{x},\xi),F_3(\boldsymbol{x},\xi)),$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1,$$
$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},$$

其中 $\xi\sim N(0,\delta)$, 且随机变量只在目标函数中出现,并且有

$$F_1(\boldsymbol{x},\xi)=-11x_2-11x_3-(12-\xi)x_4-9x_5-9x_6+9x_7,$$
$$F_2(\boldsymbol{x},\xi)=-11x_1-11x_3-(9+4\xi)x_4-(12+\xi)x_5-(9-4\xi)x_6+9x_7,$$
$$F_3(\boldsymbol{x},\xi)=-11x_1-11x_2-9x_4-(9-4\xi)x_5-(12-\xi)x_6-12x_7.$$

将其确定化之后就等价于求解文献[7,14]中的例子,如下所示:

$$(\mathrm{SMPE})\quad \min_{\boldsymbol{x}\in S}\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})=(\bar{F}_1(\boldsymbol{x}),\bar{F}_2(\boldsymbol{x}),\bar{F}_3(\boldsymbol{x})),$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1,$$
$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},$$

其中

$$\bar{F}_1(\boldsymbol{x})=-11x_2-11x_3-12x_4-9x_5-9x_6+9x_7,$$
$$\bar{F}_2(\boldsymbol{x})=-11x_1-11x_3-9x_4-12x_5-9x_6+9x_7,$$
$$\bar{F}_3(\boldsymbol{x})=-11x_1-11x_2-9x_4-9x_5-12x_6-12x_7.$$

根据引理 3、引理 4 可求得确定化后的一个 Sr-McRow 的最优解为 $\boldsymbol{x}^*=(0,0,0,0.6,0.4,0,0)$,与文献中层次分析法所得到的解 $\boldsymbol{x}_1=(0,0,0,0,1,0,0)$,$\boldsymbol{x}_2=(0,0,0,1,0,0,0)$ 相比,Sr-McRow 所得到的解更具有鲁棒性.

4 结 论

对于多决策者的多目标优化问题,本文在广义凸性的条件下给出了多目标优化问题的解与 McRow 最优解的关系,即在锥次似凸的条件下多目标优化问题的弱有效解可推出 McRow 最优解,在邻近锥次似凸的条件下多目标优化问题的 Benson 真有效解可推出 McRow 最优解,并且将该结论推广到随机多目标优化问题中,并通过算例说明利用 McRow 模型所得到的解更具有鲁棒性.

参考文献(References):

[1] PARETO V. *Cours d'Economie Politique*[M]. Lausanne: Librairie Droz, 1896.

[2] KOOPMANS C. *Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1951.

[3] KUHN H W, TUCKER A W. *Nonlinear Programming*[M]. Berkeley: University of California Press, 1951.

[4] SAWARAGI Y, NAKAYAMA H, TANINO T. *Theory of Multiobjective Optimization*[M]. London: Academic Press, 1985.

[5] HU J, MEHROTRA S. Robust andstochastically weighted multiobjective optimization models and reformula-

tions[J]. *Operations Research*, 2012, **60**(4): 936-953.

[6] 杨新民, 戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2016.(YANG Xinmin, RONG Weidong. *Generalized Convexity With Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2016.(in Chinese))

[7] 杨新民, 陈光亚. 向量优化问题的线性标量化方法和 Lagrange 乘子研究[J]. 中国科学: 数学, 2020, **50**(2): 253-268.(YANG Xinmin, CHEN Guangya. The linear scalarizations and Lagrange multipliers for vector optimization[J]. *Science China: Mathematics*, 2020, **50**(2): 253-268.(in Chinese))

[8] JEYAKUMAR V. A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternative[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1986, **48**(3): 525-533.

[9] HAYASHI M, KOMIYA H. Perfect duality for convexlike programs[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1982, **38**(2): 179-189.

[10] 仇秋生. 集值映射的广义凸性与集值最优化[D]. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2009.(QIU Qiusheng. The generalized convexity of set-valued maps and set-valued optimization[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai University, 2009.(in Chinese))

[11] 徐玖平, 李军. 多目标决策的理论与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.(XU Jiuping, LI Jun. *Multiple Objective Decision Making Theory and Methods*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.(in Chinese))

[12] YANG X M, LI D, WANG S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, **110**(2): 413-427.

[13] 卢志义. 随机多目标规划有效解理论的研究[D]. 硕士学位论文. 西安: 西安建筑科技大学, 2005.(LU Zhiyi. Studies on the effecient solution theory for stochastic multiobjective programming[D]. Master Thesis. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2005.(in Chinese))

[14] KORHONEN P, SALO S, STEURE R. A heuristic for estimating nadir criterion values in multiple objective linear programming[J]. *Operations Research*, 1997, **45**(5): 751-757.