

不同索力斜拉索的主共振瞬时相频特性

邓正科, 孙测世, 杨汝东

Transient Primary Resonance Phase-Frequency Characteristics of Stay Cables With Different Tensions

DENG Zhengke, SUN Ceshi, and YANG Rudong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420033>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

时滞影响下受控斜拉索的参数振动稳定性

Parametric Vibration Stability of Controlled Stay Cables With Time Delays

应用数学和力学. 2017, 38(2): 181-188

一种基于非弹性收缩量的斜拉桥调索混合整数优化模型

A Mixed Integer Optimization Model Based on Inelastic Contraction for Cable Adjustment of Cable-Stayed Bridges

应用数学和力学. 2020, 41(12): 1336-1345

一类含五次非线性恢复力的Duffing系统共振与分岔特性分析

Analysis of Resonance and Bifurcation Characteristics of Some Duffing Systems With Quintic Nonlinear Restoring Forces

应用数学和力学. 2019, 40(10): 1122-1134

一维气液两相漂移模型全隐式AUSMV算法研究

Research on the Implicit AUSMV Algorithm for the 1D Gas-Liquid Two-Phase Drift Flux Model

应用数学和力学. 2019, 40(4): 386-397

线载和弹性支承作用面内运动薄板磁固耦合双重共振

Double Resonance of Magnetism-Solid Coupling of in-Plane Moving Thin Plates With Linear Loads and Elastic Supports

应用数学和力学. 2021, 42(7): 713-722

移动载荷作用下轴向运动载流梁的参强联合共振

Combined Parametric and Forced Resonance of Axially Moving and Current-Carrying Beams Under Moving Loads

应用数学和力学. 2018, 39(3): 266-277



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

不同索力斜拉索的主共振瞬时相频特性*

邓正科, 孙测世, 杨汝东

(重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

摘要: 考虑拉索垂度及几何非线性, 研究了不同索力拉索的瞬时相频特性. 利用斜拉索面内分布激励下的运动控制方程, 采用多尺度法对微分方程进行摄动求解, 分别得到面内、外主共振响应的近似解析式, 再采用 Hilbert 变换得到响应与激励的瞬时相位差及其幅值. 研究了不同索力下, 响应与激励的瞬时相位差的变化规律及其原因. 研究表明: 面外主共振响应与激励间保持恒定的相位差, 而面内响应与激励的瞬时相位差与索弹性参数和垂度等有关, 微小的索力变化可能导致瞬时相频特性的明显改变. 主要原因是面内响应的近似解中存在两倍频项和漂移项, 前者使响应瞬时相位在单个周期内出现两次正负交替, 后者决定面内响应与激励瞬时相位差的最大值及其变化规律.

关键词: 斜拉索; 主共振; 瞬时相频特性; 瞬时相位差; 漂移项

中图分类号: U448.27; O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420033

Transient Primary Resonance Phase-Frequency Characteristics of Stay Cables With Different Tensions

DENG Zhengke, SUN Ceshi, YANG Rudong

(School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China)

Abstract: The transient phase-frequency characteristics of stay cables with different cable forces were studied in view of the cable sag and geometric nonlinearity. The method of multiple scales was used to solve the ordinary differential equations of motion for cables subjected to in-plane distributed excitations, and the approximate analytical expressions of in-plane and out-of-plane primary resonance responses were obtained respectively. Then, the transient phase difference and its amplitude between the response and the excitation were obtained through the Hilbert transform. The rule and reason for the transient phase difference between the response and the excitation under different cable forces were studied. The results show that, the phase difference between the out-of-plane response and the excitation is constant, while for the in-plane one it is related to the elastic parameters and the sag of the cable. A small change in cable tension may result in a significant change in the transient phase-frequency characteristics. The main reason is that there are a twice-frequency term and a drift term in the approximate solution of the in-plane response, the former makes the transient phase of response appear twice positive-negative alternations in a single cycle, and the latter determines the maximum value and the variation law of the transient phase difference between the in-plane response and excitation.

Key words: stay cable; primary resonance; transient phase-frequency characteristic; transient phase difference; drift term

* 收稿日期: 2021-01-28; 修订日期: 2021-05-09

基金项目: 国家自然科学基金(51808085)

作者简介: 邓正科(1994—), 男, 硕士生 (E-mail: 1550487720@qq.com);

孙测世(1985—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: suncs@hnu.edu.cn);

杨汝东(1995—), 男, 硕士生 (E-mail: 1393977428@qq.com).

引用格式: 邓正科, 孙测世, 杨汝东. 不同索力斜拉索的主共振瞬时相频特性[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(11): 1126-1135.

引 言

索结构是一类有广泛应用的基本受力结构^[1], 其具有轻、柔以及高强度等特性, 极易在风荷载、端部位移荷载等外激励作用下, 产生各种不同机理的振动^[2]. 微小参数差异极易引起拉索振动特性的变化^[3], 且多根拉索或索与梁共同工作时, 还会引起索与索间、索与梁间的耦合振动^[4-5], 进而引发一系列危害, 其中邻索“碰撞问题”随着长索的发展变得愈发严重. 世界上多座斜拉桥均发生过拉索碰撞事件^[6-7], 且造成了 PE 护套破裂、雨罩损坏、高强螺栓断裂等多种破坏^[8-9], 从而受到广泛关注.

碰撞产生的原因, 一是大幅振动, 二是振动反相, 前者是幅频特性的反映, 后者是相频特性的反映. 因此, 相频特性是碰撞产生的必要条件之一. 已有的研究表明, 响应与激励的相位差与激励频率有关^[10-11]. 多模态下, 结构不同模态之间的相位差也受激励频率的影响^[12]. Bossens 和 Preumont^[13] 进行了大尺寸的主动控制模型试验, 他们给予拉索主动端部激励, 并测得拉索索力变化规律. 结果表明: 端部激励与拉索索力响应之间的相位差也受激励频率的影响. 文献^[14] 进行了斜拉桥全桥模型试验, 验证了索与梁、索与索之间均存在耦合现象, 同时发现当激励频率达到一定值时, 多根索发生大幅振动, 相邻索的振动间均存在一定相位差, 导致邻索之间产生碰撞. 除此之外, 赵兆冰等^[15] 建立考虑温度变化影响的多频激励下悬索模型, 通过选取三组垂跨比及两组温度变化进行数值分析, 证明了联合共振响应相位与温度变化密切相关.

对其他类似结构的研究则表明相频特性与结构参数有关, 其中最为典型的是 Huygens 摆: 在同一根水平横梁上安装两个质量不同的摆钟. 横梁沿水平方向运动, 使两个摆钟呈现出同相或反向运动, 甚至出现混沌^[16]. Wu 等^[17] 从理论和实验证明了双摆最终状态与初值和摩擦阻尼力的关系; Czolczynski 等^[18] 对同一刚性梁上的若干个 Van der Pol 摆的同步性进行了研究, 利用能量平衡的近似分析推导出同步条件下摆阵之间的相位差, 发现各摆之间的相位角因扰动而改变; Kapitaniak 等^[19] 研究了水平激励平台上两个平面弹性摆的动力学行为, 证明了稳定的同相同步状态和反相同步状态始终共存, 并给出从同步运动到异步运动的完全分岔情形.

综上, 系统响应相位差与激励频率及结构参数相关. 然而在“碰撞问题”中相位差的瞬时变化规律及其变化成因尤为重要. 因此, 本文研究了不同索力拉索瞬态相频特性及其变化成因, 分析了漂移项和两倍频成分对瞬时相位差的影响规律.

1 力学模型与多尺度分析

1.1 基本假定

建立如图 1 所示斜拉索的非线性动力学模型, 图中拉索两端铰接, 分布力方向垂直于拉索弦线方向.

为简化分析过程, 做如下假设: (a) 斜拉索的抗弯刚度足够地小以至于可以忽略不计; (b) 斜拉索只承受拉力; (c) 斜拉索在振动过程中的轴向应变足够小; (d) 只考虑几何非线性, 而不考虑其他非线性.

斜拉索振动采用局部坐标 $Oxyz$ 来描述: O 为坐标原点, x 为斜拉索弦线方向, y 为索面内垂直弦线的方向, z 为侧向 (即面外), x, y, z 方向对应位移分别用 u, v, w 表示.

1.2 振动方程的建立

考虑拉索初始垂度与几何非线性, 斜拉索两端铰接. 利用 Hamilton 原理得到斜拉索非线性振动动力学方程^[20]:

$$m\ddot{u} + c_u\dot{u} - EA\left(u' + y'v' + \frac{v'^2 + w'^2}{2}\right)' = 0, \quad (1a)$$

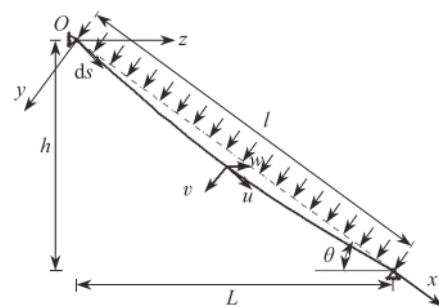


图 1 分布外激励下斜拉索振动简化模型

Fig. 1 Simplified model of vibration of cable under distributed external excitation

$$m\ddot{v} + c_v\dot{v} - Hv' - EA \left[(y' + v') \left(u' + y'v' + \frac{v'^2 + w'^2}{2} \right) \right]' = 0, \quad (1b)$$

$$m\ddot{w} + c_w\dot{w} - Hw' - EA \left[w' \left(u' + y'v' + \frac{v'^2 + w'^2}{2} \right) \right]' = 0, \quad (1c)$$

其中 m 为单位长度质量, c_u , c_v 和 c_w 分别为 u , v 和 w 方向的阻尼, H 为拉索静张力, E 为拉索弹性模量, A 为拉索截面积, $()'$ 和 $()$ 分别表示对 x 和 t 的导数. 斜拉索的静变形曲线方程为

$$y(x) = \frac{mgL\cos\theta}{2H} \times (1-x)x \left[1 - \frac{mgL\sin\theta}{H} \times \frac{(1-2x)}{3} \right]. \quad (2)$$

假定拉索轴向运动是准静态的, 忽略高阶无穷小量, 拉索无量纲控制方程如下^[21]:

$$\ddot{v} + c_v\dot{v} - \frac{v'}{\pi^2} - \frac{\alpha}{\pi^2} (y' + v') \int_0^1 \left(y'v' + \frac{v'^2 + w'^2}{2} \right) dx = 0, \quad (3a)$$

$$\ddot{w} + c_w\dot{w} - \frac{w'}{\pi^2} - \frac{\alpha}{\pi^2} w' \int_0^1 \left(y'v' + \frac{v'^2 + w'^2}{2} \right) dx = 0. \quad (3b)$$

在无量纲过程中, 为计算方便省略 “*” 号, 其中无量纲变换如下:

$$\begin{cases} x^* = \frac{x}{l}, y^* = \frac{y}{l}, w^* = \frac{w}{l}, v^* = \frac{v}{l}, t^* = t \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}}, c_i^* = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{1}{mH}} c_i & (i = w, v), \\ \Omega^* = \Omega \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{m}{H}}, k^* = \frac{l}{H} k, \alpha = \frac{EA}{H}. \end{cases} \quad (4)$$

1.3 离散化模型

1.3.1 面内运动

在分布外激励作用下, 拉索的运动为纯模态运动^[22], 因此令

$$v(x, t) = \Phi_v \mathbf{q}_v, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{q}_v = [q_{v1}, q_{v2}, \dots, q_{vn}]^T, \quad \Phi_v = [\phi_{v1}, \phi_{v2}, \dots, \phi_{vn}],$$

式中 Φ_v 为索面内振动的模态振型函数, \mathbf{q}_v 为面内运动的广义时间坐标.

采用一阶模态截断, 令面内一阶振型函数为^[23]

$$\phi_{v1} = \frac{h}{\pi^2 \omega^2} \left\{ (1 - \xi + 2\xi x) - \left[\tan\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) + \frac{\xi}{\tan(\pi\omega/2)} \right] \sin(\pi\omega x) - (1 - \xi) \cos(\pi\omega x) \right\}, \quad (6)$$

式中 $\xi = mgl \cdot \sin\theta / (H \sec\theta)$, h 为附加索力轴向分力.

将式 (5) 和式 (6) 代入式 (3a), 利用 Galerkin 方法得到离散模型:

$$\ddot{q}_v + c_v \dot{q}_v + \omega_v^2 q_v - \frac{3\alpha}{2\pi^2} P U q_v^2 + \frac{\alpha}{2\pi^2} P^2 q_v^3 = F_v \cos(\Omega_v t + \vartheta_v). \quad (7)$$

1.3.2 面外运动

同理, 面外运动也为纯模态运动:

$$w(x, t) = \Phi_w \mathbf{q}_w, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{q}_w = [q_{w1}, q_{w2}, \dots, q_{wn}]^T, \quad \Phi_w = [\phi_{w1}, \phi_{w2}, \dots, \phi_{wn}].$$

采用一阶模态截断, 令面外一阶振型函数为

$$\phi_{w1} = \sqrt{2} \sin(\pi x). \quad (9)$$

将式 (8) 和式 (9) 代入式 (3b), 利用 Galerkin 方法得到离散模型:

$$\ddot{q}_w + c_w \dot{q}_w + \omega_w^2 q_w + \frac{\alpha}{2\pi^2} Q^2 q_w^3 = F_w \cos(\Omega_w t + \vartheta_w), \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} \omega_w^2 = \frac{1}{\pi^2} Q, \omega_v^2 = \frac{1}{\pi^2} (P + U^2), U = \int_0^1 \phi_{v1} y'' dx = - \int_0^1 \phi'_{v1} y' dx, \\ P = \int_0^1 \phi_{v1}^2 dx = - \int_0^1 \phi_{v1}'' \phi_{v1} dx, Q = \int_0^1 \phi_{w1}^2 dx = - \int_0^1 \phi_{w1}'' \phi_{w1} dx. \end{cases}$$

1.4 摄动分析

基于多尺度法对式 (7) 求响应近似解, 令 $q_i(t, \varepsilon) = \varepsilon q_{i0}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{i1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 q_{i2}(T_0, T_1, T_2)$, 其中 $i=v, w, T_n = \varepsilon^n t, n=0, 1, 2, 3, \dots$, 并使得 $\Omega_i = \omega_i + \varepsilon^2 \sigma_i, i=v, w$.

代入面内公式 (7) 中进行多尺度摄动, 按照 ε 的幂次进行整理, 可以得到下列方程:

$$\varepsilon : D_0^2 q_{v0} + \omega_v^2 q_{v0} = 0, \tag{11a}$$

$$\varepsilon^2 : D_0^2 q_{v1} + \omega_v^2 q_{v1} = -2D_0 D_1 q_{v0} - \frac{3\alpha}{2\pi^2} U P q_{v0}^2, \tag{11b}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : D_0^2 q_{v2} + \omega_v^2 q_{v2} = & -2D_0 D_1 q_{v1} - D_1^2 q_{v0} - 2D_0 D_2 q_{v0} - 2\mu_v D_0 q_{v0} + \\ & \frac{3\alpha}{\pi^2} U P q_{v0} q_{v1} - \frac{\alpha}{2\pi^2} P^2 q_{v0}^3 + F_v \cos(\Omega_v t + \vartheta_v). \end{aligned} \tag{11c}$$

从而解得面内运动方程的近似解为

$$q_v = a_v \cos(\Omega_v t - \lambda_v - \vartheta_v) + \frac{3\varepsilon\alpha a_v^2 \omega_v^{-2}}{4\pi^2} U P \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\Omega_v t - 2\lambda_v - 2\vartheta_v) \right]. \tag{12}$$

同理, 可得到面外 ε 的各阶方程:

$$\varepsilon : D_0^2 q_{w0} + \omega_w^2 q_{w0} = 0, \tag{13a}$$

$$\varepsilon^2 : D_0^2 q_{w1} + \omega_w^2 q_{w1} = -2D_0 D_1 q_{w0}, \tag{13b}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : D_0^2 q_{w2} + \omega_w^2 q_{w2} = & -2D_0 D_1 q_{w1} - D_1^2 q_{w0} - 2D_0 D_2 q_{w0} - 2\mu_w D_0 q_{w0} - \\ & \frac{\alpha}{2\pi^2} Q^2 q_{w0}^3 + F_w \cos(\Omega_w t + \vartheta_w). \end{aligned} \tag{13c}$$

解得面外运动方程近似解为

$$q_w = a_w \cos(\Omega_w t - \lambda_w - \vartheta_w) + O(\varepsilon^2). \tag{14}$$

由式 (12) 和式 (14) 可知, 面外近似解仅存在一阶项, 受参数影响, 相位呈现出整体相移的变化特征, 即响应与激励相差具有恒定的相位差. 而面内近似解中, 还存在后两项的影响^[24]. 第一项为漂移项, 使得响应时程曲线整体上下移动; 第二项为两倍频项. 瞬时相频特性因受到后两项的影响变得更加复杂. 因此后文将通过实例对其展开详细研究.

2 实例分析与讨论

2.1 不同索力下的响应

选取 Pont de Normandie 桥^[25] 的典型索为研究对象, 基本参数如表 1 所示. 将索参数代入式 (12) 中, 采用 MATLAB 进行数值分析, 从而得出不同索力对瞬时相频特性的影响规律.

表 1 Normandie 桥索参数
Table 1 Cable parameters of the Normandie bridge

l/m	$m/(kg \cdot m^{-1})$	H/kN	A/m^2	E/Pa	$\theta(^{\circ})$	C
440	136	8 000	1.53×10^{-2}	1.9×10^{11}	17.5	0.001

通过独立改变拉索索力 H 参数, 绘制出四种不同索力的时程曲线图 (时间取 50~75) 以及激励时程曲线, 如图 2 所示. 四种索力 H 分别为 6 500 kN, 7 000 kN, 8 000 kN, 9 000 kN, 激励频率 $\Omega_v=1$, 幅值 $F_v=0.01$, 初相位 $\vartheta_v=0$.

由图 2 可知, 索力为 6 500 kN 时, 时程曲线整体下移, 且时程曲线下峰值处线型明显上凸. 随着索力增大, 上凸值与漂移量均在减小. 由式 (12) 可知这是由于高阶项的影响, 时程曲线整体下移是漂移项存在的结果, 而

曲线下峰值处线型明显上凸是由于两倍频的影响.当高阶项系数较小时时程曲线近似谐波形式,如图2中索力为7 000 kN,8 000 kN,9 000 kN时的时程曲线.取6 500 kN和7 000 kN进行频谱分析,如图3所示,索力为6 500 kN时两倍频振幅占比约为28%,而索力为7 000 kN时仅为13.3%.

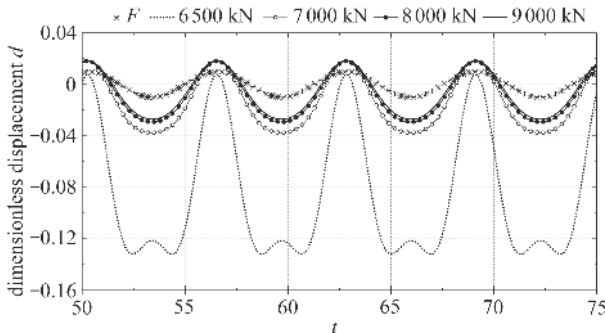


图2 响应时程曲线

Fig. 2 Response time history curves

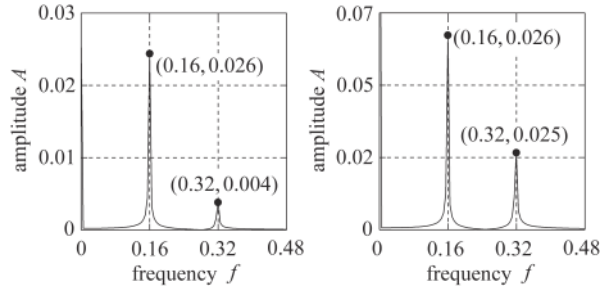


图3 频谱图

Fig. 3 Spectrum diagrams under different cable tensions

可见,索力变化引起频率成分的变化,从而对响应时程曲线线型有较大的影响,由此可以推测瞬时相频特性亦会因其改变.

2.2 激励与响应瞬时相位差

通过对响应与激励的时程曲线分别进行 Hilbert变换得到其瞬时相位,再对同一时刻的响应瞬时相位与激励瞬时相位做差,得到响应与激励的瞬时相位差值.考虑差值在 $[-\pi, \pi]$ 间变化,为便于分析和比较,体现其一般性,故定义无量纲参数:

$$p = \frac{\Delta p}{\pi}, \quad \Delta p \in [-\pi, \pi], \tag{15}$$

其中, Δp 为拉索响应瞬时相位与激励瞬时相位之差.以时间为横坐标, p 为纵坐标,绘制出如图4所示瞬时相位差时程曲线图.

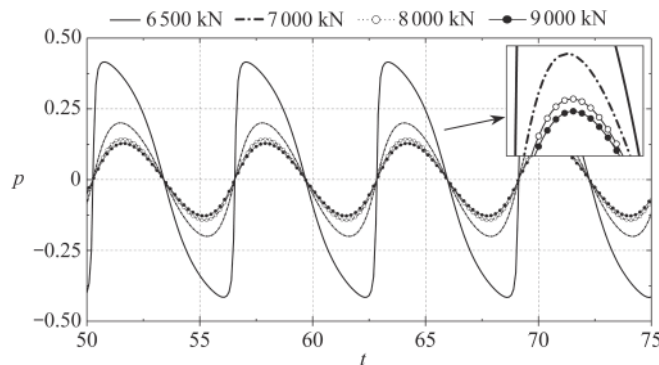


图4 瞬时相位差时程曲线

Fig. 4 Time history curves of the transient phase difference

图4中 p 时程曲线呈现周期性,变化周期与响应周期相等.对比四种索力下的 p 时程曲线,可见,索力为6 500 kN时 p 时程曲线峰值最大,达到0.41,而索力为7 000 kN,8 000 kN,9 000 kN时最大值仅在0.2左右.从线型可以看出,索力为6 500 kN时, p 值的时程曲线从最小值变化到最大值时有一个跳跃式变化阶段,然后再由最大值逐渐减小到最小值.随着索力的增大 p 时程曲线趋于平缓.

不难发现, p 也受到 H 变化的影响,同时 p 随时间变化过程中幅值往往是关注的重点,为便于进一步对 p 的幅值进行研究,再定义一个新的无量纲参数:

$$p_{\max} = \frac{\Delta p_{\max}}{\pi}, \tag{16}$$

其中, Δp_{\max} 为 Δp 的幅值. 后续分析中均考察 p, p_{\max} 的变化规律, 用以讨论不同索力参数对拉索主共振下的瞬时相频特性的影响.

考虑拉索需满足小变形假设, 即垂跨比 $f < 0.1$. 取索力范围为 [4 500 kN, 9 000 kN], 变化间隔为 100 kN. 通过逐一改变激励频率, 得到各索力在激励频率变化下对应的 p_{\max} 值. 绘制出 p_{\max} 在 $H-\Omega_v$ 平面上的投影图, 如图 5 所示, 其中为满足主共振取频率变化区间为 [0.9, 1.2], 间隔 0.01.

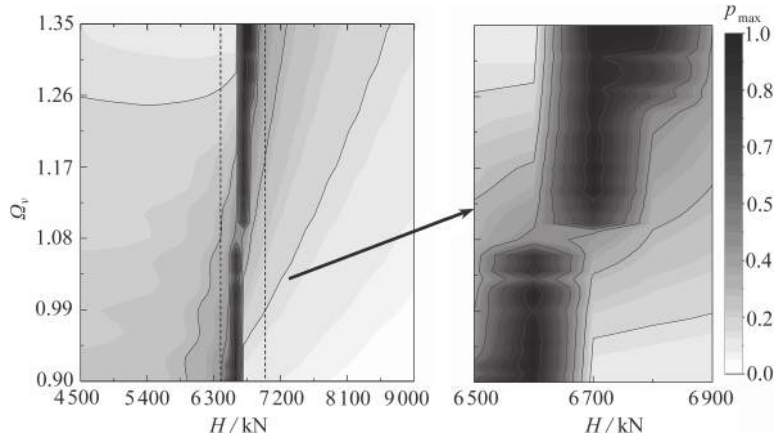


图 5 p_{\max} 在 $H-\Omega_v$ 平面投影

Fig. 5 Projection of p_{\max} in the $H-\Omega_v$ plane

由图 5 可知, 在 H 区间 [6 400 kN, 6 900 kN] 内, p_{\max} 急剧增加至接近 1 (相位差接近 π), Ω_v 对 p_{\max} 的影响在此区间内较大, 在此区间外较小, 可见 Ω_v 对瞬时相位差的影响程度也受到索力条件的约束. 同时由图 5 可知 H 区间 [6 400 kN, 6 900 kN] 是 p_{\max} 随激励频率的变化特征改变的临界区间. p_{\max} 随 Ω_v 的增大在左区间内 ($H \leq 6 400$ kN) 减小, 在右区间内 ($H \geq 6 900$ kN) 增大. 分别在两个区间内等间距 (500 kN) 取三个索力下 $p_{\max}-\Omega_v$ 变化曲线, 如图 6 所示, 在 $H \leq 6 400$ kN 时, 随 Ω_v 增大, 各索力下 p_{\max} 均减小至 0.15 左右; 而当 $H \geq 6 900$ kN 时, p_{\max} 的变化趋势反向, 各索力下 p_{\max} 由 0.15 左右逐渐增大.

从以上分析可知瞬时相频特性随索力变化的规律, 对此展开进一步分析索力如何影响瞬时相位的变化. 取图 5 中 $\Omega_v=1$ 时 $p_{\max}-H$ 的变化曲线, 如图 7 所示, p_{\max} 在索力为 6 600 kN 邻域内出现峰值 (峰值接近数值 1). 且 p_{\max} 从 $H=4 500$ kN 开始由 0.24 开始缓慢增加, 直至 6 500 kN 开始急剧增大至峰值, 当索力继续增大过峰值点后又急剧减小到 0.24 左右, 然后继续缓慢减小. 图 7 中 a, b, c 三点分别对应的索力为 6 500 kN, 6 600 kN, 6 700 kN, 索力变化微小但相位差有较大差异, 一定程度上证明了仅微小参数差异, 也能引起相频特性较大的差异.

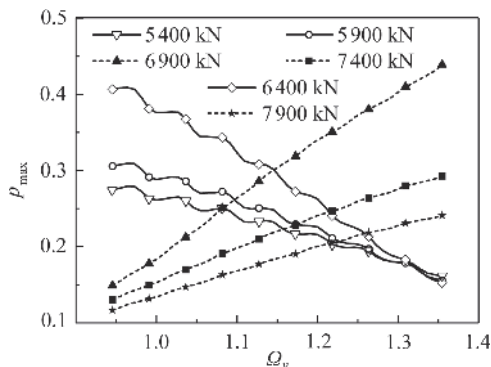


图 6 $p_{\max}-\Omega_v$ 曲线

Fig. 6 The $p_{\max}-\Omega_v$ curves

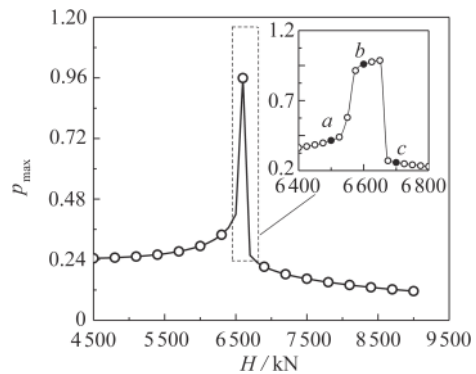


图 7 $p_{\max}-H$ 曲线 ($\Omega_v=1$)

Fig. 7 The $p_{\max}-H$ curve ($\Omega_v=1$)

为了解这种差异产生的成因,取图7中 a, b, c 三点对应参数. 利用式(12)对 $q_v(t)$ 进行 Hilbert 变换后求出其相移 90° 后的 $\tilde{q}_v(t)$ ^[26], 如式(17)所示:

$$\tilde{q}_v(t) = H\{q_v\} = h(t) \times q_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_v(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_v(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (17)$$

式中 $h(t) = 1/(\pi t)$. 可知, Hilbert 变换是指将响应近似解 $q_v(t)$ 通过具有冲激响应 $h(t) = 1/(\pi t)$ 的线性系统后输出响应 $\tilde{q}_v(t)$, $\tilde{q}_v(t)$ 在频域内各频率分量的幅度保持不变, 但相位将出现 90° 相移. 复数解 q_v 可由实解 $q_v(t)$ 和变换后的解 $\tilde{q}_v(t)$ 表示, 即 $q_v = q_v(t) + i\tilde{q}_v(t)$. 为便于计算瞬时相位, 这里以时间为横坐标, 以 $q_v(t)$ 为纵坐标, $\tilde{q}_v(t)$ 为竖向坐标, 绘制如图8(a)所示的三维曲线. 图中曲线上任一点到原点的连线与横坐标正方向的夹角为该点的瞬时相位 ($\arctan(\tilde{q}_v(t)/q_v(t)$).

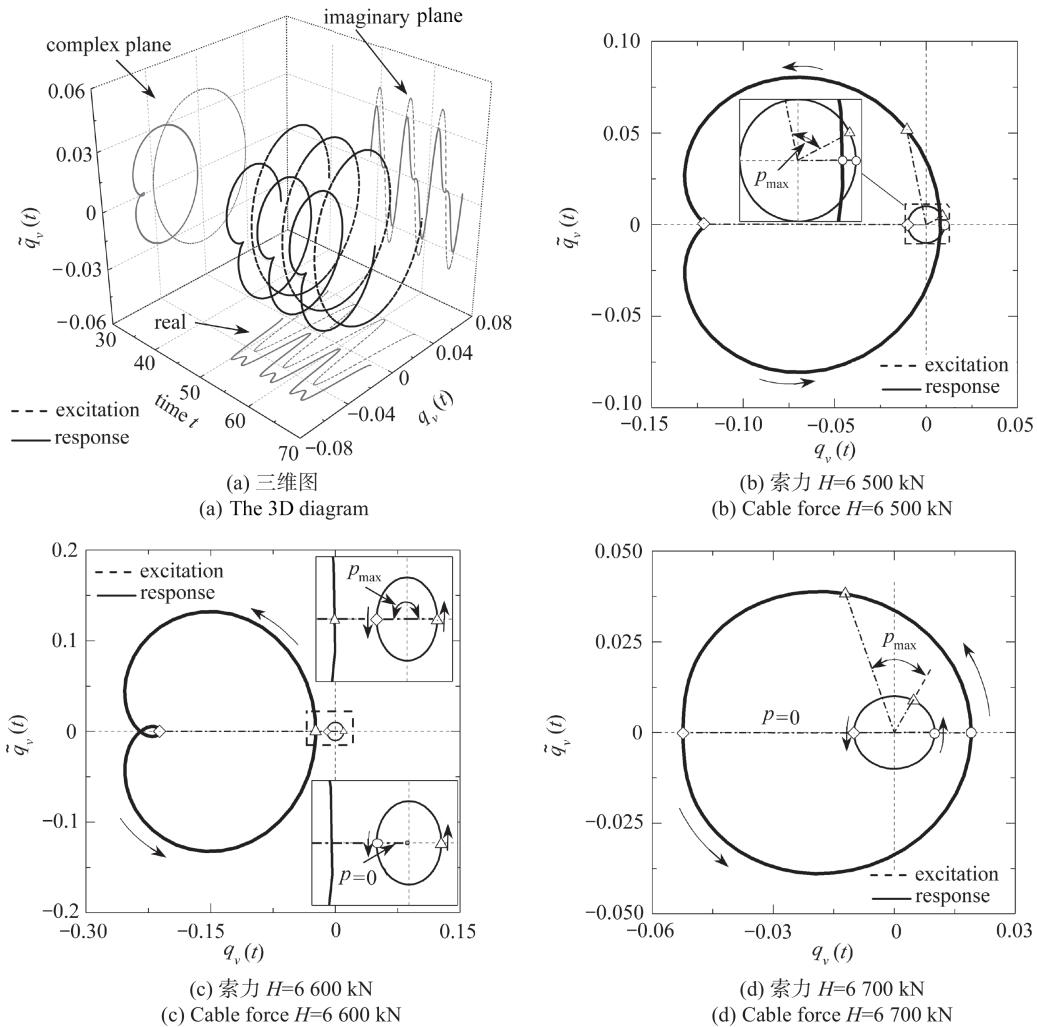


图8 复平面投影曲线

Fig. 8 Projection curves in the complex plane

截取不同 H 下三维曲线中一个振动周期在复平面上的投影 (如图8(a)中投影粗线所示, 称为投影曲线), 得到 $\tilde{q}_v(t)-q_v(t)$ 投影曲线图如图8(b)~8(d)所示.

由图8(b)可知, $H=6\ 500\ \text{kN}$ 时, 响应投影曲线整体向左偏移, 从式(12)中可知这是由漂移项引起, 而与激励曲线相比响应投影曲线线型并非圆形, 这是由于两倍频的存在引起的. 从图中不难发现, 漂移项与两倍频对瞬时相位差都具有一定的影响. 图8中, 起点与 $1/2$ 周期处 p 为 0 , p_{\max} 出现在 $1/4$ 周期内. 当 $H=6\ 600\ \text{kN}$ 时, 如图8(c)所示, 响应投影曲线整体平移至二三象限, 因此从起点开始响应与激励的相位差接近 π , 在 $1/2$ 周期时 p 值为零. 可见图7中的 p_{\max} 突增现象与漂移项相关, 且仅当响应投影曲线整体漂移至 $q_v(t)$ 负轴时, 相位差

才出现突增现象.同时受两倍频的影响,响应投影曲线在 1/2 周期处出现小环,这使得响应瞬时相位在一个周期内出现两次正负交替现象.由图可知,此时小环仅影响 p 时程曲线线型,不改变 p_{\max} 数值大小.当 H 增大至 6 700 kN 时,如图 8(d) 所示,漂移量减小, p_{\max} 出现在 1/4 周期附近,且数值减小.同时,当漂移量一定时 ($\neq 0$),响应投影曲线直径大小(即响应振幅大小)变化,也对 p_{\max} 产生一定的影响,直径愈大 p 愈小,反之愈大.

可见 p 的变化主要取决于漂移项,当漂移量不为零时, p 还受到响应振幅大小的影响.因此为了解三者之间的关系,结合图 8,进一步展开定性分析.

2.3 定性分析

由上述分析及式 (12) 可知, p_{\max} 的数值变化受漂移项和响应振幅的影响,在单个周期内的某一时刻(瞬时相位不为 $0, \pi$) 响应瞬时相位与漂移项成正相关,与响应振幅成负相关(漂移量不为零),可见漂移量不仅影响瞬时相位数值变化,同时也决定了响应振幅对瞬时相位的影响程度,因此可通过漂移量在响应振幅中所占比重对 p_{\max} 进行定性研究.式 (12) 中, $3\epsilon\alpha a_v^2 \omega_v^{-2} UP/(4\pi^2)$ 为漂移项,当仅考虑一阶模态时,仅参数 U 为负,其他参数均为正,因此 $3\epsilon\alpha a_v^2 \omega_v^{-2} UP/(4\pi^2) < 0$. 所以当式 (12) 第一、二项的余弦值均为 1 时,振动达到幅值.故令式 (12) 中:

$$D = \frac{3\epsilon\alpha a_v^2 \omega_v^{-2}}{4\pi^2} |U| P, \tag{18}$$

$$A_v = a_v - \frac{\epsilon\alpha a_v^2 \omega_v^{-2}}{4\pi^2} UP, \tag{19}$$

其中, D 为响应的漂移项(此处仅考虑绝对漂移量,故取 $|U|$ 即可), A_v 为不考虑漂移项后的响应幅值,称之为无漂移幅值,如图 9 所示.令漂移项在响应中所占比为

$$\beta = \frac{D}{A_v} = \frac{3\epsilon\alpha a_v P |U|}{4\omega^2 \pi^2 - \epsilon\alpha a_v P U}. \tag{20}$$

绘制 A_v, D 和 β 随 H 的变化曲线图如图 10 所示.

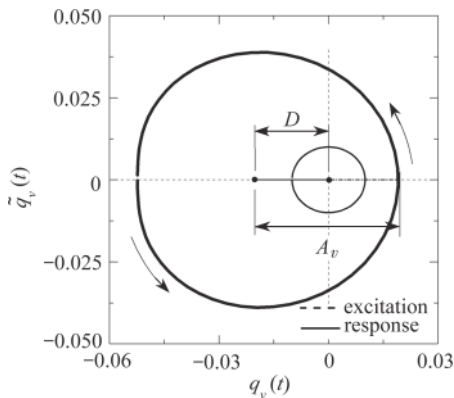


图 9 A_v, D 复平面示意图

Fig. 9 Illustration of A_v, D in the complex plane

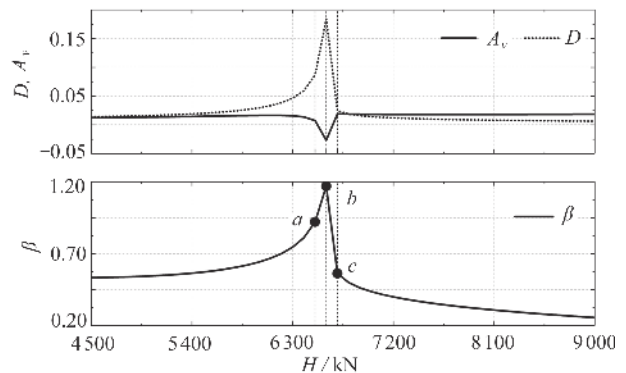


图 10 A_v, D 和 β 的变化曲线

Fig. 10 Curves of A_v, D and β

可见, β 曲线变化趋势与图 7 一致,图 10 中 a, b, c 三点与图 7 中对应.结合图 7、图 9 和图 10 可知, D 在 6 300 kN 后开始突增,而 A_v 减小,因此使得 β 增大.对应图 9 中,响应投影曲线左移,且曲线圈直径减小,从而 p 值增大.当索力为 6 600 kN 左右时,图 10 中 D 为正值, A_v 为负,因此 β 值大于 1,意味着复平面图中响应投影曲线完全平移至 $q_v(t)$ 的负轴,从而使得相位差突增至 π ,图 7 出现峰值.索力继续增大, D 快速减小而 A_v 增大,因此 β 快速减小,对应图 10,响应投影曲线左移值减小,且直径增大,故 p 减小.

可见 β 值对 p_{\max} 有决定性作用,因此可利用 β 值的变化情况对 p_{\max} 做定性判断.

3 结 语

1) 在特定的区间内,斜拉索索力的细微变化,可能导致面内响应与激励的瞬时相位差出现急剧变化,一定

程度上验证了拉索参数微小变化引起的响应相位改变。

2) 面内、外主共振响应的相频特性有本质区别。从解的表达式可知, 面外响应与激励的相位差为定值, 而面内响应中存在漂移项和两倍频成分。前者主要造成响应在复平面的投影曲线平移, 使得瞬时相位差变大; 后者主要改变投影曲线的形状, 使一个周期内的瞬时相位出现两次正负交替。

3) 面内响应与激励瞬时相位差的最大值取决于漂移项在响应中的占比。

参考文献(References):

- [1] IRVINE H M. *Cable Structures*[M]. Cambridge: the MIT Press, 1981: 1-152.
- [2] 康厚军, 郭铁丁, 赵跃宇. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J]. *力学学报*, 2016, **48** (3): 519-535. (KANG Houjun, GUO Tieding, ZHAO Yueyu. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48** (3): 519-535.(in Chinese))
- [3] 付英. 基础激励下桥梁斜拉索的非线性振动[J]. *动力学与控制学报*, 2010, **8** (1): 57-61. (FU Ying. Nonlinear vibration of cables in cable-stayed bridge under foundation excitation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, **8** (1): 57-61.(in Chinese))
- [4] 吴娟, 钱有华. 一类弦-梁耦合非线性振动系统的动力学数值模拟研究[J]. *动力学与控制学报*, 2018, **16** (5): 403-410. (WU Juan, QIAN Youhua. Numerical simulation research on dynamics of a string-beam coupled nonlinear vibration system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, **16** (5): 403-410.(in Chinese))
- [5] 丛云跃, 康厚军, 郭铁丁, 等. CFRP索斜拉桥面内自由振动的多索梁模型及模态分析[J]. *动力学与控制学报*, 2017, **15** (6): 494-504. (CONG Yunyue, KANG Houjun, GUO Tieding, et al. A multiple cable-beam model and modal analysis on in-plane free vibration of cable-stayed bridge with CFRP cables[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, **15** (6): 494-504.(in Chinese))
- [6] NI Y Q, WANG X Y, CHEN Z Q, et al. Field observations of rain-wind-induced cable vibration in cable-stayed Dongting Lake Bridge[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2007, **95**(5): 303-328.
- [7] MATSUMOTO M, SHIRAIISHI N, SHIRATO H. Rain-wind induced vibration of cables of cable-stayed bridges[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1992, **43**(1/3): 2011-2022.
- [8] SAVOR Z, RADIC J, HRELJA G. Cable vibrations at Dubrovnik bridge[J]. *Bridge Structures*, 2006, **2**(2): 97-106.
- [9] 符旭晨, 周岱, 吴筑海. 斜拉索的风振与减振[J]. *振动与冲击*, 2004, **23** (3): 29-32. (FU Xuchen, ZHOU Dai, WU Zhuhai. Study on wind induced vibration and vibration reduction of stayed cables[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2004, **23** (3): 29-32.(in Chinese))
- [10] REGA G, ALAGGIO R, BENEDETTINI F. Experimental investigation of the nonlinear response of a hanging cable, part P: local analysis[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1997, **14**(2): 89-117.
- [11] ZHAO Y, HUANG C, CHEN L, et al. Nonlinear vibration behaviors of suspended cables under two-frequency excitation with temperature effects[J]. *Journal of Sound and Vibration*. 2018, **416**: 279-294.
- [12] WANG L H, ZHAO Y Y. Nonlinear interactions and chaotic dynamics of suspended cables with three-to-one internal resonances[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(25): 7800-7819.
- [13] BOSSENS F, PREUMONT A. Active tendon control of cable-stayed bridges: a large-scale demonstration[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2001, **30**(7): 961-979.
- [14] 孙测世. 大跨度斜拉桥非线性振动试验研究[D]. 博士学位论文. 长沙: 湖南大学, 2015. (SUN Ceshi. Experimental study of nonlinear vibrations of long-span cable-stayed bridge[D]. PhD Thesis. Changsha: Hunan University, 2015. (in Chinese))
- [15] 赵兆冰, 林恒辉, 黄超辉, 等. 温度场中悬索受多频激励组合联合共振响应研究[J]. *振动与冲击*, 2019, **38** (3): 215-221. (ZHAO Yaobing, LIN Henghui, HUANG Chaohui, et al. Combined joint resonance responses of suspended cable subject to multi-frequency excitation in thermal environment[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38** (3): 215-221.(in Chinese))
- [16] PERLIKOWSKI P, KAPITANIAK M, CZOLCZYNSKI K, et al. Chaos in coupled clocks[J]. *International*

- Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, **22**(12): 1250288.
- [17] WU Y, WANG N, LI L, et al. Anti-phase synchronization of two coupled mechanical metronomes[J]. *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, **22**(2): 023146.
- [18] CZOLCZYNSKI K, PERLIKOWSKI P, STEFANSKI A, et al. Synchronization of the self-excited pendula suspended on the vertically displacing beam[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(2): 386-400.
- [19] KAPITANIAK M, PERLIKOWSKI P, KAPITANIAK T. Synchronous motion of two vertically excited planar elastic pendula[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(8): 2088-2096.
- [20] WANG L, ZHAO Y. Large amplitude motion mechanism and non-planar vibration character of stay cables subject to the support motions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **327**(1/2): 121-133.
- [21] SUN C, ZHAO Y, WANG Z, et al. Effects of longitudinal girder vibration on non-linear cable responses in cable-stayed bridges[J]. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2015, **21**(1): 1-14.
- [22] WARNITCHAI P, FUJINO Y, SUSUMPOW T. A non-linear dynamic model for cables and its application to a cable-structure system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **187**(4): 695-712.
- [23] WU Q, TAKAHASHI K, NAKAMURA S. Formulae for frequencies and modes of in-plane vibrations of small-sag inclined cables[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **279**(3/5): 1155-1169.
- [24] KANG H J, ZHU H P, ZHAO Y Y, et al. In-plane non-linear dynamics of the stay cables[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **73**(3): 1385-1398.
- [25] 陈水生, 孙炳楠, 胡隽. 斜拉索受轴向激励引起的面内参数振动分析[J]. *振动工程学报*, 2002, **15**(2): 144-150. (CHEN Shuisheng, SUN Bingnan, HU Jun. Analysis of stayed-cable vibration caused by axial excitation[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, **15**(2): 144-150.(in Chinese))
- [26] 徐夷鹏, 任志明, 李振春, 等. 一阶近似瞬时频率时间域声波全波形反演[J]. *石油地球物理勘探*, 2020, **55**(5): 1029-1038. (XU Yipeng, REN Zhiming, LI Zhenchun, et al. Full waveform inversion of time-domain acoustic wave based on first-order approximate instantaneous frequency[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2020, **55**(5): 1029-1038.(in Chinese))