应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

具有空变系数源项的半线性Moore–Gibson–Thompson方程全局解的非存在性

欧阳柏平

Nonexistence of Global Solutions to Semilinear Moore-Gibson-Thompson Equations With Space-Dependent Coefficients and Source Terms

OUYANG Baiping

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.420094

应用数学和力学
43 卷 3 期　2022 年 3 月

Applied Mathematics and Mechanics
Vol.43, No.3, Mar., 2022

http://www.applmathmech.cn

具有空变系数源项的半线性 Moore-Gibson-Thompson 方程全局解的非存在性[*]

欧阳柏平

（广州华商学院, 广州 511300）

摘要： 研究了具有空变系数源项的半线性 Moore-Gibson-Thompson(MGT) 方程 Cauchy 问题解的爆破现象. 在次临界情形下, 通过选择合适的能量泛函和测试函数, 运用迭代方法和一些微分不等式技巧, 得到了其 Cauchy 问题解的非全局存在性. 进一步导出了其 Cauchy 问题解的生命跨度的上界估计.

关　键　词： 空变系数源项；　Moore-Gibson-Thompson 方程；　爆破

中图分类号： O175.4　　　**文献标志码：** A　　　DOI：10.21656/1000-0887.420094

Nonexistence of Global Solutions to Semilinear Moore-Gibson-Thompson Equations With Space-Dependent Coefficients and Source Terms

OUYANG Baiping
(*Guangzhou Huashang College*, *Guangzhou* 511300, *P.R.China*)

Abstract: Blow-up of solutions to semilinear Moore-Gibson-Thompson (MGT) equations with space-dependent coefficients and source terms was studied. Under subcritical conditions, through selection of suitable energy functionals and test functions, and with an iteration method and some differential inequality techniques, the nonexistence of global solutions to the Cauchy problem was obtained. Furthermore, the upper bound estimate of the solutions of the lifespan was derived.

Key words: space-dependent coefficient and source term; Moore-Gibson-Thompson equation; blow-up

引　言

本文考虑如下具有空变系数源项的半线性 Moore-Gibson-Thompson(MGT) 方程 Cauchy 问题解的爆破现象:

$$\begin{cases}\beta u_{ttt}+u_{tt}-\Delta u-\beta\Delta u_t=f(\boldsymbol{x})|u(t,\boldsymbol{x})|^p, & (\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T),\\ (u,u_t,u_{tt})(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon(u_0,u_1,u_2)(\boldsymbol{x}), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f(\boldsymbol{x})=a_0\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha},\langle\boldsymbol{x}\rangle=\sqrt{1+|\boldsymbol{x}|^2},a_0>0,0<\alpha<2,p>1,\varepsilon>0,\Delta$ 是 Laplace 算子.

MGT 方程可描述物理上黏性热松弛流体中波的传播现象, 其方程一般形式表示如下:

* 收稿日期： 2021-04-13; 修订日期： 2021-10-27
基金项目： 国家自然科学基金 (11371175); 广东省普通高校创新团队项目 (2020WCXTD008); 广州市哲学社会科学发展“十三五”规划课题 (2019GZGJ209)
作者简介： 欧阳柏平 (1979—), 男, 讲师, 硕士 (E-mail: oytengfei79@tom.com).
引用格式： 欧阳柏平. 具有空变系数源项的半线性 Moore-Gibson-Thompson 方程全局解的非存在性[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(3): 353-362.

$$\tau u_{ttt}+u_{tt}-c^2\Delta u-b\Delta u_t=0,$$

其中, $u=u(t,\boldsymbol{x})$表示声学速度的势函数, c为声速, τ表示松弛系数, $b=\beta c^2$表示声扩散率, $\tau\in(0,\beta]$. 如果$0<\tau<\beta$, 则其半群的指数是稳定的; 但当$\tau=\beta$时, 其半群的指数不具有稳定性. 基于此, 本文考虑$\tau=\beta$的情况, 另外设$c^2=1$.

近来, 有关半线性 MGT 解的性态研究已有很多成果, 详细情况请参考文献 [1-10].

首先我们回顾有关 MGT 方程的一些特殊情况. 式 (1) 中, 取$\beta=0,\alpha=0,\ a_0=1$, 则式 (1) 化为

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u=|u(t,\boldsymbol{x})|^p, & (\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T),\\ (u,u_t)(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon(u_0,u_1)(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

上式的临界指数称为 Strauss 指数, 记为$P_{\mathrm{str}}(n)$. 当$p>P_{\mathrm{str}}(n)$时, 该方程存在整体解; $p\leqslant P_{\mathrm{str}}(n)$时, 该方程不存在整体解, 此时其解将在有限时间内爆破. 其中$P_{\mathrm{str}}(n)$表示为以下一元二次方程的最大正实根:

$$\frac{n-1}{2}p^2-\frac{n+1}{2}p-1=0,\qquad n\geqslant 2,$$

即

$$P_{\mathrm{str}}(n)=\frac{n+1+\sqrt{n^2+10n-7}}{2(n-1)}.$$

当 $n=1$时, $P_{\mathrm{str}}(1)=\infty$. 进一步地, 得到其生命跨度$T(\varepsilon)$的最优估计:

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases}\varepsilon^{-\frac{2p(p-1)}{2+(n+1)p-(n-1)p^2}}, & 1<p<P_{\mathrm{str}}(n),\\ \mathrm{e}^{\varepsilon^{-p(p-1)}}, & p=P_{\mathrm{str}}(n),\end{cases}$$

其中$n\geqslant 3$. 有关更多的研究成果, 请参考相关文献 [11-16].

王虎生等[16] 考虑了如下非线性加权的二维波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2\Delta u=\dfrac{|u|^p}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{m/2}}, & (\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^2\times(0,\infty),\\ u(\boldsymbol{x},0)=\varepsilon f(\boldsymbol{x}),\ u_t(\boldsymbol{x},0)=\varepsilon g(\boldsymbol{x}),\end{cases}$$

其中 $\varepsilon>0, f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$为具有紧支集的光滑函数, $p>1$. 他们运用半群理论以及压缩映射原理等泛函分析方法研究了其经典解的生命跨度, 同时进一步证明了其解的生命跨度的上下界估计.

式 (1) 中, 若$\alpha=0, a_0=1$, 则有

$$\begin{cases}\beta u_{ttt}+u_{tt}-\Delta u-\beta\Delta u_t=|u(t,\boldsymbol{x})|^p, & (\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T),\\ (u,u_t,u_{tt})(0,\boldsymbol{x})=\varepsilon(u_0,u_1,u_2)(\boldsymbol{x}), & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Chen 等[17] 研究了其解的爆破情况. 通过假设初始数据满足一定的约束条件, 分析了次临界和临界情况下解的爆破情况, 另外证明了这两种情况下其生命跨度的上界估计.

本文研究了具有空变系数源项的半线性 MGT 方程 Cauchy 问题解的爆破现象, 讨论其中空变系数对解的生命跨度的影响是本文的目标. 对于二维的波动方程, 一般可以考虑用 Kato 引理研究其解的爆破情况. 然而, 对于二维以上的情况, 由于 MGT 方程带来的无界乘子, 使得 Kato 引理并不适用. 最近, 一些学者提出了利用迭代方法分析某些高阶波动方程解的爆破问题[18-24].

目前, 具有空变系数源项的半线性 MGT 方程 Cauchy 问题解的爆破现象研究尚未得到展开. 其难点主要是寻找合适的测试函数和能量泛函以及如何解决迭代过程中出现的问题. 本文采用构造能量泛函和运用相关微分不等式技巧得到了其下界序列, 通过迭代证明了在次临界情况下具有空变系数源项的半线性 MGT 方程解的全局非存在性, 同时还进一步推出了其生命跨度的上界估计.

本文内容安排如下: 第 1 节为弱解定义以及本文主要结果介绍; 第 2 节为主要结果证明; 第 3 节为本文的结论.

1 主要结果

首先引入问题 (1) 的 Cauchy 问题弱解的定义.

定义 1　假设$(u_0,u_1,u_2)\in H^2(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$，称$u$是问题 (1) 在$[0,T)$上的能量解, 如果

$$u\in C([0,T),H^2(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,T),H^1(\mathbb{R}^n))\cap C^2([0,T),L^2(\mathbb{R}^n))\cap L^p_{\mathrm{loc}}([0,T)\times\mathbb{R}^n),$$

且如下的积分关系成立:

$$\begin{aligned}&\beta\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(t,\boldsymbol{x})\phi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(s,\boldsymbol{x})\phi_t(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\int_{\mathbb{R}^n}u_t(t,\boldsymbol{x})\phi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\\&\quad\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u_t(s,\boldsymbol{x})\phi_t(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(s,\boldsymbol{x})\nabla\phi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u_t(s,\boldsymbol{x})\nabla\phi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s=\\&\quad\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})|u(s,\boldsymbol{x})|^p\phi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_2(\boldsymbol{x})\phi(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_1(\boldsymbol{x})\phi(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned}\tag{2}$$

其中　$\phi(t,\boldsymbol{x})\in C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^n),t\in[0,T)$.

式 (2) 中, 由分部积分, 可推知

$$\begin{aligned}&\beta\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(t,\boldsymbol{x})\phi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\beta\int_{\mathbb{R}^n}u_t(t,\boldsymbol{x})\phi_t(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\beta\int_{\mathbb{R}^n}u(t,\boldsymbol{x})\phi_{tt}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\\&\quad\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u(s,\boldsymbol{x})\phi_{ttt}(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\int_{\mathbb{R}^n}u_t(t,\boldsymbol{x})\phi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\mathbb{R}^n}u(t,\boldsymbol{x})\phi_t(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\\&\quad\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u(s,\boldsymbol{x})\phi_{tt}(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u(s,\boldsymbol{x})\Delta\phi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s-\\&\quad\beta\int_{\mathbb{R}^n}u(t,\boldsymbol{x})\Delta\phi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u(s,\boldsymbol{x})\Delta\phi_t(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}a_0\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\phi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\\&\quad\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_2(\boldsymbol{x})\phi(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_1(\boldsymbol{x})\phi_t(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\boldsymbol{x})\phi_{tt}(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_1(\boldsymbol{x})\phi(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\\&\quad\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\boldsymbol{x})\phi_t(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\boldsymbol{x})\Delta\phi(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}\tag{3}$$

令$t\to T$时, 可得u满足问题 (1) 的弱解定义.

定理 1　设$1<p,0\leqslant\alpha<2$,

$$\begin{cases}p<\infty, & n=1,\\ p<p_0(n,\alpha), & n\geqslant 2,\end{cases}$$

其中$p_0(n,\alpha)$为以下一元二次方程

$$(n-1)p^2-(n+1-2\alpha)p-2=0$$

的最大正实根, 即

$$p_0(n,\alpha)=\frac{n+1-2\alpha+\sqrt{(n+1-2\alpha)^2+8(n-1)}}{2(n-1)}.$$

设$(u_0,u_1,u_2)\in H^2(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$是非负的紧致函数, 其支集包含在半径为$R(R>0)$的球$B_R$中, 满足$u_i(i=0,1,2)$不恒为0. 若$u$是 Cauchy 问题 (1) 的解, 其生命跨度$T(\varepsilon)$满足$\operatorname{supp}u(t,\cdot)\subset B_{t+R}$, $t\in(0,T)$, 则存在正常数$\varepsilon_0=\varepsilon_0(u_0,u_1,u_2,\alpha,n,p,R,\beta)$, 使得当$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$时, u在有限时间内爆破, 进一步其生命跨度的上界估计为

$$T(\varepsilon)\leqslant\tilde{C}\varepsilon^{-2p(p-1)/Y(n,p,\alpha)},$$

其中$\tilde{C}$独立于ε, 且

$$Y(n,p,\alpha)=2+(n+1-2\alpha)p-(n-1)p^2.\tag{4}$$

注 1　考虑极限情况$\alpha\to 0$, 则定理 1 的结果与经典的半线性波动方程在次临界的爆破结果相对应. 因此, 猜想$p_0(n,\alpha)$或许是模型 (1) 的临界指数.

2　主要结果证明

定义如下泛函:

$$F(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\tag{5}$$

式 (3) 中, 取$\phi\equiv 1,\{(\mathrm{s},\boldsymbol{x})\in[0,\mathrm{t}]\times\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{x}|\leqslant R+s\}$, 有

$$\beta\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^n}u_t(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=a_0\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

利用式 (5), 式 (6) 化为

$$\beta F''(t)+F'(t)=\beta F''(0)+F'(0)+a_0\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s. \tag{7}$$

对式 (7) 求导, 得到

$$\beta F'''(t)+F''(t)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(t,\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

由条件支集$u(t,\cdot)\subset B_{t+R}$, $\forall t\in(0,T)$以及 Hölder 不等式, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(t,\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\left(\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant R+t}(\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha})^{-1/(p-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-(p-1)}(F(t))^p=\left(\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant R+t}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{\alpha/(p-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-(p-1)}(F(t))^p\geqslant$$
$$C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha}(F(t))^p, \tag{9}$$

其中 $C_0=C_0(n,\ p,\ R)>0$.

将式 (9) 代入到式 (8), 得到

$$\beta F'''(t)+F''(t)\geqslant a_0C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha}(F(t))^p. \tag{10}$$

对式 (10) 在$[0,t]$上积分, 可得

$$\beta F'(t)+F(t)-(\beta F'(0)+F(0))-(\beta F''(0)+F'(0))t\geqslant a_0C_0\int_0^t\int_0^s(R+\tau)^{-(n(p-1)+\alpha)}(F(\tau))^p\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

由上式, 有

$$\beta F'(t)+F(t)\geqslant a_0C_0\int_0^t\int_0^s(R+\tau)^{-(n(p-1)+\alpha)}(F(\tau))^p\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s. \tag{11}$$

$(1/\beta)\mathrm{e}^{t/\beta}$ 同乘式 (11), 并且在$[0,t]$上积分, 整理得到

$$F(t)\geqslant F(0)\mathrm{e}^{-t/\beta}+\frac{a_0C_0}{\beta}\int_0^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}\int_0^s\int_0^\tau(R+\sigma)^{-(n(p-1)+\alpha)}(F(\sigma))^p\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$a_0C_0\int_0^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}\int_0^s\int_0^\tau(R+\sigma)^{-(n(p-1)+\alpha)}(F(\sigma))^p\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s. \tag{12}$$

上式表明, 其提供了进行迭代的框架. 接下来, 将对$F(t)$的下界进行迭代. 为了得到$F(t)$的第一个下界, 本文利用下面的函数[24]:

$$\varPhi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}}, & n=1,\\ \displaystyle\int_{S^{n-1}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}\cdot\omega}\mathrm{d}\sigma_\omega, & n\geqslant 2,\end{cases}$$

其中$\varPhi(\boldsymbol{x})$为正光滑函数, 其有如下性质:

$$\Delta\varPhi(\boldsymbol{x})=\varPhi(\boldsymbol{x}),\ \varPhi(\boldsymbol{x})\sim|\boldsymbol{x}|^{-(n-1)/2}\mathrm{e}^{|\boldsymbol{x}|},\ |\boldsymbol{x}|\to\infty.$$

设函数$\varPsi=\varPsi(t,\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-t}\varPhi(\boldsymbol{x})$. 易得, $-\beta\varPsi_{ttt}+\varPsi_{tt}-\Delta\varPsi+\beta\Delta\varPsi_t=0$.

引入如下泛函$F_0(t)$:

$$F_0(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u(t,\boldsymbol{x})\varPsi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{13}$$

对式 (13), 由 Hölder 不等式, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(t,\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}x\geqslant|F_0(t)|^p\left(\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant R+s}(\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha})^{-1/(p-1)}\varPsi(t,\boldsymbol{x})^{p/(p-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-(p-1)}\geqslant$$
$$|F_0(t)|^p\left(\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant R+s}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{\alpha/(p-1)}\varPsi(t,\boldsymbol{x})^{p/(p-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-(p-1)}. \tag{14}$$

将测试函数$\varPsi$应用于式 (2), 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\beta u_{tt}(t,\boldsymbol{x})+u_t(t,\boldsymbol{x}))\varPsi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}(\beta u_{tt}(s,\boldsymbol{x})+u_t(s,\boldsymbol{x}))\varPsi_t(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u(s,\boldsymbol{x})+\beta\nabla u_t(s,\boldsymbol{x}))\nabla\varPsi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} a_0\langle \boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\Psi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}(\beta u_2(\boldsymbol{x})+u_1(\boldsymbol{x}))\Psi(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{15}$$

利用分部积分和Ψ的性质，上式可化为

$$\begin{aligned}&\beta\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(t,\boldsymbol{x})\Psi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+(1+\beta)\int_{\mathbb{R}^n}u_t(t,\boldsymbol{x})\Psi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^n}u(t,\boldsymbol{x})\Psi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\\&\quad\beta\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_2(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+(1+\beta)\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_1(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\\&\quad a_0\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\Psi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{16}$$

利用$F_0(t)$的定义，有

$$F_0'(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u_t(t,\boldsymbol{x})\Psi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-F_0(t), \tag{17}$$

$$F_0''(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(t,\boldsymbol{x})\Psi(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-2F_0'(t)-F_0(t). \tag{18}$$

将式 (17)、(18) 代入式 (16)，得到

$$F_0''(t)+\left(3+\frac{1}{\beta}\right)F_0'(t)+2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)F_0(t)=\varepsilon I+\frac{a_0}{\beta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\Psi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s, \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}I=I_\beta[u_0,u_1,u_2]=&\int_{\mathbb{R}^n}[u_2(\boldsymbol{x})-2u_1(\boldsymbol{x})+u_0(\boldsymbol{x})]\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\left(3+\frac{1}{\beta}\right)\int_{\mathbb{R}^n}(u_1(\boldsymbol{x})-u_0(\boldsymbol{x}))\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\\&2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant 0.\end{aligned}$$

取$G(t)=F_0'(t)+2F_0(t)$，$b=1/\beta$，则有

$$G'(t)+(1+b)G(t)=\varepsilon I+\frac{a_0}{\beta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(s,\boldsymbol{x})|^p\Psi(s,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}s\geqslant\varepsilon I. \tag{20}$$

利用$\mathrm{e}^{(1+b)t}$同乘上式，在$[0,t]$上积分，整理有

$$G(t)\geqslant\mathrm{e}^{-(1+b)t}\left[G(0)+\varepsilon I\int_0^t\mathrm{e}^{(1+b)s}\mathrm{d}s\right], \tag{21}$$

其中　$G(0)=\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(\boldsymbol{x})+u_1(\boldsymbol{x}))\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$

e^{2t}同乘式 (21) 两边，并且积分，进一步整理可得

$$F_0(t)\geqslant\mathrm{e}^{-2t}\left[F_0(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{(1-b)s}\left(G(0)+\varepsilon I\int_0^s\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right]\geqslant C\varepsilon, \tag{22}$$

其中C为正常数.

利用Ψ的渐近性[21]，有

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant R+t}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{\alpha/(p-1)}\Psi(t,\boldsymbol{x})^{p/(p-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C_1^{-1/(p-1)}(R+t)^{\alpha/(p-1)+(n-1)(1-p/(2(p-1)))}, \tag{23}$$

其中　$C_1=C_1(n,p,R)>0$, $t\geqslant 0$.

于是，由 Hölder 不等式、式 (22)、(23) 以及$F_0(t)$的定义，得到

$$\begin{aligned}&\int_{R^n}\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha}|u(t,\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant|F_0(t)|^p\left(\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant R+s}(\langle\boldsymbol{x}\rangle^{-\alpha})^{-1/(p-1)}\Psi(t,\boldsymbol{x})^{p/(p-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-(p-1)}\geqslant\\&\quad C^p\varepsilon^p(C_1^{-1/(p-1)}(R+t)^{\alpha/(p-1)+(n-1)(1-p/(2(p-1)))})^{-(p-1)}\geqslant\\&\quad C_2\varepsilon^p(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)+(n-1)p/2},\end{aligned} \tag{24}$$

其中　$C_2=C^pC_1$, $t\geqslant 0$.

联立式 (8) 和式 (24)，可得

$$\beta F'''(t)+F''(t)\geqslant a_0C_2\varepsilon^p(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)+(n-1)p/2}\geqslant\tilde{C}_2\varepsilon^p(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}t^{np/2}, \tag{25}$$

其中　$\tilde{C}_2=a_0C_2$.

取 $a_1=\beta F'(0)+F(0)$, $a_2=\beta F''(0)+F'(0)$. 在$[0,t]$上对式 (25) 积分, 可推出

$$\beta F'(t)+F(t)\geqslant a_1+a_2t+\frac{\tilde{C}_2\varepsilon^p}{\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)}(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}t^{np/2+2}. \tag{26}$$

对式 (26) 两边同乘$(1/\beta)\mathrm{e}^{t/\beta}$, 并且在$[0,t]$上积分, 进一步整理有

$$\begin{aligned}F(t)\geqslant{}&\mathrm{e}^{-t/\beta}F(0)+\mathrm{e}^{-t/\beta}\int_0^t\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{s/\beta}(a_1+a_2s)\mathrm{d}s+\frac{\tilde{C}_2\varepsilon^p}{\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)\beta}\int_0^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}(R+s)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}s^{np/2+2}\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\tilde{C}_2\varepsilon^p}{\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)\beta}\int_0^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}(R+s)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}s^{np/2+2}\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\tilde{C}_2\varepsilon^p}{\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)\beta}(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}\int_{t/2}^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}s^{np/2+2}\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{\tilde{C}_2\varepsilon^p}{2^{np/2+2}\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)}(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}t^{np/2+2}(1-\mathrm{e}^{-t/(2\beta)})\geqslant\\&\frac{\tilde{C}_2\varepsilon^p\left(1-\mathrm{e}^{-1/2}\right)}{2^{np/2+2}\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)}(R+t)^{-\alpha-(n-1)(p-1)-p/2}t^{np/2+2},\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $t\geqslant\beta$.

取 $K_0=\dfrac{\tilde{C}_2\varepsilon^p\left(1-\mathrm{e}^{-1/2}\right)}{2^{np/2+2}\left(\dfrac{np}{2}+1\right)\left(\dfrac{np}{2}+2\right)}$, $\alpha_0=\alpha+(n-1)(p-1)+\dfrac{p}{2}$, $\gamma_0=\dfrac{np}{2}+2$. 从而由上式得到

$$F(t)\geqslant K_0(R+t)^{-\alpha_0}(t-\beta)^{\gamma_0}. \tag{28}$$

接下来的工作是取得一系列$F(t)$的下界.

设

$$F(t)\geqslant K_j(R+t)^{-\alpha_j}(t-L_j\beta)^{\gamma_j}, \tag{29}$$

其中 $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$,$\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$,$\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$均为后面定义的非负实序列,$\{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$定义如下:

$$L_j=\prod_{k=0}^{j}l_k,\ l_k=1+p^{-k},\qquad k,j\in\mathbb{N}.$$

其无限积定义为 $\prod_{k=0}^{\infty}l_k$, $l_k=1+p^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$.

对于$\prod_{k=0}^{\infty}l_k$的收敛情况, 说明如下. 由数学分析知识, 有

$$\prod_{k=0}^{\infty}l_k=\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\ln l_k\right),\ \lim_{k\to\infty}\frac{\ln l_{k+1}}{\ln l_k}=\frac{1}{p}<1.$$

易知, $j=0$时, 式 (28) 蕴含式 (29). 假设式 (29) 对所有$j\geqslant 0$成立, 以下证明对$j+1$成立.

事实上, 由式 (12) 和式 (29), 有

$$\begin{aligned}F(t)\geqslant{}&a_0C_0(R+t)^{-(n(p-1)+\alpha)}\int_0^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}\int_0^s\int_0^\tau K_j{}^p(R+\sigma)^{-p\alpha_j}(\sigma-L_j\beta)^{p\gamma_j}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant\\&a_0C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha-p\alpha_j}K_j^p\int_{L_j\beta}^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}\int_{L_j\beta}^s\int_{L_j\beta}^\tau(\sigma-L_j\beta)^{p\gamma_j}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{a_0C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha-p\alpha_j}}{(p\gamma_j+1)(p\gamma_j+2)}K_j^p\int_{L_j\beta}^t\mathrm{e}^{(s-t)/\beta}(s-L_j\beta)^{p\gamma_j+2}\mathrm{d}s\geqslant\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_0C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha-p\alpha_j}}{(p\gamma_j+1)(p\gamma_j+2)}K_j^p\int_{t/l_{j+1}}^t \mathrm{e}^{(s-t)/\beta}(s-L_j\beta)^{p\gamma_j+2}\mathrm{d}s \geqslant \\
&\frac{a_0C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha-p\alpha_j}(t-L_{j+1}\beta)^{p\gamma_j+2}}{(p\gamma_j+1)(p\gamma_j+2)l_{j+1}^{p\gamma_j+2}}K_j^p\int_{t/l_{j+1}}^t \mathrm{e}^{(s-t)/\beta}\mathrm{d}s \geqslant \\
&\frac{a_0C_0(R+t)^{-n(p-1)-\alpha-p\alpha_j}(t-L_{j+1}\beta)^{p\gamma_j+2}}{(p\gamma_j+1)(p\gamma_j+2)l_{j+1}^{p\gamma_j+2}}K_j^p(1-\mathrm{e}^{-t/(\beta l_{j+1})(l_{j+1}-1)}) \geqslant \\
&\frac{a_0C_0(p-1/2)(R+t)^{-n(p-1)-\alpha-p\alpha_j}(t-L_{j+1}\beta)^{p\gamma_j+2}}{(p\gamma_j+1)(p\gamma_j+2)l_{j+1}^{p\gamma_j+2}}K_j^p p^{-2(j+1)} = \\
&K_{j+1}(R+t)^{-\alpha_{j+1}}(t-L_{j+1}\beta)^{\gamma_{j+1}}, \qquad (30)
\end{aligned}
$$

其中

$$
t \geqslant L_{j+1}\beta,\ K_{j+1}=\frac{a_0C_0\left(p-\frac{1}{2}\right)K_j^p p^{-2(j+1)}}{(p\gamma_j+1)(p\gamma_j+2)l_{j+1}^{p\gamma_j+2}},\ \alpha_{j+1}=n(p-1)+\alpha+p\alpha_j,\ \gamma_{j+1}=p\gamma_j+2. \qquad (31)
$$

式 (30) 中的推导过程利用了下面的结果:

$$
1-\mathrm{e}^{-t/(\beta l_{j+1})(l_{j+1}-1)} \geqslant 1-\mathrm{e}^{-(l_{j+1}-1)} \geqslant 1-\left(1-(l_{j+1}-1)+\frac{1}{2}(l_{j+1}-1)^2\right) \geqslant \left(p-\frac{1}{2}\right)p^{-2(j+1)}.
$$

式 (31) 表明式 (29) 对$j+1$成立.

接下来的主要任务是对α_j,γ_j,K_j进行估计.

由式 (31), 利用递推关系, 对α_j,γ_j, 有

$$
\begin{aligned}
&\alpha_j=(n(p-1)+\alpha)(1+p+p^2+\cdots+p^{j-1})+\alpha_0p^j=\left(\frac{\alpha}{p-1}+n+\alpha_0\right)p^j-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n\right),\\
&\gamma_j=2(1+p+p^2+\cdots+p^{j-1})+\gamma_0p^j=\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)p^j-\frac{2}{p-1}. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

同时可推得

$$
\begin{aligned}
&(p\gamma_{j-1}+1)(p\gamma_{j-1}+2) \leqslant (p\gamma_{j-1}+2)^2=\gamma_j^2,\\
&\gamma_j=\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)p^j-\frac{2}{p-1} \leqslant \left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)p^j,\\
&\lim_{j\to\infty} l_j^{\gamma_j}=\lim_{j\to\infty}(1+p^{-j})^{(2/(p-1)+\gamma_0)p^j-2/(p-1)}=\mathrm{e}^{\gamma_0+2/(p-1)}. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

联立式 (31)~(33), 有

$$
K_j=\frac{a_0C_0\left(p-\frac{1}{2}\right)K_{j-1}^p p^{-2j}}{(p\gamma_{j-1}+1)(p\gamma_{j-1}+2)l_j^{p\gamma_{j-1}+2}} \geqslant \frac{a_0C_0\left(p-\frac{1}{2}\right)K_{j-1}^p}{\gamma_j^2 l_j^{\gamma_j}p^{2j}} \geqslant \frac{a_0C_0\left(p-\frac{1}{2}\right)K_{j-1}^p}{\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)^2\mathrm{e}^{\gamma_0+2/(p-1)}p^{4j}}=DK_{j-1}^p p^{-4j}, \qquad (34)
$$

其中

$$
D=\frac{a_0C_0\left(p-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)^2\mathrm{e}^{\gamma_0+2/(p-1)}}.
$$

对式 (34) 两边取对数, 进一步递推, 可以推出

$$
\begin{aligned}
&\ln K_j \geqslant \ln D+p\ln K_{j-1}-4j\ln p \geqslant \cdots \geqslant\\
&\quad \left(1+p+p^2+\cdots+p^{j-1}\right)\ln D+p^j\ln K_0-4(p^{j-1}+2p^{j-2}+\cdots+j)\ln p=
\end{aligned}
$$

$$p^j\left(\frac{\ln D}{p-1}+\ln K_0-\frac{4p\ln p}{(p-1)^2}\right)+\frac{4(p+(p-1)j)\ln p}{(p-1)^2}-\frac{\ln D}{p-1},\qquad \forall j\in\mathbb{N}. \tag{35}$$

取$j_0=j_0(n,p,\alpha)\in\mathbb{N}$, 使得

$$j_0\geqslant\frac{\ln D}{4\ln p}-\frac{p}{p-1}.$$

由此, 可得

$$\ln K_j\geqslant p^j\left(\frac{\ln D}{p-1}+\ln K_0-\frac{4p\ln p}{(p-1)^2}\right)=p^j\ln(E_0\varepsilon^p), \tag{36}$$

其中　$E_0=E_0(n,p)>0.$

令 $L=\lim_{j\to\infty}L_j=\prod_{j=0}^{\infty}l_j\in\mathbb{R}$. 由定义可知$l_j>1$, 故$j\to\infty$时, $L_j\to L$.

又由式 (29), 可推知, 当$j\in\mathbb{R}$和$t\geqslant L\beta$时, 有

$$F(t)\geqslant K_j(R+t)^{-\alpha_j}(t-L\beta)^{\gamma_j}. \tag{37}$$

将式 (32) 和式 (36) 代入式 (37), 得到当$j\geqslant j_0, t\geqslant L\beta$时, 有

$$\begin{aligned}F(t)&\geqslant\exp(p^j\ln(E_0\varepsilon^p))(R+t)^{-\left(\left(\frac{\alpha}{p-1}+n+\alpha_0\right)p^j-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n\right)\right)}(t-L\beta)^{\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)p^j-\frac{2}{p-1}}=\\&\exp\left(p^j\left(\ln(E_0\varepsilon^p)-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n+\alpha_0\right)\ln(R+t)+\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)\ln(t-L\beta)\right)\right)\times\\&(R+t)^{\left(\frac{\alpha}{p-1}+n\right)}(t-L\beta)^{-\frac{2}{p-1}}.\end{aligned} \tag{38}$$

令$t\geqslant\max\{R,3L\beta\}$, 式 (38) 化为

$$\begin{aligned}F(t)&\geqslant\exp\left(p^j\left(\ln\left(E_0\varepsilon^p2^{\frac{2-\alpha}{p-1}+\gamma_0-n-\alpha_0}3^{-\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)}t^{\frac{2}{p-1}+\gamma_0-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n+\alpha_0\right)}\right)\right)\right)\times(R+t)^{-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n\right)}(t-L\beta)^{-\frac{2}{p-1}}=\\&\exp\left(p^j\left(\ln\left(E_1\varepsilon^pt^{\frac{2}{p-1}+\gamma_0-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n+\alpha_0\right)}\right)\right)\right)\times(R+t)^{\left(\frac{\alpha}{p-1}+n\right)}(t-L\beta)^{-\frac{2}{p-1}},\end{aligned} \tag{39}$$

其中　$E_1=E_02^{\frac{2-\alpha}{p-1}+\gamma_0-n-\alpha_0}3^{-\left(\frac{2}{p-1}+\gamma_0\right)}.$

上式右边项exp函数中t的指数为

$$\frac{2}{p-1}+\gamma_0-\left(\frac{\alpha}{p-1}+n+\alpha_0\right)=\frac{2+(n+1-2\alpha)p-(n-1)p^2}{2(p-1)}=\frac{Y(n,p,\alpha)}{2(p-1)}.$$

由$0<\alpha<2$, 当$n=1$时, $p>1$; 当$n\geqslant 2$时, $1<p<p_0(n,\alpha)$. 此时指数函数中t的指数为正.

记$\varepsilon_0=\varepsilon_0(u_0,u_1,u_2,n,p,\alpha,R,\beta)>0$, 使得

$$\varepsilon_0^{-\frac{2p(p-1)}{Y(n,p,\alpha)}}\geqslant E_1^{\frac{2(p-1)}{Y(n,p,\alpha)}}\max\{R,3L\beta\}.$$

取$E_2=E_1^{-\frac{2(p-1)}{Y(n,p,\alpha)}}$. 于是, 对于$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$和 $t>E_2\varepsilon^{-\frac{2p(p-1)}{Y(n,p,\alpha)}}$, 有

$$t\geqslant\max\{R,3L\beta\},\ \ \ln\left(E_1\varepsilon^pt^{\frac{Y(n,p,\alpha)}{2(p-1)}}\right)>0.$$

式 (39) 中, 令$j\to\infty$, 则当$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$和 $t>E_2\varepsilon^{-\frac{2p(p-1)}{Y(n,p,\alpha)}}$时, 可得$F(t)$的下界爆破. 所以问题 (1) 不存在全局解. 进一步可推出其生命跨度的上界估计为

$$T(\varepsilon)\leqslant\tilde{C}\varepsilon^{-\frac{2p(p-1)}{Y(n,p,\alpha)}},$$

其中$\tilde{C}$为正常数.

定理 1 得证.

3　结　　论

本文运用泛函分析方法和迭代技巧, 研究了一类具有空变系数源项的半线性 MGT 方程解的爆破问题. 通

过选取恰当的能量泛函以及测试函数，推出了在次临界情形下其 Cauchy 问题解的爆破以及解的生命跨度的上界估计. 在后续的研究中，将进一步考虑运用迭代方法分析在临界情况下其 Cauchy 问题解的爆破情况，此时对于测试函数和能量泛函的选择会变得更复杂也最关键.

致谢　本文作者衷心感谢广东财经大学华商学院校内导师制项目 (2020HSDS01) 对本文的资助.

参考文献（References）：

[1] ALVES M O, CAIXETA A H, SILVA M A J, et al. Moore-Gibson-Thompson equation with memory in a history framework: a semigroup approach[J]. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2018, **69**(4): 106.

[2] CAIXETA A H, LASIECKA I, DOMINGOS CAVALCANTI V N. On long time behavior of Moore-Gibson-Thompson equation with molecular relaxation[J]. *Evolution Equations and Control Theory*, 2016, **5**(4): 661-676.

[3] DELL'ORO F, LASIECKA I, PATA V. A note on the Moore-Gibson-Thompson equation with memory of type Ⅱ[J]. *Journal of Evolution Equations*, 2020, **20**(4): 1251-1268.

[4] DELL'ORO F, LASIECKA I, PATA V. The Moore-Gibson-Thompson equation with memory in the critical case[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, **261**(7): 4188-4222.

[5] DELL'ORO F, PATA V. On the Moore-Gibson-Thompson equation and its relation to linear viscoelasticity[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2017, **76**(3): 641-655.

[6] LASIECKA I. Global solvability of Moore-Gibson-Thompson equation with memory arising in nonlinear acoustics[J]. *Journal of Evolution Equations*, 2017, **17**(1): 411-441.

[7] LASIECKA I, WANG X. Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part Ⅰ: exponential decay of energy[J]. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2016, **67**(2). DOI: 10.1007/s00033-015-0597-8.

[8] PELLICER M, SAID-HOUARI B. Wellposedness and decay rates for the Cauchy problem of the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2019, **80**(2): 447-478.

[9] PELLICER M, SOLÁ-MORALES J. Optimal scalar products in the Moore-Gibson-Thompson equation[J]. *Evolution Equations and Control Theory*, 2019, **8**(1): 203-220.

[10] KALTENBACHER B, MARCHAND R. Well-posedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound[J]. *Control and Cybernetics*, 2011, **40**(4): 971-988.

[11] LINDBLAD H, SOGGE C D. Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations[J]. *American Journal of Mathematics*, 1996, **118**(5): 1047-1135.

[12] TAKAMURA H, WAKASA K. The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **251**(4/5): 1157-1171.

[13] ZHOU Y. Cauchy problem for semilinear wave equations in four space dimensions with small initial data[J]. *Journal of Partial Differential Equations*, 1995, **8**(2): 135-144.

[14] ZHOU Y. Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions[J]. *Chinese Annals of Mathematics* (*Series B*), 2007, **28**(2): 205-212.

[15] DI POMPONIO S, GEORGIEV V. Life-span of subcritical semilinear wave equation[J]. *Asymptotic Analysis*, 2001, **28**(2): 91-114.

[16] 王虎生, 孙海霞. 一类非线性项的二维波动方程解的生命跨度研究[J]. 应用数学, 2020, **33**(3): 620-633. (WANG Husheng, SUN Haixia. The life span of classical solutions to nonlinear wave equations with weighted function in two space dimensions[J]. *Mathematica Applicata*, 2020, **33**(3): 620-633.(in Chinese))

[17] CHEN W, PALMIERI A. Nonexistence of global solutions for the semilinear Moore-Gibson-Thompson equation in the conservative case[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2020, **40**(9): 5513-5540.

[18] CHEN W, PALMIERI A. A blow-up result for the semilinear Moore-Gibson-Thompson equation with nonlinearity of derivative type in the conservative case[J]. *Evolution Equations and Control Theory*, 2020, **10**(4): 673-687.

[19] CHEN W. Interplay effects on blow-up of weakly coupled systems for semilinear wave equations with general nonlinear memory terms[J]. *Nonlinear Analysis*, 2021, **202**: 112160.

［20］ CHEN W, REISSIG M. Blow-up of solutions to Nakao's problem via an iteration argument［J］. *Journal of Differential Equations*, 2021, **275**: 733-756.

［21］ LAI N A, TAKAMURA H. Nonexistence of global solutions of nonlinear wave equations with weak time-dependent damping related to Glassey's conjecture［J］. *Differential and Integral Equations*, 2019, **32**(1/2): 37-48.

［22］ LAI N A, TAKAMURA H, WAKASA K. Blow-up for semilinear wave equations with the scale invariant damping and super-Fujita exponent［J］. *Journal of Differential Equations*, 2017, **263**(9): 5377-5394.

［23］ PALMIERI A, TAKAMURA A. Blow-up for a weekly coupled system of semilinear damped wave equations in the scattering case with power nonlinearities［J］. *Nonlinear Analysis*, 2019, **187**: 467-492.

［24］ YORDANOV B T, ZHANG Q S. Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions［J］. *Journal of Functional Analysis*, 2006, **231**(2): 361-374.