应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Keller-Segel趋化模型解的全局存在性和爆破时间的下界估计

李远飞

Global Existence of Solutions and Lower Bound Estimate of Blow-Up Time for the Keller-Segel Chemotaxis Model

LI Yuanfei

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.420109

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

 http://www.applmathmech.cn

Keller-Segel 趋化模型解的全局存在性和爆破时间的下界估计*

李远飞

（广州华商学院 数学与统计研究所，广州 511300）

摘要： 考虑了一个描述趋化细胞迁移的宏观非线性 Keller-Segel 模型, 其中该模型的存在区域$\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$是有界的凸区域. 利用能量估计的方法得到了$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上解的全局存在性. 如果方程中的参数满足一定约束条件, 证明了当$N=3$和$N=2$时可能的爆破时间的下界.

关　键　词： Keller-Segel 模型； 下界； 爆破； 能量估计

中图分类号： O178　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.420109

Global Existence of Solutions and Lower Bound Estimate of Blow-Up Time for the Keller-Segel Chemotaxis Model

LI Yuanfei

（*Institute of Mathematics and Statistics*, *Guangzhou Huashang College*, *Guangzhou* 511300, *P.R.China*）

Abstract: A macroscopic nonlinear Keller-Segel model for chemotactic cell migration was considered, where the existence region of the model is a bounded convex one on $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$. The global existence of the solution on $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ was obtained by means of the energy estimate method. The lower bound of the blow-up time was proved for $N=3$ and $N=2$.

Key words: Keller-Segel model; lower bound; blow-up; energy estimate

引　言

在本文中, 我们研究以下非线性 Keller-Segel 趋化模型[1]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\nabla\cdot(D(u)\nabla u)-\nabla\cdot(S(u)\nabla v), & \text{in }\ \Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=\Delta v-v+u, & \text{in }\ \Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & \text{in }\ \partial\Omega\times(0,t^*),\\ u=u_0(x),\ v=v_0(x), & \text{in }\ \Omega,t=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中Ω是$\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$上的一个有界凸区域, 并具有光滑的边界$\partial\Omega$, $\partial/\partial n$是$\partial\Omega$上的外单位法向导数, $D(u)$是非线性

* **收稿日期：** 2021-04-25; **修订日期：** 2021-07-08
基金项目： 广东省普通高校创新团队项目 (2020WCXTD008)
作者简介： 李远飞 (1982—), 男, 特聘教授, 博士 (E-mail: liqfd@163.com).
引用格式： 李远飞. Keller-Segel 趋化模型解的全局存在性和爆破时间的下界估计[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(7): 816-824.

扩散项，$S(u)$是聚集项，u_0和v_0是非负的连续函数，t^*是可能的爆破时间．更多的限制将在下文给出．

当人们研究一个数学模型时，首先考虑的是该模型在数学上的合理性，即解的适定性研究．然而在某些特定的条件下，解具有爆破性．众所周知，抛物方程的解当$t\to t^*$时变得无界，就称解在t^*处发生爆破．通常情况下，确定解的爆破时间是困难的．所以人们开始估计爆破时间的上界，积累了大量的方法．事实上，爆破时间的下界同样重要．自从 Weissler[2-3] 在 20 世纪 80 年代开始考虑爆破时间的下界以来，近几十年来，在研究偏微分方程的下界方面出现了大量的成果(见文献 [4-12])．首先假设解在某个有限时刻t^*处爆破，然后推导爆破时间的下界．不管爆破最后有没有发生，这种类型的下界都是有意义的．例如文献 [13] 提到的 2003 年哥伦比亚号航天飞机的灾难．由于航天飞机发射时被一块脱落的泡沫击中飞机左翼，导致那块隔热材料局部受损．结果，在重返大气层时，航天飞机由于在受损部分附近产生巨大热量而解体．事实上，以前的几架航天飞机也有类似的问题，但它们都能安全着陆．一些工程师怀疑这些损伤太小，以至于航天飞机能够在温度变得足够大之前着陆．

事实上，方程 (1) 的几种特殊形式已经得到了研究．Payne 和 Song[14] 研究了趋化模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla v), & \text{in } \Omega\times(0,t^*),\\ 0=\Delta v+u-1, & \text{in } \Omega\times(0,t^*)\end{cases}$$

在齐次 Neumman 边界条件下的爆破现象．通过利用微分不等式技术，得到了爆破时间的下界．当初始条件满足一定约束条件时，证明了解的全局存在性．文献 [15] 把文献 [14] 的研究进一步推广到了非线性边界条件上，通过对已知数据项进行一定的约束，当爆破发生时推导了爆破时间的下界．

Payne 和 Song 在文献 [16] 里研究了以下 Keller-Segel 方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-k_1\nabla\cdot(u\nabla v), & \text{in } \Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=k_2\Delta v-k_3v+k_4u, & \text{in } \Omega\times(0,t^*),\end{cases}$$

其中$k_i(i=1,2,3,4)$是大于零的常数．当$N=2$时，文献 [16] 获得了爆破时间的下界．Li 和 Zheng[17] 进一步推广到一个完整的 Keller-Segel 方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-k_1\nabla\cdot(u^p\nabla v), & \text{in } \Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=k_2\Delta v-k_3v+k_4u, & \text{in } \Omega\times(0,t^*).\end{cases}$$

他们证明了当$p>\dfrac{2}{N}$时爆破时间的下界．文献 [18] 把该模型推广到了齐次 Robin 边界条件上并获得了类似的结果．

本文研究一个更加复杂的系统 (1) 的爆破时间的下界，为了简化起见，我们假设

$$D(u)=u^s,\ S(u)=u^r,\qquad s,r>0. \tag{2}$$

本研究的关键是巧妙地找出适当的辅助函数，然而文献 [14-16, 18] 中的辅助函数并不适合本文的模型．因此本研究的关键之处就是通过对参数s，r和初始数据进行适当的约束，证明了当$0<r<\dfrac{2}{3}$，$r<s<\max\{1,\ 2-3r\}$时解是全局存在的．当$\dfrac{2}{3}<r<1$，$r-\dfrac{4}{3}<s<\min\left\{2-\dfrac{3}{2}r,\ r\right\}$时，本文推导$N=3$时方程 (1) 解的爆破时间的下界，并把结果推广到了$N=2$的情形．

1　全　局　解

本节假设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$，我们寻找全局解存在的条件．为此，我们首先给出以下引理．

引理 1[19]　设Ω是$\mathbb{R}^3$上的有界星型凸区域．若$w\in C^1(\Omega)$，则有

$$\int_\Omega w^{\frac{3}{2}n}\mathrm{d}x\leqslant\left\{\frac{3}{2\rho_0}\int_\Omega w^n\mathrm{d}x+\frac{n}{2}\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)\int_\Omega w^{n-1}|\nabla w|\mathrm{d}x\right\}^{\frac{3}{2}},$$

其中

$n>1,\ \rho_0=\min_{\partial\Omega} x\cdot n,\ d=\max_{\overline{\Omega}}|x|.$

引理 2[20] 设Ω是$\mathbb{R}^3$上的有界星型凸区域. 若$\dfrac{\partial}{\partial n}w=0$, 则有

$$\lambda_1\int_\Omega w^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x,$$

其中λ_1是问题

$$\Delta\phi+\lambda\phi=0,\qquad \phi>0,\ x\in\Omega;\ \frac{\partial\phi}{\partial n}=0,\qquad x\in\partial\Omega$$

的第一正特征值.

我们的主要结果可以表述为如下定理.

定理 1 设$u(x,t)$和$v(x,t)$是问题 (1) 在星型有界区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上的非负经典解, 其中$D(u)$和$S(u)$满足式 (2). 参数$s,r$满足

$$0<r<\frac{2}{3},\ r<s<\max\{1,2-3r\}.$$

如果方程 (1) 的解在任何有限时刻不会爆破, 则解是全局存在的.

证明 我们首先定义

$$A_1(t)=\int_\Omega u^{2-s}\mathrm{d}x,\ A_2(t)=\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x. \tag{3}$$

对式 (3) 求导, 利用方程 (1)、散度定理和式 (2), 可得

$$\begin{aligned}A_1'(t)=&(2-s)\int_\Omega u^{1-s}[\nabla\cdot(u^s\nabla u)-\nabla\cdot(u^r\nabla v)]\mathrm{d}x=\\&-(2-s)(1-s)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{(2-s)(1-s)}{1-s+r}\int_\Omega u^{1-s+r}\Delta v\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4}$$

利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}-\int_\Omega u^{1-s+r}\Delta v\mathrm{d}x\leqslant&\left(\int_\Omega u^{2-s+r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-s+r}{2-s+r}}\left(\int_\Omega(\Delta v)^{2-s+r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2-s+r}}\leqslant\\&\frac{1-s+r}{2-s+r}\int_\Omega u^{2-s+r}\mathrm{d}x+\frac{1}{2-s+r}\int_\Omega(\Delta v)^{2-s+r}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5}$$

再利用引理 1, 可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant&\left(\int_\Omega u^{\frac{3}{2}(2-s)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2(2-s+r)}{3(2-s)}}|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\leqslant\\&|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\left[\frac{3}{2\rho_0}A_1(t)+\frac{2-s}{2}\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)\int_\Omega u^{1-s}|\nabla u|\mathrm{d}x\right]^{1+\frac{r}{2-s}}\leqslant\\&|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\left[\frac{3}{2\rho_0}A_1(t)+\frac{2-s}{2}\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)\left(\int_\Omega u^{2-2s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1+\frac{r}{2-s}}.\end{aligned}\tag{6}$$

利用不等式

$$(a+b)^l\leqslant 2^{l-1}(a^l+b^l),\qquad a,\ b>0,\ l>1,\tag{7}$$

可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant&2^{\frac{r}{2-s}}|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\left\{\frac{3}{2\rho_0}[A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+\left[\frac{2-s}{2}\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)|\Omega|^{\frac{s}{2(2-s)}}\right]^{1+\frac{r}{2-s}}\times\right.\\&\left.\left(\int_\Omega u^{2-s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-s}{2-s}\cdot\left(1+\frac{r}{2-s}\right)}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}+\frac{r}{2(2-s)}}\right\}.\end{aligned}\tag{8}$$

利用 Young 不等式, 由式 (8) 可得

$$\int_\Omega u^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant a_1[A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+a_2[A_1(t)]^{\frac{1-s}{2-s}\cdot\frac{1+\frac{r}{2-s}}{\frac{1}{2}-\frac{r}{2(2-s)}}}+a_3\varepsilon_1\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\tag{9}$$

其中ε_1是大于零的常数以及

$$\begin{cases} a_1 = 2^{\frac{r}{2-s}}|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\left[\dfrac{3}{2\rho_0}\right]^{1+\frac{r}{2-s}}, \\ a_2 = \left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{r}{2(2-s)}\right]2^{\frac{r}{2-s}}|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\left[\dfrac{2-s}{2}\left(1+\dfrac{d}{\rho_0}\right)|\Omega|^{\frac{s}{2(2-s)}}\right]^{1+\frac{r}{2-s}}\varepsilon_1^{-\frac{\frac{1}{2}+\frac{r}{2(2-s)}}{\frac{1}{2}-\frac{r}{2(2-s)}}}, \\ a_3 = \left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{r}{2(2-s)}\right]2^{\frac{r}{2-s}}|\Omega|^{\frac{(2-s)-2r}{3(2-s)}}\left[\dfrac{2-s}{2}\left(1+\dfrac{d}{\rho_0}\right)|\Omega|^{\frac{s}{2(2-s)}}\right]^{1+\frac{r}{2-s}}. \end{cases}$$

由于$s>r$,所以

$$\int_\Omega|\Delta v|^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-s+r}{2}}|\Omega|^{\frac{s-r}{2}}. \tag{10}$$

把式 (9) 和 (10) 代入到式 (5) 再结合式 (4), 可得

$$\begin{aligned} A_1'(t)\leqslant&\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_1[A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_2[A_1(t)]^{\frac{1-s}{2-s}\cdot\frac{1+\frac{r}{2-s}}{\frac{1}{2}-\frac{r}{2(2-s)}}}+ \\ &\left[\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_3\varepsilon_1-(2-s)(1-s)\right]\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}\left(\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-s+r}{2}}|\Omega|^{\frac{s-r}{2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

利用散度定理和方程 (1), 可得

$$\begin{aligned} A_2'(t)=&-2\int_\Omega\nabla\Delta v\cdot\nabla v_t\mathrm{d}x=-2\int_\Omega\nabla\Delta v\cdot[\nabla\Delta v-\nabla v+\nabla u]\mathrm{d}x= \\ &-2\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega\nabla\Delta v\cdot\nabla u\mathrm{d}x\leqslant-\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{12}$$

记

$$A(t)=A_1(t)+\frac{1}{4}(2-s)(1-s)A_2(t), \tag{13}$$

并在式 (9) 中取ε_1满足

$$\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_3\varepsilon_1-\frac{1}{4}(2-s)(1-s)=0,$$

由式 (9) 和 (10), 可得

$$\begin{aligned} A'(t)\leqslant&c_1[A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+c_2[A_1(t)]^{\frac{1-s}{2-s}\cdot\frac{1+\frac{r}{2-s}}{\frac{1}{2}-\frac{r}{2(2-s)}}}-\frac{1}{2}(2-s)(1-s)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+ \\ &c_3[A_2(t)]^{\frac{2-s+r}{2}}-\frac{1}{2}(2-s)(1-s)A_2(t), \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$c_1=\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_1,\ c_2=\frac{1}{2}\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_2,\ c_3=\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}|\Omega|^{\frac{s-r}{2}}.$$

利用引理 2 和 Hölder 不等式, 可得

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\geqslant\lambda_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\geqslant\lambda_1[A_1(t)]^{\frac{2}{2-s}}|\Omega|^{\frac{-s}{2-s}}. \tag{15}$$

由于$s>r$,所以由式 (14) 和 (15), 可得

$$\begin{aligned} A'(t)\leqslant&[A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}\left\{c_1-\frac{1}{4}(2-s)(1-s)\lambda_1|\Omega|^{\frac{-s}{2-s}}[A_1(t)]^{\frac{s-r}{2-s}}\right\}+ \\ &[A_1(t)]^{\frac{1-s}{2-s}\cdot\frac{(1+\frac{r}{2-s})}{\frac{1}{2}-\frac{r}{2(2-s)}}}\left\{c_2-\frac{1}{4}(2-s)(1-s)\lambda_1|\Omega|^{\frac{-s}{2-s}}[A_1(t)]^{\frac{2(s-r)}{2-s-r}}\right\}+ \\ &[A_2(t)]^{\frac{2-s+r}{2}}|\Omega|^{\frac{s-r}{2}}\left\{c_3-\frac{1}{2}(2-s)(1-s)[A_2(t)]^{\frac{s-r}{2}}\right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

式 (16) 说明方程 (1) 的解在$A(t)$的测度下不会在任何有限时刻爆破.否则, 若存在某有限时刻t^*使得

$\lim_{t\to t^*} A(t) = \infty$, 则由式 (16) 可知存在区间$[t_0, t^*)$使得$A'(t) < 0, t \in [t_0, t^*)$. 这就表明$A(t)$在$[t_0, t^*)$上是单调递减函数, 所以$A(t^*) < A(t_0)$. 这与$A(t)$在$t^*$处爆破矛盾. 证毕.

注 1　当$r \geqslant 2/3$时, 定理 1 就不再成立了, 即解可能在某有限时刻t^*处爆破. 在此种情形下, 我们在下一节推导爆破时间t^*的下界.

2　$N = 3$时爆破时间的下界

本节假设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 当爆破发生时, 我们推导爆破时间的下界. 我们的主要结果可以表述为如下定理.

定理 2　设$u(x,t)$和$v(x,t)$是问题 (1) 在星型有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的非负经典解, 其中$D(u)$和$S(u)$满足式 (2). 参数$s, r$满足

$$\frac{2}{3} < r < 1,\ r - \frac{4}{3} < s < \min\left\{2 - \frac{3}{2}r, r\right\}.$$

如果方程 (1) 的解在某有限时刻t^*爆破, 则爆破时间t^*一定具有下界, 即

$$t^* \geqslant \int_{A(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\zeta}{b_1 \zeta^{1+\frac{r}{2-s}} + b_2 \zeta^{1+\frac{r(5-4s)}{2(2-s)^2 - 3r(2-s)}} + b_3 \zeta^{1+\frac{1}{2}(r-s)} + b_4 \zeta^{1+\frac{2(r-s)}{1-\frac{3}{4}(r-s)}}},$$

其中$b_i (i = 1,2,3,4)$是大于零的常数, 以及

$$A(0) = \int_\Omega u_0^{2-s} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(2-s)(1-s) \int_\Omega |\Delta v_0|^2 \mathrm{d}x.$$

证明　我们仍然使用式 (3) 所定义的辅助函数. 重新计算式 (6), 利用方程 (1)、Hölder 不等式、Young 不等式、散度定理、式 (2) 和引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u^{2-s+r} \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega u^{2-s} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2-s-2r}{2-s}} \left(\int_\Omega u^{\frac{3}{2}(2-s)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2r}{2-s}} \leqslant \\
&\quad [A_1(t)]^{\frac{2-s-2r}{2-s}} \left[\frac{3}{2\rho_0} A_1(t) + \frac{2-s}{2}\left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right) \int_\Omega u^{1-s} |\nabla u| \mathrm{d}x\right]^{\frac{3r}{2-s}} \leqslant \\
&\quad [A_1(t)]^{\frac{2-s-2r}{2-s}} \left[\frac{3}{2\rho_0} A_1(t) + \frac{2-s}{2}\left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right) \left(\int_\Omega u^{2-2s} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{3r}{2-s}}.
\end{aligned}$$

利用不等式 (7), 可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u^{2-s+r} \mathrm{d}x \leqslant 2^{\frac{3r}{2-s}-1} \left(\frac{3}{2\rho_0}\right)^{\frac{3r}{2-s}} [A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}} + 2^{\frac{3r}{2-s}-1} \left[\frac{2-s}{2}\left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right) |\Omega|^{\frac{s}{2(2-s)}}\right]^{\frac{3r}{2-s}} \times \\
&\quad [A_1(t)]^{\frac{(2-s)^2 - r(1+s)}{(2-s)^2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{3r}{2(2-s)}} \leqslant \\
&\quad a_1 [A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}} + a_2 [A_1(t)]^{1+\frac{r(5-4s)}{2(2-s)^2 - 3r(2-s)}} + a_3 \varepsilon_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{17}$$

其中ε_2是大于零的常数,

$$a_1 = 2^{\frac{3r}{2-s}-1} \left(\frac{3}{2\rho_0}\right)^{\frac{3r}{2-s}},\ a_2 = 2^{\frac{3r}{2-s}-1} \left[\frac{2-s}{2}\left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right) |\Omega|^{\frac{s}{2(2-s)}}\right]^{\frac{3r}{2-s}} \left[1 - \frac{3r}{2(2-s)}\right] \varepsilon_2^{-\frac{3r}{2(2-s) - 3r}},$$

$$a_3 = 2^{\frac{3r}{2-s}-1} \left[\frac{2-s}{2}\left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right) |\Omega|^{\frac{s}{2(2-s)}}\right]^{\frac{3r}{2-s}} \frac{3r}{2(2-s)}.$$

接下来, 我们控制式 (6) 中的第二项. 利用引理 1, 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega(\Delta v)^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega(\Delta v)^2\mathrm{d}x\right)^{1+s-r}\left(\int_\Omega(\Delta v)^3\mathrm{d}x\right)^{r-s}\leqslant\\
&\quad\left(\int_\Omega(\Delta v)^2\mathrm{d}x\right)^{1+s-r}\left[\frac{3}{2\rho_0}\int_\Omega(\Delta v)^2\mathrm{d}x+\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)\int_\Omega\Delta v|\nabla\Delta v|\mathrm{d}x\right]^{\frac{3}{2}(r-s)}\leqslant\\
&\quad 2^{\frac{3}{2}(r-s)-1}[A_2(t)]^{1+s-r}\left\{\left(\frac{3}{2\rho_0}\right)^{\frac{3}{2}(r-s)}[A_2(t)]^{\frac{3}{2}(r-s)}+\left[\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)\right]^{\frac{3}{2}(r-s)}\times\right.\\
&\quad\left.[A_2(t)]^{\frac{3}{4}(r-s)}\left(\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{4}(r-s)}\right\}\leqslant\\
&\quad a_4[A_2(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+a_5[A_2(t)]^{1+\frac{\frac{1}{2}(r-s)}{1-\frac{3}{4}(r-s)}}+a_6\varepsilon_3\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}\tag{18}
$$

其中ε_3是大于零的常数,

$$
a_4=2^{\frac{3}{2}(r-s)-1}\left(\frac{3}{2\rho_0}\right)^{\frac{3}{2}(r-s)},\ a_5=2^{\frac{3}{2}(r-s)-1}\left[1-\frac{3}{4}(r-s)\right]\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)^{\frac{3}{2}(r-s)}\varepsilon_3^{-\frac{\frac{3}{4}(r-s)}{1-\frac{3}{4}(r-s)}},
$$

$$
a_6=2^{\frac{3}{2}(r-s)-1}\frac{3}{4}(r-s)\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right)^{\frac{3}{2}(r-s)}.
$$

把式 (17) 和式 (18) 代入到式 (5) 再联合式 (4), 可得

$$
\begin{aligned}
A_1'(t)\leqslant&\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_1[A_1(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_2[A_1(t)]^{1+\frac{r(5-4s)}{2(2-s)^2-3r(2-s)}}-\\
&\left[(2-s)(1-s)-\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_3\varepsilon_2\right]\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\\
&\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}a_4[A_2(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}a_5[A_2(t)]^{1+\frac{2(r-s)}{1-\frac{3}{4}(r-s)}}+\\
&\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}a_6\varepsilon_3\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{19}
$$

利用散度定理和方程 (1), 可得

$$
\begin{aligned}
A_2'(t)=&-2\int_\Omega\nabla\Delta v\cdot\nabla v_t\mathrm{d}x=\\
&-2\int_\Omega\nabla\Delta v\cdot[\nabla\Delta v-\nabla v+\nabla u]\mathrm{d}x=\\
&-2\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega\nabla\Delta v\cdot\nabla u\mathrm{d}x\leqslant\\
&-\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{20}
$$

取

$$
\varepsilon_2=\frac{2-s+r}{a_3},\ \varepsilon_3=\frac{1}{2a_6}(1-s+r)(2-s+r),
$$

并联合式 (19)、(20) 和式 (13), 可得

$$
\begin{aligned}
A'(t)\leqslant&b_1[A(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+b_2[A(t)]^{1+\frac{r(5-4s)}{2(2-s)^2-3r(2-s)}}+\\
&b_3[A(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+b_4[A(t)]^{1+\frac{2(r-s)}{1-\frac{3}{4}(r-s)}},
\end{aligned}\tag{21}
$$

其中

$$
b_1=\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_1,\ b_2=\frac{(2-s)(1-s)}{2-s+r}a_2,\ b_3=\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}a_4,\ b_4=\frac{(2-s)(1-s)}{(1-s+r)(2-s+r)}a_5.
$$

由式 (21) 可得

$$\frac{A'(t)}{b_1[A(t)]^{1+\frac{r}{2-s}}+b_2[A(t)]^{1+\frac{r(5-4s)}{2(2-s)^2-3r(2-s)}}+b_3[A(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+b_4[A(t)]^{1+\frac{2(r-s)}{1-\frac{3}{4}(r-s)}}}\leqslant 1. \tag{22}$$

若方程的解在$A(t)$测度下在某有限时刻t^*爆破, 则$\lim_{t\to t^*}A(t)=\infty$. 对式 (22) 从 0 到$t^*$积分即可完成定理 2 的证明.

3 $N=2$时的爆破时间的下界

本节推导$\Omega\subset\mathbb{R}^2$时方程 (1) 解的爆破时间的下界. 我们先给出以下引理.

引理 3[4, 17, 21] 设$\Omega\subset\mathbb{R}^2$是一个有界的凸区域, 则

$$\left(\int_\Omega w^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant n_1\int_\Omega|w|^2\mathrm{d}x+n_2\int_\Omega w|\nabla w|\mathrm{d}x,$$

其中

$$n_1=\frac{\sqrt{2}}{2\rho_0},\ n_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{d}{\rho_0}\right).$$

利用引理 3, 我们可得以下定理.

定理 3 设$u(x,t)$和$v(x,t)$是问题 (1) 在星型有界区域$\Omega\subset\mathbb{R}^2$上的非负经典解, 其中$D(u)$和$S(u)$满足式 (2). 参数$s,r$满足

$$\frac{2}{3}<r<1,\ 2-2r<s<r.$$

如果方程 (1) 的解在某有限时刻t^*爆破, 则爆破时间t^*一定具有下界, 即

$$t^*\geqslant\int_{A(0)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\zeta}{b_5\zeta^{1+\delta_2}+b_6\zeta^{1+\frac{(2-2s)\delta_2}{(2-s)\delta_1}}+b_7\zeta^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+b_8\zeta^{1+\frac{r-s}{2-(r-s)}}},$$

其中$b_i(i=5,6,7,8)$是大于零的常数以及

$$\delta_1=1-\frac{r}{2-s},\ \delta_2=\frac{r}{2-s},\ A(0)=\int_\Omega u_0^{2-s}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(2-s)(1-s)\int_\Omega|\Delta v_0|^2\mathrm{d}x.$$

证明 我们利用引理 3 重新计算式 (6), 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega u^{2-s}\mathrm{d}x\right)^{\delta_1}\left(\int_\Omega u^{2(2-s)}\mathrm{d}x\right)^{\delta_2}\leqslant\\&\quad\left(\int_\Omega u^{2-s}\mathrm{d}x\right)^{\delta_1}\left[n_1\int_\Omega u^{2-s}\mathrm{d}x+n_2\int_\Omega u^{1-s}|\nabla u|\mathrm{d}x\right]^{2\delta_2}\leqslant\\&\quad 2^{2\delta_2-1}n_1^{2\delta_2}[A_1(t)]^{1+\delta_2}+2^{2\delta_2-1}n_2^{2\delta_2}|\Omega|^{\frac{s\delta_2}{2-s}}[A_1(t)]^{\delta_1+\frac{2-2s}{2-s}\delta_2}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\delta_2}\leqslant\\&\quad a_7[A_1(t)]^{1+\delta_2}+a_8[A_1(t)]^{1+\frac{(2-2s)\delta_2}{(2-s)\delta_1}}+a_9\varepsilon_3\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{23}$$

其中ε_3是大于零的常数, $a_7=2^{2\delta_2-1}n_1^{2\delta_2}$, $a_8=\delta_1 2^{2\delta_2-1}n_2^{2\delta_2}|\Omega|^{\frac{s\delta_2}{2-s}}\varepsilon_3^{-\frac{\delta_2}{\delta_1}}$, $a_9=\delta_2 2^{2\delta_2-1}n_2^{2\delta_2}|\Omega|^{\frac{s\delta_2}{2-s}}$.

再重新计算式 (18), 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\Delta v)^{2-s+r}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega(\Delta v)^2\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{r-s}{2}}\left(\int_\Omega(\Delta v)^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-s}{2}}\leqslant\\&\quad\left(\int_\Omega(\Delta v)^2\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{r-s}{2}}\left[n_1\int_\Omega(\Delta v)^2\mathrm{d}x+n_2\int_\Omega\Delta v|\nabla\Delta v|\mathrm{d}x\right]^{r-s}\leqslant\\&\quad 2^{r-s-1}[A_2(t)]^{1-\frac{r-s}{2}}\left\{n_1^{r-s}[A_2(t)]^{r-s}+n_2^{r-s}[A_2(t)]^{\frac{1}{2}(r-s)}\left(\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}(r-s)}\right\}\leqslant\\&\quad a_{10}[A_2(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+a_{11}[A_2(t)]^{1+\frac{r-s}{2-(r-s)}}+a_{12}\varepsilon_4\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{24}$$

其中ε_4是大于零的常数，$a_{10}=2^{r-s-1}n_1^{r-s}$，$a_{11}=\left[1-\frac{1}{2}(r-s)\right]2^{r-s-1}n_2^{r-s}\varepsilon_4^{-\frac{r-s}{2-(r-s)}}$，$a_{12}=\frac{1}{2}(r-s)2^{r-s-1}n_2^{r-s}$.

把式 (23) 和式 (24) 代入式 (5)，再结合式 (3)、(4)、(9) 和式 (10)，可得

$$A'(t)\leqslant-\left[\frac{1}{2}(2-s)(1-s)-\frac{1-s+r}{2-s+r}a_9\varepsilon_3\right]\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+b_5[A_1(t)]^{1+\delta_2}+b_6[A_1(t)]^{1+\frac{(2-2s)\delta_2}{(2-s)\delta_1}}-\left[\frac{1}{2}(2-s)(1-s)-\frac{1}{2-s+r}a_{12}\varepsilon_4\right]\int_\Omega|\nabla\Delta v|^2\mathrm{d}x+b_7[A_2(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+b_8[A_2(t)]^{1+\frac{r-s}{2-(r-s)}},$$

其中

$$b_5=\frac{1-s+r}{2-s+r}a_7,\ b_6=\frac{1-s+r}{2-s+r}a_8,\ b_7=\frac{1}{2-s+r}a_{10},\ b_8=\frac{1}{2-s+r}a_{11}.$$

取$\varepsilon_3=\frac{(2-s)(1-s)(2-s+r)}{2a_9(1-s+r)}$，$\varepsilon_4=\frac{(2-s)(1-s)(2-s+r)}{2a_{12}}$，可得

$$A'(t)\leqslant b_5[A(t)]^{1+\delta_2}+b_6[A(t)]^{1+\frac{(2-2s)\delta_2}{(2-s)\delta_1}}+b_7[A(t)]^{1+\frac{1}{2}(r-s)}+b_8[A(t)]^{1+\frac{r-s}{2-(r-s)}}.\tag{25}$$

与式 (21) 类似，对式 (25) 从 0 到t^*积分即可完成定理 3 的证明．证毕．

注 2　如果设$D(u)\leqslant u^s$，定理 1~3 仍然是成立的．

注 3　当$\Omega\subset\mathbb{R}^2$时，引理 1 和引理 2 就不再成立了，此时我们应用了引理 3．

4　总　　结

本文首先假设方程的解在某有限时刻爆破，然后推导了爆破时间的下界，说明了解在该下界之前是保持有界的．其次，本文的问题还可以向更深层次推广．第一，我们注意到文献 [1] 研究了模型 (1) 在$\Omega\subset\mathbb{R}^N,N>3$上解的爆破现象，在初始数据满足一定的条件时，得到了解的爆破时间的上界．可以进一步考虑$N>3$的情形，在此种情况下引理 2 和引理 3 就不再成立了．此时可利用高维空间的微分不等式，以证明解的存在性和爆破时间的下界．第二，本文的研究可以向更加一般化的模型推进，例如[22]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\nabla\cdot(D(u)\nabla u)-\nabla\cdot(S(u)\nabla v)+g(u), & \text{in }\ \Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=\Delta v-v+u, & \text{in }\ \Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & \text{in }\ \partial\Omega\times(0,t^*),\\ u=u_0(x),\ v=v_0(x), & \text{in }\ \Omega,t=0,\end{cases}$$

其中$g(u)$是连续非负函数．

致谢　本文作者衷心感谢广州华商学院科研团队项目 (2021HSKT01) 对本文的资助．

参考文献（References）：

[1] CIEŚLAK T, STINNER C. Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic-parabolic quasilinear Keller-Segel system in higher dimensions[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**(29): 5832-5851.

[2] WEISSLER F B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1980, **29**(1): 79-102.

[3] WEISSLER F B. Existence and nonexistence of global solutions for a heat equation[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1981, **38**: 29-40.

[4] 李远飞, 肖胜中, 陈雪姣. 非线性边界条件下具有变系数的热量方程解的存在性及爆破现象[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 92-101.（LI Yuanfei, XIAO Shengzhong, CHEN Xuejiao. Existence and blow-up phenomena of solutions to heat equations with variable coefficients under nonlinear boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 92-101.(in Chinese)）

[5] 李远飞. 非线性边界条件下高维抛物方程解的全局存在性及爆破现象[J]. 应用数学学报, 2019, **42**(6): 721-735.（LI

Yuanfei. Blow-up phenomena and global existences for higher-dimensional parabolic equations under nonlinear boundary conditions[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2019, **42**(6): 721-735.(in Chinese))

[6] GRILLO G, MURATORI M, PUNZO F. Blow-up and global existence for the porous medium equation with reaction on a class of Cartan-Hadamard manifolds[J]. *Journal of Differential Equations*, 2019, **266**(7): 4305-4336.

[7] 李远飞. Robin边界条件下更一般化的非线性抛物问题全局解的存在性和爆破[J]. 应用数学学报, 2018, **41**(2): 257-267. (LI Yuanfei. Blow-up and global existence of the solution to some more general nonlinear parabolic problems with Robin boundary conditions[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2018, **41**(2): 257-267.(in Chinese))

[8] JIANG J, WU H, ZHENG S G. Blow-up for a three dimensional Keller-Segel model with consumption of chemoattractant[J]. *Journal of Differential Equations*, 2018, **264**(8): 5432-5464.

[9] DING J T, KOU W. Blow-up solutions for reaction diffusion equations with nonlocal boundary conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, **470**(1): 1-15.

[10] LIU Y. Lower bounds for the blow-up time in a non-local reaction diffusion problem under nonlinear boundary conditions[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, **57**(3/4): 926-931.

[11] HAN Y Z, GAO W J, SUN Z, et al. Upper and lower bounds of blow-up time to a parabolic type Kirchhoff equation with arbitrary initial energy[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2018, **76**(10): 2477-2483.

[12] 许然, 田娅, 秦瑶. 一类反应扩散方程的爆破时间下界估计[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 113-122. (XU Ran, TIAN Ya, QIN Yao. Lower bounds of the blow-up time for a class of reaction diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 113-122.(in Chinese))

[13] YANG X, ZHOU Z F. Blow-up problems for the heat equation with a local nonlinear Neumann boundary condition[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, **261**(5): 2738-2783.

[14] PAYNE L E, SONG J C. Blow-up and decay criteria for a model of chemotaxis[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, **367**(1): 1-6.

[15] 李远飞, 雷彩明. 具有非线性边界条件的趋化性模型解的爆破时间下界估计[J]. 应用数学学报, 2015, **38**(6): 1097-1102. (LI Yuanfei, LEI Caiming. Lower bound of the blow-up time for a model of chemotaxis with nonlinear boundary condition[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2015, **38**(6): 1097-1102.(in Chinese))

[16] PAYNE L E, SONG J C. Lower bounds for blow-up in a model of chemotaxis[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **385**(2): 672-676.

[17] LI J R, ZHENG S N. A lower bound for blow-up time in a fully parabolic Keller-Segel system[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, **26**(4): 510-514.

[18] 李远飞. Keller-Segel 抛物系统解的爆破现象[J]. 应用数学学报, 2017, **40**(5): 692-701. (LI Yuanfei. Blow-up phenomena for the solutions to a fully parabolic Keller-Segel system[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2017, **40**(5): 692-701.(in Chinese))

[19] PAYNE L E, PHILIPPIN G A, VERNIERPIRO S. Blow-up phenomena for a semilinear heat equation with nonlinear boundary condition, Ⅱ[J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, **73**(4): 971-978.

[20] 李远飞, 王燕, 骆世广. 齐次Neumann边界条件非线性抛物方程解的爆破时间的下界[J]. 数学的实践与认识, 2015, **45**(16): 209-216. (LI Yuanfei, WANG Yan, LUO Shiguang. Lower bounds for blow-up time in nonlinear parabolic problems under Neumann conditions[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2015, **45**(16): 209-216.(in Chinese))

[21] 李远飞. 海洋动力学中二维粘性原始方程组解对热源的收敛性[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(3): 339-352. (LI Yuanfei. Convergence results on heat source for 2D viscous primitive equations of ocean dynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(3): 339-352.(in Chinese))

[22] LIU B C, DONG M Z. Globally bounded solutions in a Chemotaxis model of quasilinear parabolic type[J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 2019, **34**(3): 274-282.