应用数学和力学
42 卷 12 期　2021 年 12 月

Applied Mathematics and Mechanics
Vol.42,No.12,Dec.,2021

http://www.applmathmech.cn

一类具有非线性发生率与时滞的离散扩散 SIR 模型临界行波解的存在性*

张笑嫣

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

摘要： 研究了一类具有非线性发生率的离散扩散时滞 SIR 模型的临界行波解的存在性.在人口总数非恒定的条件下,首先,应用上下解法与 Schauder 不动点定理证明了解在有限闭区间上的存在性;其次,通过极限讨论了临界行波解在整个实数域上存在;最后,通过反证法与波动引理得到了行波解在无穷远处的渐近行为.

关　键　词： 离散扩散 SIR 模型； 行波解； 非线性发生率； 时滞

中图分类号： O357.41　　**文献标志码**： A　　DOI：10.21656/1000-0887.420111

Existence of Critical Traveling Wave Solutions for a Class of Discrete Diffusion SIR Models With Nonlinear Incidence and Time Delay

ZHANG Xiaoyan

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi' an* 710071, *P.R.China*)

Abstract: The existence of critical traveling wave solutions for a class of discrete diffusion SIR models with nonlinear incidence and time delay were studied. Under the condition that the total population is not a constant, the upper and lower solutions method and the Schauder fixed point theorem were used to prove the existence of the solution on a finite interval. Furthermore, the existence of critical traveling wave solutions was proved on the real number field through limit arguments. Finally, with the fluctuation lemma and the proof by contradiction, the asymptotic boundary of the critical traveling wave was obtained.

Key words: discrete diffusion SIR model; traveling wave solution; nonlinear incidence; time delay

引　　言

近年来,反应扩散方程已被广泛用于描述流行病学中的多种现象[1],其中 $c > c^*$ 时行波解的存在性以及 $c < c^*$ 时行波解的不存性问题已有许多研究结果.例如,Bai 和 Wu[2] 研究了具有一般非线性发生率的时滞 SIR 模型行波解的存在性以及不存在性条件;Wang 等[3] 考虑了具有标准发生率的 SIR 模型,之后 Wang 等[4] 将他们的方法和结果扩展到了三维 Kermack-McKendrick SIR 模型,并研究了 $c > c^*$ 时行波解的存在性

* **收稿日期**： 2021-04-28; **修订日期**： 2021-06-09
基金项目： 陕西省杰出青年科学基金(2020JC-24)
作者简介： 张笑嫣(1997—), 女, 硕士生(E-mail: 979739359@qq.com).
引用格式： 张笑嫣. 一类具有非线性发生率与时滞的离散扩散 SIR 模型临界行波解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(12): 1317-1326.

以及 $c < c^*$ 时行波解的不存性.但关于研究临界波,即波速等于最小波速的行波解的存在性工作相对较少.

2016 年, Fu 等[5]提出了一类由格点动力系统描述的离散扩散 SIR 模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_n(t)=d[S_{n+1}(t)+S_{n-1}(t)-2S_n(t)]-\beta S_n(t)I_n(t),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n(t)=[I_{n+1}(t)+I_{n-1}(t)-2I_n(t)]+\beta S_n(t)I_n(t)-\gamma I_n(t).\end{cases}\tag{1}$$

在文献[5]中,Fu 等通过应用单调迭代定理、Schauder 不动点定理以及极限的思想证明了 $c > c^*$ 时系统(1)行波解的存在性,并通过一些理论分析证明了 $c < c^*$ 时行波解的不存在性.但是他们并未解决行波解的有界性以及临界行波解的存在性问题.受文献[6]的启发,Wu[7]在 Fu 等[5]的研究基础上,通过讨论系统(1)中 I 的有界性再结合极限法得到了 $c=c^*$ 时系统(1)行波解的存在性.此后,Yang 等[8]利用文献[7]中的方法,研究了以下模型临界行波解的存在性:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}S(x,t)=d_1(J*S(x,t)-S(x,t))-\beta S(x,t)I(x,t),\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial t}I(x,t)=d_2(J*I(x,t)-I(x,t))+\beta S(x,t)I(x,t)-\gamma I(x,t).\end{cases}\tag{2}$$

考虑到总人口数非恒定的情况,Shu 等[9]研究了具有一般非线性发生率的三维 SIR 模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}S(x,t)=d_1\Delta S(x,t)-\varphi(S(x,t),I(x,t),R(x,t)),\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial t}I(x,t)=d_2\Delta I(x,t)+\varphi(S(x,t),I(x,t),R(x,t))-(\gamma+\delta)I(x,t),\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial t}R(x,t)=d_3\Delta R(x,t)+\gamma I(x,t).\end{cases}\tag{3}$$

Shu 等[9]通过在加权函数空间中构造凸集并应用 Schauder 不动点定理,证明了系统(3)超临界行波解的存在性,并利用反证法与双边 Laplace 变换法证明了 $R_0 < 1$ 或 $c < c^*$ 时行波解的不存在性.但对于 $c=c^*$ 时行波解的存在性问题尚未讨论.

然而,并不是所有疾病的传播过程都可以用 Laplace 算子来描述.如果将一个城市或城镇表示成一个斑块,那么感染者在各斑块之间的迁移将致使疾病在各斑块之间传播,由此得到空间离散的斑块模型,其相关研究可参看文献[10-14].考虑到疾病通常需要一段时间才能感染其他人群.综合上述情况,本文研究了一类具有非线性发生率的三维离散扩散时滞 SIR 模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_n(t)=d_1[S_{n+1}(t)+S_{n-1}(t)-2S_n(t)]-f(S_n(t),I_n(t-\tau),R_n(t)),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n(t)=d_2[I_{n+1}(t)+I_{n-1}(t)-2I_n(t)]+f(S_n(t),I_n(t-\tau),R_n(t))-(\gamma+\delta)I_n(t),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_n(t)=d_3[R_{n+1}(t)+R_{n-1}(t)-2R_n(t)]+\gamma I_n(t),\end{cases}\tag{4}$$

其中 $S_n(t),I_n(t),R_n(t)$ 分别表示易感者、感染者和康复者在位置 n 和时间 t 处的人口密度; $d_i(i=1,2,3)$ 表示三种人群的扩散系数; γ 表示感染者的康复率; δ 表示由疾病导致的死亡率.非线性发生率 $f(S,I,R)$ 满足:

(A1) $f(S,I,R)$ 关于变量 (S,I,R) 连续可微,且关于变量 S,I 是非减的,关于变量 R 是非增的.

(A2) $f(S,I,R)/I \leqslant \partial_I f(S,0,0)$; $f(S,I,R)=0$ 当且仅当 $SI=0$.

本文研究了系统(4)在 $c=c^*$ 时行波解的存在性及其在无穷远处的渐近行为.首先,应用上下解法与 Schauder 不动点定理证明了解在任意截断闭区间上的存在性;其次,通过极限讨论得到行波解在整个实数域上存在;最后,利用反证法与波动引理[15]得到了临界行波解在无穷远处的渐近行为.

需要指出的是,由于文献[7]中使用的极限方法很大程度上取决于系统(1)中的双线性发生率和文献[16]中的格微分系统单调动力学理论,而系统(4)具有时滞非线性函数,该理论和方法不适用于系统(4).受

文献[17]的启发，我们发现可以利用上下解法与 Schauder 不动点定理来研究临界行波解的存在性，并可以推广到三维离散扩散 SIR 模型.

本文的结构如下：首先，应用上下解法与 Schauder 不动点定理构造了一类截断问题的解；之后，应用极限的思想得到了 $c=c^*$ 时行波解在$\mathbb{R}$ 上的存在性；然后，通过一些理论分析得到了行波解的正性与渐近行为；最后，对全文进行了总结.

1　准备知识

本文研究具有如下形式的行波解：

$$(S_n,I_n,R_n)(t)=(S,I,R)(\xi),\qquad \xi=n+ct,$$

满足系统

$$\begin{cases}cS'(\xi)=d_1[S(\xi+1)+S(\xi-1)-2S(\xi)]-\beta f(S(\xi),I(\xi-c\tau),R(\xi)),\\ cI'(\xi)=d_2[I(\xi+1)+I(\xi-1)-2I(\xi)]+\beta f(S(\xi),I(\xi-c\tau),R(\xi))-(\gamma+\delta)I(\xi),\\ cR'(\xi)=d_3[R(\xi+1)+R(\xi-1)-2R(\xi)]+\gamma I(\xi),\end{cases}\tag{5}$$

以及渐近边界条件

$$S(-\infty)=S_0,\ I(-\infty)=0,\ R(-\infty)=0,$$

$$S(+\infty)=S_1,\ I(+\infty)=0,\ R(+\infty)=\frac{\gamma(S_0-S_1)}{\gamma+\delta}.$$

对系统(5)的第二个方程在 $(S_0,0,0)$ 处线性化，并取 $I(\xi)=\mathrm{e}^{\lambda\xi}$，得

$$c\lambda=d_2(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2)+\beta\partial_I f(S_0,0,0)\mathrm{e}^{-c\tau\lambda}-(\gamma+\delta).\tag{6}$$

与文献[18]中的引理 2.1 和引理 2.2 相似，给出以下两个引理.

引理 1　令

$$\Omega(\lambda,c)=d_2(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2)-c\lambda+\beta\partial_I f(S_0,0,0)\mathrm{e}^{-c\tau\lambda}-(\gamma+\delta).\tag{7}$$

假设 $\beta\partial_I f(S_0,0,0)>\gamma+\delta$，那么存在两个常数 $c^*>0$ 以及 $\lambda^*>0$，使得

$$\Omega(\lambda^*,c^*)=\Omega_\lambda(\lambda^*,c^*)=0.$$

引理 2　令

$$\Phi(\lambda,c)=c\lambda-d_3(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2),\tag{8}$$

则对任意 $c>0$，存在常数 $\tilde{\lambda}>0$ 使得 $\lambda\in(0,\tilde{\lambda})$ 时，有 $\Phi(\lambda,c)>0$.

2　临界行波解

为了便于分析，下面固定 $\beta\partial_I f(S_0,0,0)>\gamma+\delta, c=c^*$.

2.1　构造上下解

定义函数

$$\bar{S}(\xi):=S_0,\ \bar{I}(\xi):=-M\xi\mathrm{e}^{\lambda^*\xi},\ \bar{R}(\xi):=K\mathrm{e}^{\epsilon_2\xi},$$

$$\underline{S}(\xi):=\max\{S_0(1-M_1\mathrm{e}^{\epsilon_1\xi}),0\},\ \underline{I}(\xi):=\max\{[-M\xi-M_2(-\xi)^{1/2}]\mathrm{e}^{\lambda^*\xi},0\},\ \underline{R}(\xi):=0,$$

其中 λ^* 由引理 1 给定.$\xi_1=\epsilon_1^{-1}\ln M_1^{-1}$，$\xi_2=-M_2^2M^{-2}$.取合适的 $K>0$，$\epsilon_2\in(0,\min\{\tilde{\lambda},\lambda^*\})$ 使得

$$-\frac{\gamma M}{K}\xi\mathrm{e}^{(\lambda^*-\epsilon_2)\xi}-\Phi(\epsilon_2,c^*)\leqslant 0,\qquad \xi\in\mathbb{R},$$

以及足够大的 $M_1>0$ 和足够小的 $\epsilon_1>0$，使得 $\xi<\xi_1$ 时，

$$d_1M_1S_0(2-\mathrm{e}^{\epsilon_1}-\mathrm{e}^{-\epsilon_1})+c^*\epsilon_1M_1S_0+\beta M(\xi-c^*\tau)\partial_I f(S_0,0,0)\mathrm{e}^{(\lambda^*-\epsilon_1)\xi-\lambda^*c^*\tau}\geqslant 0.$$

定义

$$D[u](\xi):=u(\xi+1)+u(\xi-1)-2u(\xi).$$

引理 3　对任意给定足够小的 $\epsilon_1>0$，$\epsilon_2>0$ 以及足够大的 $M_1>0$，$M_2>0$，函数 $\bar{S}(\xi)$，$\underline{S}(\xi)$，$\bar{I}(\xi)$，

$\underline{I}(\xi)$, $\bar{R}(\xi)$, $\underline{R}(\xi)$ 满足

$$d_1 D[\bar{S}](\xi) - c^* \bar{S}'(\xi) - \beta f(\bar{S}(\xi), \underline{I}(\xi - c^*\tau), \bar{R}(\xi)) \leqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$d_2 D[\bar{I}](\xi) - c^* \bar{I}'(\xi) + \beta f(\bar{S}(\xi), \bar{I}(\xi - c^*\tau), \underline{R}(\xi)) - (\gamma + \delta)\bar{I}(\xi) \leqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

$$d_3 D[\bar{R}](\xi) - c^* \bar{R}'(\xi) + \gamma \bar{I}(\xi) \leqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

$$d_1 D[\underline{S}](\xi) - c^* \underline{S}'(\xi) - \beta f(\underline{S}(\xi), \bar{I}(\xi - c^*\tau), \underline{R}(\xi)) \geqslant 0, \quad \xi \neq \xi_1, \tag{12}$$

$$d_2 D[\underline{I}](\xi) - c^* \underline{I}'(\xi) + \beta f(\underline{S}(\xi), \underline{I}(\xi - c^*\tau), \bar{R}(\xi)) - (\gamma + \delta)\underline{I}(\xi) \geqslant 0, \quad \xi \neq \xi_2, \tag{13}$$

$$d_3 D[\underline{R}](\xi) - c^* \underline{R}'(\xi) + \gamma \underline{I}(\xi) \geqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

证明　式(9)和(14)显然成立.接下来分四步证明该引理.

Step 1　对任意的 $\xi \in \mathbb{R}$，有 $\bar{I}(\xi) = -M\xi e^{\lambda^*\xi}$, $\bar{I}(\xi - 1) = -M(\xi - 1)e^{\lambda^*(\xi-1)}$, $\bar{I}(\xi - c^*\tau) = -M(\xi - c^*\tau)e^{\lambda^*(\xi - c^*\tau)}$, $\bar{I}(\xi + 1) \leqslant -M(\xi + 1)e^{\lambda^*(\xi+1)}$.由引理 1 得

$$\begin{aligned} &d_2 D[\bar{I}](\xi) - c^* \bar{I}'(\xi) + \beta f(\bar{S}(\xi), \bar{I}(\xi - c^*\tau), \underline{R}(\xi)) - (\gamma + \delta)\bar{I}(\xi) \leqslant \\ &\quad -M\xi e^{\lambda^*\xi}\Omega(\lambda^*, c^*) - M e^{\lambda^*\xi}\Omega_\lambda(\lambda^*, c^*) = 0. \end{aligned}$$

Step 2　由 $\bar{I}(\xi)$, $\bar{R}(\xi)$ 的定义以及引理 2 知,对任意的 $\xi \in \mathbb{R}$ 有

$$d_3 D[\bar{R}](\xi) - c^* \bar{R}'(\xi) + \gamma \bar{I}(\xi) \leqslant K e^{\epsilon_2 \xi}\left[-\frac{\gamma M}{K}\xi e^{(\lambda^* - \epsilon_2)\xi} - \Phi(\epsilon_2, c^*)\right] \leqslant 0.$$

Step 3　$\xi > \xi_1$ 时, $\underline{S}(\xi) = 0$, 不等式(12)显然成立.下证 $\xi < \xi_1$ 时的情况.取足够小的 $\epsilon_1 \in (0, \lambda^*)$ 以及足够大的 $M_1 > 0$, 根据 $\underline{S}(\xi)$, $\bar{I}(\xi)$, $\underline{R}(\xi)$ 的定义得

$$\begin{aligned} &d_1 D[\underline{S}](\xi) - c^* \underline{S}'(\xi) - \beta f(\underline{S}(\xi), \bar{I}(\xi - c^*\tau), \underline{R}(\xi)) \geqslant \\ &\quad e^{\epsilon_1 \xi}[d_1 M_1 S_0(2 - e^{\epsilon_1} - e^{-\epsilon_1}) + c^*\epsilon_1 M_1 S_0 + \beta M(\xi - c^*\tau)\partial_I f(S_0, 0, 0)e^{(\lambda^* - \epsilon_1)\xi - \lambda^* c^*\tau}] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Step 4　$\xi > \xi_2$ 时,不等式(13)显然成立.接下来考虑 $\xi < \xi_2$ 的情况.取足够大的 $M_2 > 1$ 和足够小的 $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_2)$ 使得 $\xi_2 < \xi_1 < 0$, 由 Taylor 定理得

$$(-\xi + 1)^{1/2} \leqslant (-\xi)^{1/2} + \frac{1}{2}(-\xi)^{-1/2}, \quad (-\xi - 1)^{1/2} \leqslant (-\xi)^{1/2} - \frac{1}{2}(-\xi)^{-1/2},$$

$$(-\xi + c^*\tau)^{1/2} \leqslant (-\xi)^{1/2} + \frac{c^*\tau}{2}(-\xi)^{-1/2} - \frac{(c^*\tau)^2}{8}(-\xi)^{-3/2} + \frac{(c^*\tau)^3}{16}(-\xi)^{-5/2}.$$

不等式(13)等价于

$$\begin{aligned} &d_2 D[\underline{I}](\xi) - c^* \underline{I}'(\xi) - (\gamma + \delta)\underline{I}(\xi) + \beta\partial_I f(S_0, 0, 0)\underline{I}(\xi - c^*\tau) \geqslant \\ &\quad \beta\partial_I f(S_0, 0, 0)\underline{I}(\xi - c^*\tau) - \beta f(\underline{S}(\xi), \underline{I}(\xi - c^*\tau), \bar{R}(\xi)). \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $\Omega(\lambda^*, c^*) = \Omega_\lambda(\lambda^*, c^*) = 0$, 则式(15)的左半边满足

$$\begin{aligned} &d_2 D[\underline{I}](\xi) - c^* \underline{I}'(\xi) - (\gamma + \delta)\underline{I}(\xi) + \beta\partial_I f(S_0, 0, 0)\underline{I}(\xi - c^*\tau) \geqslant \\ &\quad \beta M_2 \partial_I f(S_0, 0, 0)e^{\lambda^*(\xi - c^*\tau)}\left[\frac{(c^*\tau)^2}{8}(-\xi)^{-3/2} - \frac{(c^*\tau)^3}{16}(-\xi)^{-5/2}\right]. \end{aligned}$$

取任意的 $\epsilon \in (0, \partial_I f(S_0, 0, 0))$, 假设存在足够小的正常数 σ, 使得 $0 < I < \sigma$ 时,

$$\frac{f(S, I, R)}{I} \geqslant \partial_I f(S, 0, 0) - \epsilon.$$

那么 $0 < I < \sigma$ 时,有

$$\begin{aligned} &\beta\partial_I f(S_0, 0, 0)\underline{I}(\xi - c^*\tau) - \beta f(\underline{S}(\xi), \underline{I}(\xi - c^*\tau), \bar{R}(\xi)) \leqslant \\ &\quad [\beta\partial_I f(S_0, 0, 0) - \beta(\partial_I f(\underline{S}, 0, 0) - \epsilon) + \underline{I}(\xi - c^*\tau)]^2. \end{aligned} \tag{16}$$

再令 $M_2 \to +\infty$，得 $0 < \underline{I}(\xi) < \sigma, \underline{S}(\xi) \to S_0$. 由于不等式(16)对任意的 ϵ 成立,则

$$\beta\partial_I(S_0,0,0)\underline{I}(\xi - c^*\tau) - \beta f(\underline{S}(\xi),\underline{I}(\xi - c^*\tau),\bar{R}(\xi)) \leqslant [\underline{I}(\xi - c^*\tau)]^2 \leqslant [\bar{I}(\xi - c^*\tau)]^2.$$

那么式(15)等价于证明

$$\mathrm{e}^{\lambda^*\xi} \leqslant \frac{M_2}{M^2}\beta\partial_I f(S_0,0,0)\mathrm{e}^{\lambda^* c^*\tau}\frac{(c^*\tau)^2}{16}(-\xi)^{-7/2}\left(2 - \frac{c^*\tau}{\xi}\right). \tag{17}$$

当 $M_2 \to +\infty$ 时,式(17)左边趋于 0,右边趋于 ∞，式(13)成立. □

2.2　截断问题

定义以下集合：

$$\begin{aligned}\Theta_X := \{&(\phi,\varphi,\psi)(\xi) \in C([-X,X],\mathbb{R}^3) \mid \phi(-X) = \underline{S}(-X),\varphi(-X) = \underline{I}(-X),\\ &\psi(-X) = \underline{R}(-X),\underline{S}(\xi) \leqslant \phi(\xi) \leqslant \bar{S}(\xi),\underline{I}(\xi) \leqslant \varphi(\xi) \leqslant \bar{I}(\xi),\\ &\underline{R}(\xi) \leqslant \psi(\xi) \leqslant \bar{R}(\xi),\ \xi \in [-X,X]\},\end{aligned}$$

其中 $X \gg l := \max\{|\xi_2|, c^*\tau, 1\}$. 显然 Θ_X 是空间 $C([-X,X],\mathbb{R}^3)$ 上的非空、有界、闭凸集.在闭区间 $[-X-l,X+l]$ 上,对任意的 $(\phi,\varphi,\psi)(\xi) \in \Theta_X$，定义

$$\hat{\phi}(\xi) := \begin{cases}\phi(X), & \xi \geqslant X,\\ \phi(\xi), & |\xi| < X,\\ \underline{S}(\xi), & \xi \leqslant -X,\end{cases}\quad \hat{\varphi}(\xi) := \begin{cases}\varphi(X), & \xi \geqslant X,\\ \varphi(\xi), & |\xi| < X,\\ \underline{I}(\xi), & \xi \leqslant -X,\end{cases}\quad \hat{\psi}(\xi) := \begin{cases}\psi(X), & \xi \geqslant X,\\ \psi(\xi), & |\xi| < X,\\ \underline{R}(\xi), & \xi \leqslant -X.\end{cases}$$

对任意的 $\xi \in [-X-l,X+l]$，有

$$\underline{S}(\xi) \leqslant \hat{\phi}(\xi) \leqslant \bar{S}(\xi),\ \underline{I}(\xi) \leqslant \hat{\varphi}(\xi) \leqslant \bar{I}(\xi),\ \underline{R}(\xi) \leqslant \hat{\psi}(\xi) \leqslant \bar{R}(\xi).$$

考虑以下初值问题：

$$\begin{cases}c^*S'(\xi) = d_1[\hat{\phi}(\xi+1) + \hat{\phi}(\xi-1) - 2S(\xi)] - \alpha S(\xi) + \alpha\phi(\xi) -\\ \qquad \beta f(\phi(\xi),\hat{\varphi}(\xi - c^*\tau),\psi(\xi)),\\ c^*I'(\xi) = d_2[\hat{\varphi}(\xi+1) + \hat{\varphi}(\xi-1) - 2I(\xi)] +\\ \qquad \beta f(\phi(\xi),\hat{\varphi}(\xi - c^*\tau),\psi(\xi)) - (\gamma+\delta)I(\xi),\\ c^*R'(\xi) = d_3[\hat{\psi}(\xi+1) + \hat{\psi}(\xi-1) - 2R(\xi)] + \gamma\varphi(\xi),\\ S(-X) = \underline{S}(-X),\ I(-X) = \underline{I}(-X),\ R(-X) = \underline{R}(-X),\end{cases} \tag{18}$$

其中 $\xi \in [-X,X], \alpha > \beta$. 由常微分方程理论知,系统(18)在空间 $C^1([-X,X],\mathbb{R}^3)$ 上存在唯一解 $(S_X(\xi), I_X(\xi),R_X(\xi))$，并且解可以表示为

$$\begin{cases}S_X(\xi) = \underline{S}(-X)\mathrm{e}^{-(2d_1+\alpha)(X+\xi)/c^*} + \dfrac{1}{c^*}\displaystyle\int_{-X}^{\xi}\mathrm{e}^{(2d_1+\alpha)(\eta-\xi)/c^*}H_1(\phi,\varphi,\psi)(\eta)\mathrm{d}\eta,\\ I_X(\xi) = \underline{I}(-X)\mathrm{e}^{-(2d_2+\gamma+\delta)(X+\xi)/c^*} + \dfrac{1}{c^*}\displaystyle\int_{-X}^{\xi}\mathrm{e}^{(2d_2+\gamma+\delta)(\eta-\xi)/c^*}H_2(\phi,\varphi,\psi)(\eta)\mathrm{d}\eta,\\ R_X(\xi) = \dfrac{1}{c^*}\displaystyle\int_{-X}^{\xi}\mathrm{e}^{2d_3(\eta-\xi)/c^*}H_3(\phi,\varphi,\psi)(\eta)\mathrm{d}\eta,\end{cases} \tag{19}$$

其中

$$\begin{cases}H_1(\phi,\varphi,\psi)(\xi) = d_1[\hat{\phi}(\xi+1) + \hat{\phi}(\xi-1)] + \alpha\phi(\xi) -\\ \qquad \beta f(\phi(\xi),\hat{\varphi}(\xi - c^*\tau),\psi(\xi)),\\ H_2(\phi,\varphi,\psi)(\xi) = d_2[\hat{\varphi}(\xi+1) + \hat{\varphi}(\xi-1)] +\\ \qquad \beta f(\phi(\xi),\hat{\varphi}(\xi - c^*\tau),\psi(\xi)),\\ H_3(\phi,\varphi,\psi)(\xi) = d_3[\hat{\psi}(\xi+1) + \hat{\psi}(\xi-1)] + \gamma\varphi(\xi).\end{cases}$$

由于 $\alpha > \beta$，那么 $H_1(\phi,\varphi,\psi)$ 关于 φ 递减,关于 ϕ,ψ 递增;$H_2(\phi,\varphi,\psi)$ 关于 ψ 递减,关于 ϕ,φ 递增;$H_3(\phi,\varphi,$

ψ) 关于 φ,ψ 递增.根据系统(19)定义算子 $\mathcal{T}=(\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3):\Theta_X\mapsto C^1([-X,X],\mathbb{R}^3)$, 并满足

$$\mathcal{T}_1(\phi,\varphi,\psi)(\xi)\coloneqq S_X(\xi),\ \mathcal{T}_2(\phi,\varphi,\psi)(\xi)\coloneqq I_X(\xi),\ \mathcal{T}_3(\phi,\varphi,\psi)(\xi)\coloneqq R_X(\xi).$$

引理 4 算子 $\mathcal{T}=(\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3):\Theta_X\mapsto\Theta_X$ 是全连续的.

证明 首先证明算子 $\mathcal{T}=(\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3):\Theta_X\mapsto\Theta_X$.对任意$(\phi,\varphi,\psi)(\xi)\in\Theta_X$, 只需证

$$\underline{S}(\xi)\leqslant S_X(\xi)\leqslant\bar{S}(\xi),\ \underline{I}(\xi)\leqslant I_X(\xi)\leqslant\bar{I}(\xi),\ \underline{R}(\xi)\leqslant R_X(\xi)\leqslant\bar{R}(\xi),\qquad \xi\in[-X,X].$$

由 $H_1(\phi,\varphi,\psi)(\xi)$ 的单调性以及式(9)得

$$\begin{aligned}&d_1[\hat{\phi}(\xi+1)+\hat{\phi}(\xi-1)-2\bar{S}(\xi)]-c^*\bar{S}'(\xi)-\alpha\bar{S}(\xi)+\alpha\phi(\xi)-\\&\quad\beta f(\phi(\xi),\hat{\varphi}(\xi-c^*\tau),\psi(\xi))\leqslant\\&\quad d_1D[\bar{S}](\xi)-c^*\bar{S}'(\xi)-\alpha\bar{S}(\xi)+\alpha\bar{S}(\xi)-f(\bar{S}(\xi),\underline{I}(\xi-c^*\tau),\bar{R}(\xi))\leqslant 0,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\xi\in[-X,X],\end{aligned}$$

等价于

$$c^*\bar{S}'(\xi)+(2d_1+\alpha)\bar{S}(\xi)\geqslant H_1(\phi,\varphi,\psi)(\xi),\qquad \xi\in[-X,X].$$

那么

$$\begin{aligned}\bar{S}(\xi)&\geqslant\bar{S}(-X)\mathrm{e}^{-(2d_1+\alpha)(X+\xi)/c^*}+\frac{1}{c^*}\int_{-X}^{\xi}\mathrm{e}^{(2d_1+\alpha)(\eta-\xi)/c^*}H_1(\phi,\varphi,\psi)(\eta)\mathrm{d}\eta\geqslant\\&\quad\underline{S}(-X)\mathrm{e}^{-(2d_1+\alpha)(X+\xi)/c^*}+\frac{1}{c^*}\int_{-X}^{\xi}\mathrm{e}^{(2d_1+\alpha)(\eta-\xi)/c^*}H_1(\phi,\varphi,\psi)(\eta)\mathrm{d}\eta=S_X(\xi),\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\xi\in[-X,X].\end{aligned}$$

再由 $H_1(\phi,\varphi,\psi)(\xi)$ 的单调性以及式(12),对 $\xi\in[-X,\xi_1)\cup(\xi_1,X]$ 有

$$\begin{aligned}&d_1[\hat{\phi}(\xi+1)+\hat{\phi}(\xi-1)-2\underline{S}(\xi)]-c^*\underline{S}'(\xi)-\alpha\underline{S}(\xi)+\alpha\phi(\xi)-\\&\quad\beta f(\phi(\xi),\hat{\varphi}(\xi-c^*\tau),\psi(\xi))\geqslant\\&\quad d_1D[\underline{S}](\xi)-c^*\underline{S}'(\xi)-\alpha\underline{S}(\xi)+\alpha\underline{S}(\xi)-f(\underline{S}(\xi),\bar{I}(\xi-c^*\tau),\underline{R}(\xi))\geqslant 0,\end{aligned}$$

等价于

$$c^*\underline{S}'(\xi)+(2d_1+\alpha)\underline{S}(\xi)\leqslant H_1(\phi,\varphi,\psi)(\xi),\qquad \xi\in[-X,\xi_1)\cup(\xi_1,X].$$

那么

$$\begin{aligned}\underline{S}(\xi)&\leqslant\underline{S}(-X)\mathrm{e}^{-(2d_1+\alpha)(X+\xi)/c^*}+\frac{1}{c^*}\int_{-X}^{\xi}\mathrm{e}^{(2d_1+\alpha)(\eta-\xi)/c^*}H_1(\phi,\varphi,\psi)(\eta)\mathrm{d}\eta=S_X(\xi),\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\xi\in[-X,\xi_1)\cup(\xi_1,X].\end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{cases}\bar{I}(\xi)\geqslant I_X(\xi), & \xi\in[-X,X],\\ \underline{I}(\xi)\leqslant I_X(\xi), & \xi\in[-X,\xi_2)\cup(\xi_2,X],\\ \underline{R}(\xi)\leqslant R_X(\xi)\leqslant\bar{R}(\xi), & \xi\in[-X,X].\end{cases}$$

下证算子 $\mathcal{T}$ 是紧的.因为解 $(S_X(\xi),I_X(\xi),R_X(\xi))\in C^1([-X,X],\mathbb{R}^3)$ 且满足式(19),那么 $S'_X(\xi)$,$I'_X(\xi)$,$R'_X(\xi)$ 在闭区间 $[-X,X]$ 上有界.根据 Arzela-Ascoli 定理知,算子 $\mathcal{T}$ 是紧的.最后证明算子 $\mathcal{T}$ 连续.对任意的 $(\phi_i,\varphi_i,\psi_i)(\xi)\in\Theta_X(i=1,2)$, 存在常数 C, 使得

$$\begin{aligned}&|f(\phi_1(\xi),\varphi_1(\xi-c^*\tau),\psi_1(\xi))-f(\phi_2(\xi),\varphi_2(\xi-c^*\tau),\psi_2(\xi))|\leqslant\\&\quad C(|\phi_1-\phi_2|+|\varphi_1-\varphi_2|+|\psi_1-\psi_2|),\end{aligned}$$

则

$$|H_1(\phi_1,\varphi_1,\psi_1)(\xi)-H_1(\phi_2,\varphi_2,\psi_2)(\xi)|\leqslant (2d_1+\alpha+\beta C)\sup_{\xi\in[-X,X]}|\phi_1-\phi_2|+\beta C\sup_{\xi\in[-X,X]}|\varphi_1-\varphi_2|+\beta C\sup_{\xi\in[-X,X]}|\psi_1-\psi_2|.$$

那么

$$|\mathcal{T}_1(\phi_1,\varphi_1,\psi_1)(\xi)-\mathcal{T}_1(\phi_2,\varphi_2,\psi_2)(\xi)|\leqslant \frac{2d_1+\alpha+\beta C}{2d_1+\alpha}\sup_{\xi\in[-X,X]}|\phi_1-\phi_2|+\frac{\beta C}{2d_1+\alpha}\Big(\sup_{\xi\in[-X,X]}|\varphi_1-\varphi_2|+\sup_{\xi\in[-X,X]}|\psi_1-\psi_2|\Big).$$

因此,算子 $\mathcal{T}_1$ 连续.同理可证得 $\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3$ 连续. □

根据引理 4 以及 Schauder 不动点定理知,算子 $\mathcal{T}$ 存在不动点 $(S_X,I_X,R_X)(\xi)$, 满足系统:

$$\begin{cases}c^*S'_X(\xi)=d_1D[S_X](\xi)-\beta f(S_X(\xi),I_X(\xi-c^*\tau),R_X(\xi)),\\ c^*I'_X(\xi)=d_2D[I_X](\xi)+\beta f(S_X(\xi),I_X(\xi-c^*\tau),R_X(\xi))-(\gamma+\delta)I_X(\xi),\\ c^*R'_X(\xi)=d_3D[R_X](\xi)+\gamma I_X(\xi).\end{cases}\tag{20}$$

并对 $\xi\in[-X+l,X-l]$ 有

$$\underline{S}(\xi)\leqslant S_X(\xi)\leqslant\bar{S}(\xi),\ \underline{I}(\xi)\leqslant I_X(\xi)\leqslant\bar{I}(\xi),\ \underline{R}(\xi)\leqslant R_X(\xi)\leqslant\bar{R}(\xi).$$

2.3 临界行波解的存在性

定理 1　假设 $\partial_I f(S_0,0,0)>\gamma+\delta, c=c^*$, 那么系统(5)存在行波解 $(S(\xi),I(\xi),R(\xi))$ 满足

$$\underline{S}(\xi)\leqslant S(\xi)\leqslant\bar{S}(\xi),\ \underline{I}(\xi)\leqslant I(\xi)\leqslant\bar{I}(\xi),\ \underline{R}(\xi)\leqslant R(\xi)\leqslant\bar{R}(\xi),\qquad \xi\in\mathbb{R}.\tag{21}$$

证明　取一递增序列 $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $X_n\gg l$ 并且当 $n\to+\infty$ 时 $X_n\to+\infty$.记$(S_{X_n},I_{X_n},R_{X_n})(\xi)$ 是系统(20)的解.对任意固定的 $N\in\mathbb{N}$, 由于函数 $\bar{S}(\xi),\bar{I}(\xi),\bar{R}(\xi)$ 在 $[-X_N,X_N]$ 上有界,那么序列

$$\{S_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\{I_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\{R_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\{f(S_{X_n}(\xi),I_{X_n}(\xi-c^*\tau),R_{X_n}(\xi))\}_{n\geqslant N}$$

在 $[-X_N,X_N]$ 上一致有界.再由系统(20)得

$$\{S'_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\ \{I'_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\ \{R'_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N}$$

在 $[-X_N+l,X_N-l]$ 上一致有界.对系统(20)进行微分,得

$$\{S''_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\ \{I''_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N},\ \{R''_{X_n}(\xi)\}_{n\geqslant N}$$

在 $[-X_N+2l,X_N-2l]$ 上一致有界.由 Arzela-Ascoli 定理知存在子列,仍记为 $\{S_{X_n}\}_{n\in\mathbb{R}}$, $\{I_{X_n}\}_{n\in\mathbb{R}}$, $\{R_{X_n}\}_{n\in\mathbb{R}}$, 使得当 $n\to\infty$ 时,对任意 $(S,I,R)(\xi)\in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 有

$$S_{X_n}(\xi)\to S(\xi),\ I_{X_n}(\xi)\to I(\xi),\ R_{X_n}(\xi)\to R(\xi).$$

因此 $(S(\xi),I(\xi),R(\xi))$ 是系统(5)的解并满足式(21). □

下面探究系统(5)行波解的渐近行为.基于定理 1,证明以下结果.

定理 2　对给定的常数 $S_0>0,S_1>0$, 假设 $\partial_I f(S_0,0,0)>\gamma+\delta, c=c^*$, 则系统(5)存在非平凡正行波解 $(S(\xi),I(\xi),R(\xi))$ 满足:

(i) $0<S(\xi)<S_0, I(\xi)>0, R(\xi)>0, \xi\in\mathbb{R}$;

(ii) $S(-\infty)=S_0, I(-\infty)=0, R(-\infty)=0$;

(iii) $S(+\infty):=S_1<S_0, I(+\infty)=0$;

(iv) $(\gamma+\delta)\int_{\mathbb{R}}I(\xi)\mathrm{d}\xi=\beta\int_{\mathbb{R}}f(S(\xi),I(\xi-c^*\tau),R(\xi))\mathrm{d}\xi=c^*(S_0-S_1)$;

(v) 若 $\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)<+\infty$, 则 $R(+\infty)=(\gamma(S_0-S_1))/(\gamma+\delta)$ 且$(S',I',R')(\pm\infty)=(0,0,0)$.

证明　Step 1　考虑对于任意的 $\xi\in\mathbb{R}$ 都有 $I(\xi)>0$.反证法,假设存在 $\hat{\xi}_1\in\mathbb{R}$ 使得 $I(\hat{\xi}_1)=0$, 则 $I'(\hat{\xi}_1)=0$.根据系统(5)第二个方程可得 $I(\hat{\xi}_1+1)=I(\hat{\xi}_1-1)=0$.那么对于任意整数 n 都有 $I(\hat{\xi}_1-n)=0$.而对于任意 $\xi\in(-\infty,\xi_2)$, $I(\xi)\geqslant\underline{I}(\xi)>0$, 产生矛盾.因此,对 $\xi\in\mathbb{R}$ 有 $I(\xi)>0$.类似可证得 $S(\xi)>0, R(\xi)>0$.下证 $S(\xi)<S_0$.假设存在实数 $\hat{\xi}_2$ 使得 $S(\hat{\xi}_2)=S_0, S'(\hat{\xi}_2)=0$.由系统(5)的第一个方程知

$$0 = d_1 D[S](\hat{\xi}_2) - c^* S'(\hat{\xi}_2) - \beta f(S(\hat{\xi}_2), I(\hat{\xi}_2 - c^*\tau), R(\hat{\xi}_2)) \leqslant$$
$$- \beta f(S_0, I(\hat{\xi}_2 - c^*\tau), R(\hat{\xi}_2)) < 0,$$

产生矛盾.因此,对任意实数 ξ, $S(\xi) < S_0$.

Step 2 首先讨论解在$-\infty$处的渐近行为.在式(21)中应用挤压定理,可得 $(S,I,R)(-\infty) = (S_0,0,0)$.下证解在$+\infty$处的渐近行为.对系统(5)的第一个方程在区间 $[y,\xi]$ 上进行积分,可得

$$\beta\int_y^\xi f(S(\eta), I(\eta - c^*\tau), R(\eta))\mathrm{d}\eta =$$
$$d_1\int_y^\xi D[S](\eta)\mathrm{d}\eta - c^*\int_y^\xi S'(\eta)\mathrm{d}\eta \leqslant (4d_1 + 2c)S_0.$$

结合 $S(\xi)$, $I(\xi)$, $R(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的正性,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(S(\xi), I(\xi - c^*\tau), R(\xi))\mathrm{d}\xi < \infty.$$

再对系统(5)的第二个方程在区间 $[y,\xi]$ 上进行积分,得

$$\int_y^\xi (\gamma + \delta) I(\eta)\mathrm{d}\eta \leqslant (4d_2 + 2c)I_0 + (4d_2 + 2c)S_0,$$

其中 $I_0 \coloneqq \sup_{\eta\in[y,\xi]} I(\eta)$.由于在$\mathbb{R}$上 $I(\xi) > 0$,则$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi < \infty$.再结合 $I'(\xi)$ 在$\mathbb{R}$上的一致有界性,可得 $I(+\infty) = 0$.

下证 $S(+\infty) \coloneqq S_1$.利用反证法,假设 $\limsup_{\xi\to+\infty} S(\xi) > \liminf_{\xi\to+\infty} S(\xi)$.根据波动引理[15]知存在两个序列 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{R}}$, $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{R}}$, 满足当 $n\to+\infty$ 时, ξ_n, $\eta_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} S(\xi_n) = \limsup_{\xi\to+\infty} S(\xi) \coloneqq n_1,\ \lim_{n\to\infty} S(\eta_n) = \liminf_{\xi\to+\infty} S(\xi) \coloneqq n_2 < n_1. \tag{22}$$

记

$$S_n(y) \coloneqq S(\eta_n + y),\ I_n(y) \coloneqq I(\eta_n + y),\ R_n(y) \coloneqq R(\eta_n + y), \qquad y \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

由于$I(+\infty)=0$, 则 $n\to\infty$ 时 $I_n(y)\to 0$.再根据式(21)以及系统(5)的第一个方程知 $S(\xi)$, $S'(\xi)$, $S''(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致有界.因此在空间 $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 上存在序列 n_k 使得 $n_k \to +\infty$ 时, $S_{n_k}(y) \to S_\infty(y)$ 以及 $S_\infty(0) = n_2$.由式(22)以及系统(5)的第一个方程得

$$c^* S_n'(y) = d_1 D[S_n](y) - \beta f(S_n(y), I_n(y - c^*\tau), R_n(y)), \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

对式(24)的两端取极限得

$$c^* S_\infty'(y) = d_1 D[S_\infty](y), \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

根据文献[16],定义

$$S_\infty(y) = a_1 + a_2 \mathrm{e}^{\rho y}, \qquad y \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

其中 a_1, a_2 为常数, ρ 为 $d_1(\mathrm{e}^\rho + \mathrm{e}^{-\rho} - 2) - c\rho = 0$ 的唯一正根.因为在实数域上 $S_\infty(y)$ 有界,则 $a_2 = 0$.因此, $S_\infty(y) = a_1 = S_\infty(0) = n_2$, 那么在 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 空间上有

$$\lim_{n\to\infty} S(\eta_n + y) = n_2. \tag{27}$$

类似可得 $\lim_{n\to\infty} S(\xi_n + y) = n_1$.接下来对系统(5)的第一个方程在区间 $[\eta_n, \xi_n]$ 上进行积分,并利用式(27)以及 Lesbegue 控制收敛定理可得

$$0 < c^*(n_1 - n_2) =$$
$$d_1\lim_{n\to\infty}\int_{\eta_n}^{\xi_n}[S(\xi+1) + S(\xi-1) - 2S(\xi)]\mathrm{d}\xi - \lim_{n\to\infty}\int_{\eta_n}^{\xi_n}\beta f(S(\xi), I(\xi - c^*\tau), R(\xi))\mathrm{d}\xi = 0.$$

矛盾.因此 $S(+\infty)$ 存在,记为 S_1.下证 $S_1 < S_0$.因为对 $\xi \in \mathbb{R}$ 满足 $S(\xi) < S_0$, 那么 $S_1 \leqslant S_0$.利用反证法,假设 $S_0 = S_1$, 再对系统(5)的第一个方程在 $\mathbb{R}$ 上进行积分,得

$$0 = c^*(S_0 - S_1) =$$
$$d_1\int_{-\infty}^{+\infty}[S(\xi+1) + S(\xi-1) - 2S(\xi)]\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{+\infty}\beta f(S(\xi), I(\xi - c^*\tau), R(\xi))\mathrm{d}\xi < 0,$$

产生矛盾.因此，$S(+\infty)=S_1<S_0$.

最后证明如果 $\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)<\infty$，那么 $R(+\infty)=(\delta(S_0-S_1))/(\delta+\gamma)$.与上述证明相类似，假设 $\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)>\liminf_{\xi\to+\infty}R(\xi)$.由文献[15]知，存在两个序列 $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{R}}$，$\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{R}}$，满足当 $n\to+\infty$ 时，$\zeta_n,\nu_n\to+\infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty}R(\zeta_n):=\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi):=n_3,\ \lim_{n\to\infty}R(\nu_n):=\liminf_{\xi\to+\infty}R(\xi):=n_4<n_3. \tag{28}$$

与上述论证相似，可得

$$\lim_{n\to\infty}R(\zeta_n+y)=n_3,\ \lim_{n\to\infty}R(\nu_n+y)=n_4. \tag{29}$$

对系统(5)的第三个方程在区间 $[\zeta_n,\nu_n]$ 上进行积分并令 $n\to+\infty$，得

$$0<c^*(n_3-n_4)=$$

$$d_3\lim_{n\to\infty}\int_{\nu_n}^{\zeta_n}[R(\xi+1)+R(\xi-1)-2R(\xi)]\mathrm{d}\xi-\lim_{n\to\infty}\int_{\nu_n}^{\zeta_n}\gamma I(\xi)\mathrm{d}\xi=0,$$

产生矛盾，因此 $R(+\infty)$ 存在.再对系统(5)的第一个方程在 $\mathbb{R}$ 上进行积分，得

$$c^*(S_0-S_1)=\beta\int_{-\infty}^{+\infty}f(S(\xi),I(\xi-c^*\tau),R(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

对系统(5)的第二个方程在 $\mathbb{R}$ 上进行积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\gamma+\delta)I(\xi)\mathrm{d}\xi=\beta\int_{-\infty}^{+\infty}f(S(\xi),I(\xi-c^*\tau),R(\xi))\mathrm{d}\xi=c^*(S_0-S_1). \tag{30}$$

对系统(5)的第三个方程在 $\mathbb{R}$ 上进行积分，再结合式(30)得

$$R(+\infty)=\frac{\gamma(S_0-S_1)}{\gamma+\delta}.$$

Step 3　最后对系统(5)中三个方程取极限，得 $(S',I',R')(\pm\infty)=(0,0,0)$. □

3　总　　结

本文作者致力于研究一类具有非线性发生率和时滞的三维离散扩散传染病模型的临界行波解.当 $c=c^*$，$\beta\partial_I f(S_0,0,0)>\gamma+\delta$ 时，通过构造上下解并结合 Schauder 不动点定理以及极限思想证明了非平凡、正向、有界行波解的存在性，之后利用反证法与波动引理研究了行波解的渐近行为.而关于行波解的不存在性以及唯一性，这将是笔者下一步需要解决的问题.

参考文献(References)：

[1] HOSONO Y, ILYAS B. Traveling waves for a simple diffusive epidemic model[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1995, **5**(7): 935-966.

[2] BAI Z G, WU S L. Traveling waves in a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **263**: 221-232.

[3] WANG X X, WANG H Y, WU J H. Traveling waves of diffusive predator-prey system: disease outbreak propagation[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series A*), 2015, **32**(9): 3303-3324.

[4] WANG H Y, WANG X S. Traveling wave phenomena in a Kermack-McKendrick SIR model[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2016, **28**: 143-166.

[5] FU S C, GUO J S, WU C C. Traveling wave solutions for a discrete diffusive epidemic model[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2016, **31**(10): 1739-1751.

[6] CHEN Y Y, GUO J S, HAMEL F. Traveling waves for a lattice dynamical system arising in a diffusive endemic model[J]. *Nonlinearity*, 2016, **30**(6): 2334-2359.

[7] WU C C. Existence of traveling waves with the critical speed for a discrete diffusive epidemic model[J]. *Journal of Differential Equations*, 2017, **262**(1): 272-282.

[8] YANG F Y, LI W T. Traveling waves in a nonlocal dispersal SIR model with critical wave speed[J]. *Journal of*

Mathematical Analysis and Applications, 2017, **458**(3): 1131-1146.

[9] SHU H Y, PAN X J, WANG X S, et al. Traveling waves in epidemic models: non-monotone diffusive systems with non-monotone incidence rates[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2018, **31**: 883-901.

[10] SAN X F, WANG Z C. Traveling waves for a two-group epidemic model with latent period in a patchy environment[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, **475**(2): 1502-1531.

[11] SAN X F, SUN J W. Spreading speed for an epidemic model with time delay in a patchy environment[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2021, **149**: 739-746.

[12] ZHANG R, WANG J L, LIU S Q. Traveling wave solutions for a class of discrete diffusive SIR epidemic model [J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2021, **31**(1): 1-33.

[13] ZHOU J B, SONG L Y, WEI J D. Mixed types of waves in a discrete diffusive epidemic model with nonlinear incidence and time delay[J]. *Journal of Differential Equations*, 2020, **268**(8): 4491-4524.

[14] WEI J D, ZHOU J B, ZHEN Z L, et al. Super-critical and critical traveling waves in a three-component delayed disease system with mixed diffusion[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, **367**: 112451.

[15] WU J H, ZOU X F. Traveling wave front solutions in reaction-diffusion systems with delay[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2001, **13**: 651-687.

[16] CHEN X F, GUO J S. Uniqueness and existence of traveling waves for discrete quasilinear monostable dynamics[J]. *Mathematische Annalen*, 2003, **326**: 123-146.

[17] FU S C. Traveling waves for a diffusive SIR model with delay[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, **435**(1): 20-37.

[18] WEI J D, ZHEN Z L, ZHOU J B, et al. Traveling waves for a discrete diffusion epidemic model with delay[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2021, **25**(4): 831-866.