http://www.applmathmech.cn

一类随机微分方程的随机源反演方法和性质*

陈　琛，冯晓莉，陈汉章

（西安电子科技大学 数学与统计学院，西安 710126）

摘要： 该文考虑了一类由分式 Brown 运动驱动的随机微分方程的随机源反演方法及其性质,其中分式 Brown 运动对应的 Hurst 参数 $H \in (0,1)$.该问题可由很多随机模型转化而得,是一种比较广泛的随机问题.对于正问题,通过常数变易法得到方程的温和解,根据温和解的统计性质讨论其适定性.对于反问题,根据终止时刻的随机数据的统计量反演随机源项的部分统计量,证明了反演的唯一性,并讨论了当 $a(x)$ 在不同范围时反问题的稳定性情况.

关　键　词： 随机微分方程；　分数阶 Brown 运动；　反源问题；　唯一性；　不适定性
中图分类号： O175.26　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.430170

The Random Source Inverse Method and Properties for a Class of Stochastic Differential Equations

CHEN Chen，　FENG Xiaoli，　CHEN Hanzhang
（*School of Mathematics and Statistics*，*Xidian University*，*Xi' an* 710126，*P.R.China*）

Abstract: The random source inverse method and properties for a class of stochastic differential equations driven by the fractional Brownian motion with Hurst index $H \in (0,1)$. This problem can be obtained from the transform of many stochastic models and is a widely followed problem. For the direct problem, the mild solution to the equation was obtained by means of constant variation, and according to the statistical properties of the mild solution, the well-posedness of the direct problem was discussed. For the inverse problem, some statistics of the random source term were determined from the random data at the final moment, to prove the uniqueness of the inverse problem, and the stability of the inverse problem with $a(x)$ in different ranges was discussed.

Key words: stochastic differential equation; fractional Brownian motion; inverse source problem; uniqueness; ill-posedness

0　引　　言

众所周知,反问题的应用非常广泛,相应的研究成果也越来越多[1-5].然而,绝大多数反问题都是不适定的,尤其是稳定性往往不成立,这也是研究反问题的困难和意义所在.不仅如此,实际应用中会有很多随机因

* **收稿日期：** 2022-05-19；**修订日期：** 2022-06-28
基金项目： 陕西省自然科学基础研究计划项目(2023-JC-YB-054);中央高校基本科研业务费(XJS220702)
作者简介： 陈琛(1998—),男,硕士(E-mail: c.chen@stu.xidian.edu.cn);
冯晓莉(1981—),女,博士(通讯作者. E-mail: xiaolifeng@xidian.edu.cn);
陈汉章(2000—),男(E-mail: hzchen2000@foxmail.com).
引用格式： 陈琛, 冯晓莉, 陈汉章. 一类随机微分方程的随机源反演方法和性质[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(7): 847-856.

素的影响,比如测量数据带有噪声,数学模型的建立含有模型误差等.这些因素对于不适定反问题的研究不容小觑,否则求得的数值结果会出现灾难性的问题.一种自然而又巧妙的处理方法是将这些因素视为随机的,相应的问题就看作随机问题.此外,随机技术的引入可以很好地耦合不同度量尺度之间的干扰[6-9].综上可知,关于随机反问题的研究既非常重要又很有实际意义.

本文关心的是如下一类随机微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}+a(x)u(x,t)=\varphi(x)h(t)+\psi(x)\dot{B}^H(t), & (x,t)\in D\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial D\times[0,T],\\ u(x,0)=0, & x\in\bar{D},\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a(x)$, $h(t)$ 已知,且 $a(x)\neq 0$, $h(t)\geqslant h_0>0$, $D=(0,1)$, $B^H(t)$ 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},\mathbb{P})$ 上的分式 Brown 运动, $H\in(0,1)$ 为 Hurst 参数, $\dot{B}^H(t)$ 为彩噪声.为了简便,后文将 $u(x,t,\omega)$ 简记为 $u(x,t)$.本文主要探讨:

(P1) 正问题　已知 $\varphi(x)$, $\psi(x)$,求温和解 $u(x,t)$;

(P2) 反问题　给定 T 时刻的样本数据 $u(x,T,\omega)$, 反演问题(1)中随机源项的部分统计量 $\varphi(x)$ 和 $\psi^2(x)$.

对于正问题(P1),由于随机源项 $F(x,t):=\varphi(x)h(t)+\psi(x)\dot{B}^H(t)$ 的低正则性[10],该方程不是几乎处处存在的,所以方程的适定性与经典意义下截然不同,相应的解在什么样的空间存在是值得研究的.而关于反问题(P2), $F(x,t)$ 为随机场,如何由 $u(x,t,\omega)$ 的统计量来反演 $F(x,t)$ 的统计量 $\varphi(x)$ 与 $\psi^2(x)$ 是很困难且有意义的,而其不适定性又将使得该反问题的求解难上加难.

由于以上的众多原由,近年来反随机源问题倍受学者们的重视[11-12],关于分式 Brown 运动驱动下的随机微分方程的反源问题,例如,随机的时空分数阶方程[13],随机波动方程[14],一个随机的时间分数阶扩散方程[15],一维随机对流扩散方程[16]等已有一些研究结果.这些工作均先是利用 Laplace 变换或 Fourier 变换或广义 Fourier 级数展开得到相应的温和解,然后再进一步讨论.本文所要讨论的问题(1),是一种更为广泛的随机问题,比如随机热方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\mathcal{L}u(x,t)=\varphi(x)h(t)+\psi(x)\dot{B}^H(t), & (x,t)\in D\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial D\times[0,T],\\ u(x,0)=0, & x\in\bar{D},\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\mathcal{L}$ 为一致椭圆算子.借助于广义 Fourier 级数展开,问题(2)可转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}+\lambda_n u_n(t)=\varphi_n h(t)+\psi_n\dot{B}^H(t), & t\in(0,T),\\ u_n(0)=0,\end{cases}\tag{3}$$

这里 $u_n(t)$, φ_n, ψ_n 分别为 $u(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在椭圆算子 $\mathcal{L}$ 的特征函数所形成的正交系 $\{e_n(x)\}$ 下展开的, λ_n 为相应的特征值.通过比较不难发现问题(3)是问题(1)的一种特殊情况,其中 $a(x)=\lambda_n\geqslant\lambda_1>0$.又如对流方程 $u_t+bu_x=\varphi(x)h(t)+\psi(x)\dot{B}^H(t)$, Airy 方程 $u_t+u_{xxx}=\varphi(x)h(t)+\psi(x)\dot{B}^H(t)$, Beam 方程 $u_t+u_{xxxx}=\varphi(x)h(t)+\psi(x)\dot{B}^H(t)$ 等均可转化为问题(1)去研究.注意问题(1)中的 $a(x)\neq 0$, 但是正负号不定,是一种非常广泛的情形.

1 理论基础

定义 1[15,17]　设 $0<H<1$, 若存在一个连续的 Gauss 过程 $\{B^H(t),t\geqslant 0\}$ 满足如下条件:

$$B^H(0)=0,\ E[B^H(t)B^H(s)]=\frac{1}{2}\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\},$$

则称 $B^H(t)$ 为分式 Brown 运动,其中 H 是 Hurst 参数, $E[\cdot]$ 表示期望.特别地,当 $H=1/2$ 时,即为标准 Brown

运动 $B(t)$.

对于分式 Brown 运动 $B^H(t)$,其中 $H\in(0,1)$,相应的随机积分有如下公式[15]：

1) $E\left[\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}B^H(s)\right]=0,\qquad H\in(0,1)$.

2) 当 $H\in(0,1/2)$ 时,

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}B^H(s)\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}B^H(s)\right]=\\
&\quad\int_0^t\left[K_H(t,s)\psi(s)+\int_s^t(\psi(u)-\psi(s))\frac{\partial K_H(u,s)}{\partial u}\mathrm{d}u\right]\times\\
&\quad\left[K_H(t,s)\phi(s)+\int_s^t(\phi(u)-\phi(s))\frac{\partial K_H(u,s)}{\partial u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&K_H(t,s)=C_H\left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2}(t-s)^{H-1/2}-\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{1/2-H}\int_s^t u^{H-3/2}(u-s)^{H-1/2}\mathrm{d}u\right],\\
&\frac{\partial K_H(u,s)}{\partial u}=C_H\left(\frac{u}{s}\right)^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2},\ C_H=\left(\frac{2H}{(1-2H)\beta(1-2H,H+1/2)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

3) 当 $H=1/2$ 时,

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}B^H(s)\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}B^H(s)\right]=\\
&\quad E\left[\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}W(s)\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}W(s)\right]=\int_0^t\psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{5}
$$

4) 当 $H\in(1/2,1)$ 时,

$$
E\left[\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}B^H(s)\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}B^H(s)\right]=\alpha_H\int_0^t\int_0^t\psi(r)\phi(u)\,|r-u|^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}r,\tag{6}
$$

其中　$\alpha_H=H(2H-1)$.

2　正问题

不难得到问题(1)的温和解如下.

定义 2　一个随机过程 $u\in L^2(D)$ 称为问题(1)的温和解,如果

$$
u(x,t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}\varphi(x)h(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}\psi(x)h(\tau)\mathrm{d}B^H(\tau)\tag{7}
$$

几乎处处成立.

下面进一步说明在一定条件下,温和解 $u(x,t)$ 是适定的.为了推导的方便,先给出如下引理.

引理 1[15]　当 $H\in(0,1/2)$ 时,对 $\forall t>\tau$ 有

$$
\int_\tau^t u^{H-3/2}(u-\tau)^{H-1/2}\mathrm{d}u\lesssim\tau^{2H-1}-t^{2H-1}.
$$

由式(7)知,

$$
\begin{aligned}
&E\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(D)}=\\
&\quad E\left[\int_0^1\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}\varphi(x)h(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}\psi(x)h(\tau)\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2\mathrm{d}x\right]\leqslant\\
&\quad 2\int_0^1\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^2\varphi^2(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1E\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2\psi^2(x)\mathrm{d}x=\\
&\quad 2I_1(t)+2I_2(t).
\end{aligned}\tag{8}
$$

由 $h(t)\geqslant h_0>0$ 及积分中值定理可知,存在某个 $\xi\in(0,t)$,有

$$
I_1(t)=\int_0^1\varphi^2(x)h^2(\xi)\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-a(x)(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x,
$$

其中

$$0 < \int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)} d\tau \leqslant \begin{cases} t, & a(x) \geqslant 0, \\ e^{-a(x)T} t, & a(x) < 0. \end{cases}$$

若令 $M(x) := \max\{1, e^{-a(x)T}\}$, 则

$$I_1(t) \leqslant \|\varphi\|_{L^2(D)}^2 \|h\|_{L^\infty(0,T)}^2 \|M\|_{L^\infty(D)}^2 t^2.$$

关于 $I_2(t)$, 有

$$I_2(t) = \int_0^1 \psi^2(x) \cdot E\left(\int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)} dB^H(\tau)\right)^2 dx.$$

情形 1 当 $H \in (0,1/2)$ 时, 由式(4)可知

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)} dB^H(\tau)\right)^2 \lesssim & \int_0^t \left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{H-1/2} (t-\tau)^{H-1/2} e^{-a(x)(t-\tau)}\right]^2 d\tau + \\ & \int_0^t \tau^{1-2H} \left[\left(\int_\tau^t u^{H-3/2} (u-\tau)^{H-1/2} du\right) e^{-a(x)(t-\tau)}\right]^2 d\tau + \\ & \int_0^t \left[\int_\tau^t \left(e^{-a(x)(t-u)} - e^{-a(x)(t-\tau)}\right) \frac{\partial K_H(u,\tau)}{\partial u} du\right]^2 d\tau = \\ & J_1(t) + J_2(t) + J_3(t), \end{aligned} \tag{9}$$

这里“$a \lesssim b$”表示 $a \leqslant Cb$, 其中 C 为某个正常数. 显然有

$$J_1(t) \leqslant \int_0^t (t-\tau)^{2H-1} d\tau \cdot M^2(x) \lesssim t^{2H} M^2(x), \tag{10}$$

$$J_2(t) \leqslant \int_0^t \tau^{1-2H} \left(\int_\tau^t u^{H-3/2} (u-\tau)^{H-1/2} du\right)^2 d\tau \cdot M^2(x). \tag{11}$$

由引理 1 可知

$$J_2(t) \lesssim \int_0^t \tau^{1-2H} (t^{4H-2} + \tau^{4H-2}) d\tau \cdot M^2(x) \lesssim t^{2H} M^2(x).$$

关于 $J_3(t)$, 由于

1) 当 $|a(x)| \leqslant 1$ 时,

$$|e^{-a(x)(t-u)} - e^{-a(x)(t-\tau)}| \leqslant |a(x)| M(x) |u-\tau| \leqslant M(x) |u-\tau|;$$

2) 当 $|a(x)| > 1$ 时,

$$|e^{-a(x)(t-u)} - e^{-a(x)(t-\tau)}| = \left|\int_{t-\tau}^{t-u} \frac{e^{-a(x)s}}{-a(x)} ds\right| \leqslant \frac{1}{|a(x)|} M(x) |u-\tau| \leqslant M(x) |u-\tau|.$$

根据 $\partial K_H(u,\tau)/\partial u$ 的表达式, 易得

$$\begin{aligned} J_3(t) \lesssim & M^2(x) \int_0^t \left(\int_\tau^t u^{H-1/2} \left(\frac{u}{\tau} - 1\right)^{H-1/2} du\right)^2 d\tau \leqslant \\ & M^2(x) \int_0^t \tau^{2H-1} \left(\int_\tau^t \left(\frac{u}{\tau} - 1\right)^{H-1/2} du\right)^2 d\tau \lesssim M^2(x) t^{2H}. \end{aligned} \tag{12}$$

将式(10)—(12)代入式(9), 可得

$$E\left(\int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)} dB^H(\tau)\right)^2 \lesssim M^2(x) t^{2H}.$$

此时有

$$I_2(t) \lesssim \|M\|_{L^\infty(D)}^2 \|\psi\|_{L^2(D)}^2 t^{2H}.$$

情形 2 当 $H = 1/2$ 时, 由式(5)可知

$$E\left(\int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)} dB^H(\tau)\right)^2 = \int_0^t e^{-2a(x)(t-\tau)} d\tau \lesssim M^2(x) t.$$

所以

$$I_2(t) \lesssim \|M\|_{L^\infty(D)}^2 \|\psi\|_{L^2(D)}^2 t.$$

情形 3 当 $H \in (1/2,1)$ 时, 由式(6)可知

$$E\left(\int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 = \alpha_H\int_0^t\int_0^t e^{-a(x)(t-\tau)}e^{-a(x)(t-u)}\,|\tau-u|^{2H-2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u \lesssim$$

$$M^2(x)\int_0^t\int_0^t|\tau-u|^{2H-2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u = 2M^2(x)\int_0^t\int_u^t(\tau-u)^{2H-2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u \lesssim M^2(x)t^{2H}. \tag{13}$$

因此

$$I_2(t) \lesssim \|M\|^2_{L^\infty(D)}\|\psi\|^2_{L^2(D)}t^{2H}.$$

综上可知如下定理成立.

定理 1　如果函数 $f(x), g(x) \in L^2(D)$, 则有估计式

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(D)} \lesssim \|h\|_{L^\infty(0,T)}\|M\|_{L^\infty(D)}\|\varphi\|_{L^2(D)} + \|M\|_{L^\infty(D)}\|\psi\|_{L^2(D)}.$$

注 1　由定理 1 可知:1) 若 $a(x)$ 有界,则 $\|M\|_{L^\infty(D)}$ 也有界;2) 若 $a(x)\ge 0$,则 $\|M\|_{L^\infty(D)}$ 亦有界;3) 若 $a(x)\to -\infty$,则 $\|M\|_{L^\infty(D)}$ 无界.因此第 1)、2) 两种情况下问题(1)的解是稳定的,但第 3)种情况下问题(1)的解不稳定.

3　反问题

本节我们考虑通过 $u(x,T,\omega)$ 的统计量来反演问题(1)随机源项中的统计量 $\varphi(x)$ 和 $\psi^2(x)$.若 $h(t)\equiv 1$ 时,$\varphi(x)$ 和 $\psi^2(x)$ 就是随机源项的期望和方差.由式(7)可知

$$E[u(x,T)] = \varphi(x)\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

$$\mathrm{var}[u(x,T)] = \psi^2(x)E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2, \tag{15}$$

其中 $\mathrm{var}(\cdot)$ 表示方差.

进一步可得

$$\varphi(x) = \frac{E[u(x,T)]}{\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau},\ \psi^2(x) = \frac{\mathrm{var}[u(x,T)]}{E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2}. \tag{16}$$

下面分析由式(14)和(15)来反演 $\varphi(x)$ 与 $\psi^2(x)$ 的唯一性与稳定性如何.

3.1　唯一性

从式(16)可知,要反演 $\varphi(x)$ 和 $\psi^2(x)$, 则式(16)中两式分母都不能为 0,同时注意到 $E[u(x,T)]$, $\mathrm{var}[u(x,T)]$, $\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau$, $E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2$ 的值都是唯一的. 因此, 如果能证得 $\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau > 0$ 和 $E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 > 0$, 那么由式(16)可以唯一地确定 $\varphi(x)$ 和 $\psi^2(x)$.

由 $h(\tau)\ge h_0 > 0$ 易知,对于固定的 x, 总有

$$\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau \ge \int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot h_0 > 0,$$

所以 $\varphi(x) = \dfrac{E[u(x,T)]}{\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau}$ 存在且唯一.

下面针对不同的 H,讨论 $E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2$ 的情况.

情形 1　当 $H\in(0,1/2)$ 时,

$$E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 =$$

$$\int_0^T\left[K_H(T,\tau)e^{-a(x)(T-\tau)} + \int_\tau^T\left(e^{-a(x)(T-u)} - e^{-a(x)(T-\tau)}\right)\frac{\partial K_H(u,\tau)}{\partial u}\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}\tau.$$

对于固定的 x,当 $a(x)\ge 0$ 时,$e^{-a(x)(T-s)}$ 关于 s 是递增的,所以

$$e^{-a(x)(T-u)} - e^{-a(x)(T-\tau)} \ge 0.$$

又由 $K_H(u,\tau)$ 的表达式可知 $K_H(T,\tau)$ 与 $\partial K_H(u,\tau)/\partial u$ 均大于 0 且连续,所以一定存在一个 $c_1(x) > 0$, 有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant c_1(x) > 0.$$

当 $a(x) < 0$ 时,$\mathrm{e}^{-a(x)(T-s)}$ 关于 s 是递减的,所以$(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)\mathrm{e}^{-a(x)(T-s)} < 0$, 此时

$$K_H(T,\tau)\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)} + \int_\tau^T(\mathrm{e}^{-a(x)(T-u)} - \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)})\frac{\partial K_H(u,\tau)}{\partial u}\mathrm{d}u =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{K_H(T,\tau)\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)} + \int_{\tau+\varepsilon}^T(\mathrm{e}^{-a(x)(T-u)} - \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)})\frac{\partial K_H(u,\tau)}{\partial u}\mathrm{d}u\right\}.$$

根据分部积分,可知

$$K_H(T,\tau)\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)} + \int_{\tau+\varepsilon}^T(\mathrm{e}^{-a(x)(T-u)} - \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)})\frac{\partial K_H(u,\tau)}{\partial u}\mathrm{d}u =$$

$$[\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)} - \mathrm{e}^{-a(x)(T-(\tau+\varepsilon))}]K_H(\tau+\varepsilon,\tau) + K_H(u,T) - \int_{\tau+\varepsilon}^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{e}^{-a(x)(T-u)}K_H(u,\tau)\mathrm{d}u.$$

由 $\mathrm{e}^{-a(x)(T-s)}$ 关于 s 是递减的,且 $K_H(u,\tau) > 0$, 可知

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant \int_0^T K_H^2(u,\tau)\mathrm{d}\tau = c_1 > 0. \tag{17}$$

情形 2 当 $H = 1/2$ 时,由 Itô 等距公式(5)可知:当 $a(x) \geqslant 0$ 时,有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant \mathrm{e}^{-2a(x)T}T = c_2(x) > 0.$$

当 $a(x) < 0$ 时,有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant T > 0. \tag{18}$$

情形 3 当 $H \in (1/2,1)$ 时,有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 = \alpha_H\int_0^T\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{e}^{-a(x)(T-u)}|\tau-u|^{2H-2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u.$$

当 $a(x) \geqslant 0$ 时,有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant \alpha_H\mathrm{e}^{-2a(x)T}\int_0^T\int_0^T|\tau-u|^{2H-2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u.$$

注意到式(13),有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant \alpha_H\frac{T^{2H}}{H(2H-1)}\mathrm{e}^{-2a(x)T} = c_3(x) > 0.$$

当 $a(x) \leqslant 0$, 类似地有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \geqslant \alpha_H\frac{T^{2H}}{H(2H-1)} > 0. \tag{19}$$

综上分析可知,如下定理成立.

定理 2 若 $\varphi(x),\psi(x) \in L^2(D)$ 且 $\|\psi\|_{L^2(D)} \neq 0, h(x) \geqslant h_0 > 0, h(x) \in L^\infty(0,T)$,则源项中 $\varphi(x)$ 与 $\psi^2(x)$ 能由 $u(x,T,\omega)$ 的期望和方差唯一确定.

3.2 稳定性分析

反源问题在医学、地质勘探等方面都有非常广泛的应用,然而反源问题往往是不稳定的.本小节将分析反演 $\varphi(x)$ 与 $\psi^2(x)$ 时的稳定性.先分析 $a(x) > 0$ 时的稳定性.

一方面,我们有

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau = h(\xi)\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau = h(\xi)\frac{1-\mathrm{e}^{-a(x)T}}{a(x)} \lesssim \frac{1}{a(x)}.$$

另一方面,关于 $E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2$, 我们分两种情形来讨论.

情形 1 若 $a(x) > 1/T^2$, 由式(9)可知

$$E\left(\int_0^T e^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \lesssim J_1(T)+J_2(T)+J_3(T).$$

对于 $H\in(0,1/2)$，借助于不等式

$$e^{-a(x)(T-\tau)} \leqslant \begin{cases} 1, & 0<T-\tau<\dfrac{1}{\sqrt{a(x)}}, \\ \dfrac{1}{a(x)(T-\tau)}, & T-\tau>\dfrac{1}{\sqrt{a(x)}} \end{cases} \tag{20}$$

有

$$J_1(T)=\left(\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}+\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T\right)\left(\frac{T}{\tau}\right)^{2H-1}(T-\tau)^{2H-1}e^{-2a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau=J_{11}(T)+J_{12}(T).$$

根据式(20)易得

$$J_{11}(T)\leqslant\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}T^{2H-1}\tau^{1-2H}(T-\tau)^{2H-1}\frac{1}{2a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$T^{2H-1}\left(T-\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\right)^{1-2H}\frac{1}{2a(x)}\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}(T-\tau)^{2H-2}\mathrm{d}\tau\lesssim\frac{1}{a^{H+1/2}(x)}.$$

并且

$$J_{12}(T)\leqslant T^{2H-1}T^{1-2H}\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T(T-\tau)^{2H-1}\mathrm{d}\tau\lesssim\frac{1}{a^H(x)}.$$

因此

$$J_1(T)\lesssim\frac{1}{a^{H+1/2}(x)}+\frac{1}{a^H(x)}\lesssim\frac{1}{a^H(x)}.$$

此外，

$$J_2(T)\leqslant\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\tau^{1-2H}\left(\int_\tau^{T-1/\sqrt{a(x)}}u^{H-3/2}(u-\tau)^{H-1/2}\mathrm{d}u\right)^2e^{-2a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau+$$
$$\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\tau^{1-2H}\left(\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T u^{H-3/2}(u-\tau)^{H-1/2}\mathrm{d}u\right)^2e^{-2a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau+$$
$$\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T\tau^{1-2H}\left(\int_\tau^T u^{H-3/2}(u-\tau)^{H-1/2}\mathrm{d}u\right)^2\mathrm{d}\tau=$$
$$J_{21}(T)+J_{22}(T)+J_{23}(T).$$

根据引理 1，有

$$J_{21}(T)\lesssim\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\tau^{1-2H}\frac{1}{a(x)(T-\tau)}\left[\tau^{2H-1}-\left(T-\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\right)^{2H-1}\right]^2\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\tau^{1-2H}\tau^{4H-2}\frac{1}{a(x)(1/\sqrt{a(x)})}\mathrm{d}\tau\lesssim\frac{T^{2H}}{a^{1/2}(x)}.$$

利用证明引理 1 相同的方法，我们得到

$$J_{22}(T)\lesssim\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\frac{1}{a(x)(T-\tau)}\tau^{1-2H}\left(\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T u^{2H-2}\left[\sum_{n=0}^\infty\binom{H-1/2}{n}\left(-\frac{\tau}{u}\right)^n\right]\mathrm{d}u\right)^2\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{1}{a(x)(1/\sqrt{a(x)})}\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\tau^{1-2H}\left(\sum_{n=0}^\infty\binom{H-1/2}{n}(-1)^n\times\right.$$
$$\left.\frac{(T-1/\sqrt{a(x)})^{2H-1-n}-T^{2H-1-n}}{n+1-2H}\tau^n\right)^2\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{1}{a^{1/2}(x)}\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\tau^{1-2H}\left(\sum_{n=0}^\infty\binom{H-1/2}{n}(-1)^n\frac{(T-1/\sqrt{a(x)})^{2H-1}}{n+1-2H}\right)^2\mathrm{d}\tau\lesssim\frac{T^{2H}}{a^{1/2}(x)}.$$

同样地，利用引理 1，有

$$J_{23} \lesssim \int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^{T} \tau^{1-2H}(\tau^{4H-2} + T^{4H-2})\mathrm{d}\tau \lesssim \int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^{T} \tau^{2H-1}\mathrm{d}\tau \lesssim \frac{T^{2H}}{a^{1/2}(x)}.$$

所以,对于 $J_2(T)$, 我们有

$$J_2(T) \lesssim \frac{T^{2H}}{a^{1/2}(x)}.$$

此外,

$$J_3(T) = \int_0^T \left[\int_\tau^T \int_{T-\tau}^{T-u} \frac{\mathrm{e}^{-a(x)s}}{-a(x)}\mathrm{d}s\left(\frac{u}{\tau}\right)^{H-1/2}(u-\tau)^{H-3/2}\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\int_0^T \left[\int_\tau^T \frac{1}{a(x)}\left(\frac{u}{\tau}\right)^{H-1/2}(u-\tau)^{H-1/2}\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}\tau \lesssim \frac{T^{2H+2}}{a^2(x)}.$$

因此

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \lesssim \frac{1}{a^H(x)} + \frac{1}{a^{1/2}(x)} + \frac{1}{a^2(x)} \lesssim \frac{1}{a^H(x)}.$$

对于 $H = 1/2$, 利用 Itô 等距公式(5)并注意到 $a(x) > 1/T^2$ 可得

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 = \int_0^T \mathrm{e}^{-2a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau \lesssim \frac{1}{a(x)} \lesssim \frac{T}{a^{1/2}(x)}.$$

对于 $H \in (1/2,1)$, 利用式(6)并注意到估计式(20),将其化为 4 个部分,每个部分分别借用估计式(20)进行计算,所以有

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \lesssim$$

$$\left(\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}} + \int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T + \int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}} +\right.$$

$$\left.\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T\right)\mathrm{e}^{-a(x)(T-u)}\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}|u-\tau|^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

其中

$$N_1 \leqslant \int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}} \frac{1}{a(x)(T-u)}\frac{1}{a(x)(T-\tau)}|u-\tau|^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\frac{2}{a(x)}\int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\int_\tau^{T-1/\sqrt{a(x)}}(u-\tau)^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \lesssim \frac{T^{2H}}{a(x)}.$$

由于对称性

$$N_2 = N_3 \leqslant \int_0^{T-1/\sqrt{a(x)}}\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T \frac{1}{a(x)(T-\tau)}(u-\tau)^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \lesssim \frac{T^{2H-1}}{a(x)}.$$

根据估计式(20)和积分中值定理可知, 存在 $\tilde{u} \in (T - 1/\sqrt{a(x)},T)$, 有

$$N_4 \leqslant \int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T |u-\tau|^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\int_{T-1/\sqrt{a(x)}}^T |\tilde{u}-\tau|^{2H-2}\mathrm{d}\tau \lesssim \frac{1}{a^H(x)}.$$

因此

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 \lesssim \frac{1}{a(x)} + \frac{1}{a^H(x)} \lesssim \frac{1}{a^H(x)}.$$

情形 2 若 $0 < a(x) \leqslant 1/T^2$, 当 $H \in (0,1/2)$ 时,根据式(4)及 $K_H(T,\tau)$ 大于 0,并注意到积分 $\int_\tau^T (u-\tau)^{H-3/2}\mathrm{d}u$ 的奇异性,计算可得

$$E\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2 =$$

$$\int_0^T\left[K_H(T,\tau)\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}+\int_\tau^T\left(\int_{T-\tau}^{T-u}\frac{\mathrm{e}^{-a(x)s}}{-a(x)}\mathrm{d}s\right)C_H\left(\frac{u}{\tau}\right)^{H-1/2}(u-\tau)^{H-3/2}\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}\tau\geqslant$$

$$\int_0^T\left[K_H(T,\tau)\mathrm{e}^{-1/T}+\int_\tau^T T^2\mathrm{e}^{-1/T}C_H\left(\frac{u}{\tau}\right)^{H-1/2}(u-\tau)^{H-1/2}\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}\tau=c_4>0.$$

对于 $H=1/2$, 利用 Itô 等距公式(5)易得

$$E\left(\int_0^T\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2=\int_0^T\mathrm{e}^{-2a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}\tau\geqslant T\mathrm{e}^{-2/T}=c_5>0.$$

对于 $H\in(1/2,1)$, 利用公式(6)并进行简单的计算可得

$$E\left(\int_0^T\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2\geqslant\alpha_H\mathrm{e}^{-2/T}\int_0^T\int_0^T|u-\tau|^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau=$$

$$2\alpha_H\mathrm{e}^{-2/T}\int_0^T\int_u^T(\tau-u)^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau=\frac{\alpha_H}{H(2H-1)}\mathrm{e}^{-2/T}T^{2H}=c_6>0.$$

综合本小节的推导以及 3.1 小节中的式(17)—(19),我们得到以下定理.

定理 3　对于任意的 $a(x)$, 有估计式

$$\int_0^T\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{1}{a(x)}.$$

对于 $a(x)\geqslant 1/T^2$, 有

$$E\left(\int_0^T\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2\leqslant\frac{1}{a^H(x)};$$

对于 $a(x)<0$ 或 $0<a(x)\leqslant 1/T^2$,存在一个与 x 无关的正常数 C, 使得

$$E\left(\int_0^T\mathrm{e}^{-a(x)(T-\tau)}\mathrm{d}B^H(\tau)\right)^2\geqslant C.$$

注 2　由定理 3 可知,当 $a(x)<0$ 或 $0<a(x)\leqslant 1/T^2$ 时,由式(15)反演 $\psi^2(x)$ 是稳定的;当 $a(x)$ 趋于 ∞ 时,由式(14)反演 $\varphi(x)$ 和由式(15)反演 $\psi^2(x)$ 都是不稳定的.

4　结　　论

本文讨论了一类随机微分方程的反源问题,根据方程的温和解,讨论了正问题的适定性.利用温和解的统计性质,根据 T 时刻的数据反演方程的源项,证明了源项反演的唯一性,并分析了关于源项 $\varphi(x)$ 和 $\psi^2(x)$ 反演的稳定性情况.后面我们将进一步考虑相应的数值结果.

参考文献(References)：

[1] GROETSH C W. 反问题：大学生的科技活动[M]. 程晋, 谭永基, 刘继军, 译. 北京：清华大学出版社, 2006.(GROETSH C W. *Inverse Problem：Activities for Undergraduates*[M]. CHENG Jin, TAN Yongji, LIU Jijun, transl. Beijing：Tsinghua University Press, 2006.(in Chinese))

[2] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京：科学出版社, 2005.(LIU Jijun. *Regularization Methods and Applications for Ill-Posed Problems*[M]. Beijing：Science Press, 2005.(in Chinese))

[3] 王彦飞. 反演问题的计算方法及其应用[M]. 北京：高等教育出版社, 2007.(WANG Yanfei. *Computational Methods for Inversion Problems and Their Applications*[M]. Beijing：Higher Education Press, 2007.(in Chinese))

[4] 耿肖肖, 程浩. 一类球型区域上变系数反向热传导问题[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(7)：723-734.(GENG Xiaoxiao, CHENG Hao. The backward heat conduction problem with variable coefficients in a spherical domain[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(7)：723-734.(in Chinese))

[5] 柳冕, 程浩, 石成鑫. 一类非线性时间分数阶扩散方程反问题的变分型正则化[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(3)：341-352.(LIU Mian, CHENG Hao, SHI Chengxin. Variational regularization of the inverse problem of a class of nonlinear time-fractional diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(3)：341-352. (in Chinese))

[6] RASCANU A, NUALART D. Differential equations driven by fractional Brownian motion[J]. *Collectanea Mathematica*, 2002, **53**(1):55-81.

[7] BAI L H, MA J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and Poisson point process[J]. *Bernoulli*, 2015, **21**(1): 303-334.

[8] MIJENA J B, NANE E. Space-time fractional stochastic partial differential equations[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2015, **125**(9): 3301-3326.

[9] TINDEL S, TUDOR C A, VIENS F. Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion[J]. *Probability Theory and Related Fields*, 2003, **127**(2): 186-204.

[10] LI P J, WANG X. Inverse random source scattering for the Helmholtz equation with attenuation[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2021, **81**: 485-506.

[11] LI P J, WANG X. An inverse random source problem for Maxwell's equations[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2021, **19**(1): 25-45.

[12] LI P J, WANG X. An inverse random source problem for the one-dimensional Helmholtz equation with attenuation[J]. *Inverse Problems*, 2021, **37**: 015009.

[13] NIE Daxin, DENG Weihua. An inverse random source problem for the time-space fractional diffusion equation driven by fractional Brownian motion[J/OL]. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2023(2023-02-28)[2023-06-28]. https://doi.org/10.1515/jiip-2021-0061.

[14] FENG X L, ZHAO M X, LI P J, et al. An inverse source problem for the stochastic wave equation[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2022, **16**: 397-415.

[15] FENG X L, LI P J, WANG X. An inverse random source problem for the time fractional diffusion equation driven by a fractional Brownian motion[J]. *Inverse Problems*, 2020, **36**(4): 045008.

[16] 赵丽志, 冯晓莉. 一类随机对流扩散方程的反源问题[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(12): 1392-1401.(ZHAO Lizhi, FENG Xiaoli. An inverse source problem for the stochastic convection-diffusion equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(12): 1392-1401. (in Chinese))

[17] NUALART D. *The Malliavin Calculus and Related Topics*[M]//*Probability and Its Applications*. Springer, 1996.