http://www.applmathmech.cn

具有时滞的离散 Lotka-Volterra 合作系统波前解的非线性稳定性*

闫　瑞[1]，　刘桂荣[2]，　李晓翠[3]

（1. 山西财经大学 应用数学学院，太原 030006；
2. 山西大学 数学科学学院，太原 030006；
3. 北京化工大学 数理学院，北京 100029）

摘要： 反应扩散模型的行波解的稳定性是一个很重要的研究课题.该文主要研究了一类具有时滞的离散 Lotka-Volterra 合作系统波前解的全局非线性稳定性.具体来讲,当初值在无穷远处指数衰减到有较大波速的波前解而在其他位置可以任意大时,运用 L^2- 加权能量方法、比较原理和挤压技术可以得到该系统的此类波前解是指数渐近稳定的,并解决了离散扩散算子及时滞共同作用下建立能量估计的问题.总之,将加权能量方法推广到带有时滞的离散系统中,丰富了相关的研究内容.

关　键　词： 反应扩散系统；　时滞；　波前解；　稳定性
中图分类号： O175.7　　　**文献标志码：** A　　　DOI：10.21656/1000-0887.430172

Nonlinear Stability of Traveling Wavefronts for a Discrete Cooperative Lotka-Volterra System With Delays

YAN Rui[1]，　LIU Guirong[2]，　LI Xiaocui[3]

（1. *School of Applied Mathematics*, *Shanxi University of Finance and Economics*, *Taiyuan* 030006, *P.R.China*;
2. *School of Mathematical Sciences*, *Shanxi University*, *Taiyuan* 030006, *P.R.China*;
3. *College of Mathematics and Physics*, *Beijing University of Chemical Technology*, *Beijing* 100029, *P.R.China*）

Abstract: The stability of traveling wave solutions of the reaction diffusion model is a very important research topic. The globally nonlinear stability of traveling wavefronts for a discrete cooperative Lotka-Volterra system with delays was studied. More precisely, for the initial perturbation decaying exponentially to the traveling wavefronts with a relatively large speed at infinity, but arbitrarily large speeds in other positions, by means of the L^2- weighted energy method, the comparison principle and the squeezing technique, such traveling wavefronts were obtained and proved to be of exponentially asymptotic stability. Moreover, the problem of establishing

* **收稿日期：** 2022-05-23；**修订日期：** 2022-06-28
基金项目： 国家自然科学基金项目(11971279;12101034)
作者简介： 闫瑞(1981—),女,副教授,硕士(E-mail: yanrui@sxufe.edu.cn)；
李晓翠(1982—),女,博士(通讯作者. E-mail: xiaocuili@mail.buct.edu.cn).
引用格式： 闫瑞, 刘桂荣, 李晓翠. 具有时滞的离散 Lotka-Volterra 合作系统波前解的非线性稳定性[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(4): 461-470.

the energy estimates was solved under the actions of the discrete dispersal operator and the time delays. In short, the extension of the weighted energy method to discrete systems with delays, enriches the relative research.

Key words: reaction-diffusion system; delay; traveling wavefront; stability

0 引 言

由专著[1]可知在实际应用中,许多物理学、化学、生物学、传染病学等问题都可以归结为反应扩散方程.所以,研究反应扩散方程的相关内容对生产实践和科学理论具有重要的意义.近年来,关于具有时滞的反应扩散系统的研究是一个重要的课题.因此,本文主要研究如下具有时滞的离散 Lotka-Volterra 合作系统:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = d_1\mathcal{D}[u(x,t)] + r_1u(x,t)[1 - a_1u(x,t) + b_1v(x,t-\tau)], \\ v_t(x,t) = d_2\mathcal{D}[v(x,t)] + r_2v(x,t)[1 + b_2u(x,t-\tau) - a_2v(x,t)], \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{D}[w(x,t)] = w(x+1,t) + w(x-1,t) - 2w(x,t)$, $w = u,v$,所有系数都是正的且时滞 $\tau > 0$.这里 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别代表 x 位置和 t 时刻的人口密度.其初值条件为

$$\begin{cases} u(x,s) = u_0(x,s), & (x,s) \in \mathbb{R} \times [-\tau,0], \\ v(x,s) = v_0(x,s), & (x,s) \in \mathbb{R} \times [-\tau,0]. \end{cases} \tag{2}$$

事实上,系统(1)可以认为是如下系统的空间离散化形式:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = d_1u_{xx}(x,t) + r_1u(x,t)[1 - a_1u(x,t) + b_1v(x,t-\tau)], \\ v_t(x,t) = d_2v_{xx}(x,t) + r_2v(x,t)[1 + b_2u(x,t-\tau) - a_2v(x,t)]. \end{cases} \tag{3}$$

显然,系统(1)有 4 个可能的平衡点

$$(0,0),\ \left(0,\frac{1}{a_2}\right),\ \left(\frac{1}{a_1},0\right),\ \left(\frac{b_1+a_2}{a_1a_2-b_1b_2},\frac{a_1+b_2}{a_1a_2-b_1b_2}\right) := (k_1,k_2).$$

易知,当 $a_1a_2 - b_1b_2 > 0$ 时, $k_i > 0\ (i=1,2)$,在系统(3)对应的无扩散系统中,平衡点(0,0)是不稳定的,而平衡点 (k_1,k_2) 是稳定的.

在离散方程和系统的研究中,行波解的相关研究也是热点问题之一.对于系统(1)的连接(0,0)与 (k_1,k_2) 的行波解指的是具有如下形式:

$$(u(x,t),v(x,t)) = (\phi(\xi),\psi(\xi)),\ \xi := x + ct,$$

且满足

$$\begin{cases} c\phi'(\xi) = d_1\mathcal{D}[\phi(\xi)] + r_1\phi(\xi)[1 - a_1\phi(\xi) + b_1\psi(\xi - c\tau)], \\ c\psi'(\xi) = d_2\mathcal{D}[\psi(\xi)] + r_2\psi(\xi)[1 + b_2\phi(\xi - c\tau) - a_2\psi(\xi)], \\ (\phi,\psi)(-\infty) = (0,0),\ (\phi,\psi)(+\infty) = (k_1,k_2) \end{cases}$$

的解,其中 $D[\varphi(\xi)] := \varphi(\xi+1) + \varphi(\xi-1) - 2\varphi(\xi)$, $\varphi = \phi,\psi$.另外,如果 ϕ 和 ψ 是单调的,称 $(\phi(\xi),\psi(\xi))$ 为一个波前解.

关于不同类型的扩散系统的行波解存在性研究已有了大量的结论,可参考文献[2-8].在关于行波解的研究中,除存在性外,行波解稳定性也是一个比较有趣和困难的问题.关于这方面的研究可参考文献[9-15].对于带有时滞的反应扩散方程,Schaaf 首先通过谱分析方法研究了该类方程的行波解的线性稳定性[16].Mei 等[17]则利用加权 L^2 能量估计的方法证明了具有时滞的 Nicholson 方程波前解的非线性稳定性.接着,Mei 等在文献[18-20]中应用加权能量法和比较原理,研究了一般的带有时滞的单稳反应扩散方程行波解的全局稳定性.之后,Yu 等[21]和 Zhang 等[22]将加权能量法证明波前解稳定性的方法推广到不同的非局部扩散系统.此外,对于离散扩散方程的行波解的稳定性的研究可以参考文献[23-26].对于离散扩散系统,最近,Chen 等[27]及 Su 等[28]分别运用加权能量结合比较原则证明了一个三种群离散扩散竞争系统的单稳波前解的非线性稳定性.而在文献[29]中,Hsu 等运用不同的比较定理,研究了一些离散反应扩散系统行波解的稳定性,这些结论可以广泛应用到诸如多种群 Lotka-Volterra 合作模型、流行病模型、三种群 Lotka-Volterra 竞争模型

等.但是,目前关于系统(1)的波前解稳定性并没有任何的结论,因此,受文献[17-20]的启发,本文将通过加权能量的方法研究该系统波前解的全局稳定性.

本文的主要内容安排如下：第 1 节给出了一些预备知识和符号,并给出了波前解稳定性的主要结果;第 2 节给出了稳定性的证明;最后给出了本文的结论.

1　预备知识和主要结果

在本节中,我们将引入一些记号以方便叙述并给出主要结论.首先,在本文中, $C > 0$ 代表一个一般的常数, $C_i > 0$ 代表具体的常数, I 是一个区间,通常 $I = \mathbb{R}$.其次, $L^2(I)$ 表示 I 上的平方可积函数构成的空间,若函数 $f(x)$ 且其导数 $\mathrm{d}^i f/\mathrm{d}x^i\ (i = 1,2,\cdots,k)$ 都属于 $L^2(I)$, 则这些函数构成 Sobolev 空间 $H^k(I)\ (k \geqslant 0)$.进一步, $L^2_\omega(I)$ 表示加权的 L^2 空间 $(\omega(x) > 0)$, 其范数为

$$\| f \|_{L^2_\omega} = \left(\int_I \omega(x) \mid f(x) \mid^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

而 $H^k_\omega(I)$ 为加权 Sobolev 空间,其范数为

$$\| f \|_{H^k_\omega(I)} = \left(\sum_{i=0}^{k} \int_I \omega(x) \left| \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} f(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

令 T 为一个正常数, $\mathcal{B}$ 是一个 Banach 空间. $C([0,T];\mathcal{B})$ 表示由 $[0,T]$ 上的 $\mathcal{B}$- 值连续函数构成的空间. $L^2([0,T];\mathcal{B})$ 表示由 $[0,T]$ 上的 $\mathcal{B}$- 值 L^2- 函数构成的空间. $[0,\infty)$ 上的空间可以类似地给出.

接下来,对于 $\lambda > 0, c > 0$, 定义

$$\Delta_i(c,\lambda) = d_i(\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} - 2) - c\lambda + r_i, \qquad i = 1,2.$$

引理 1[30]　存在唯一常数 $c^* > 0$ 使得

1) 对于任意 $c > c^*$, $\Delta_1(c,\lambda) = 0$ 有两个实根 $0 < \lambda_1(c) < \lambda_2(c)$,且当 $\lambda \in (\lambda_1(c), \lambda_2(c))$ 时, $\Delta_1(c,\lambda) < 0$,当 $\lambda \in \mathbb{R}_+ \backslash [\lambda_1(c), \lambda_2(c)]$ 时, $\Delta_1(c,\lambda) > 0$;

2) 对于任意 $c > c^*$, $\Delta_2(c,\lambda) = 0$ 有两个实根 $0 < \lambda_3(c) < \lambda_4(c)$,且当 $\lambda \in (\lambda_3(c), \lambda_4(c))$ 时, $\Delta_2(c,\lambda) < 0$,当 $\lambda \in \mathbb{R}_+ \backslash [\lambda_3(c), \lambda_4(c)]$ 时, $\Delta_2(c,\lambda) > 0$;

3) 对于任意 $0 \leqslant c < c^*$ 及所有 $\lambda > 0$, $\Delta_i(c,\lambda) > 0, i = 1,2$.

另外,当 $a_1a_2 - b_1b_2 > 0$, $d_1 \leqslant d_2$, $r_1 \leqslant r_2$ 时, 对于 $c > c^*$, 系统(1) 存在连接 $(0,0)$ 和 (k_1,k_2) 的波前解.对于 $0 < c < c^*$,连接 $(0,0)$ 和 (k_1,k_2) 的波前解不存在.

在文献[30]的基础之上,本文将进一步研究系统(1)波前解的稳定性.首先给出如下假设：

(A1) $a_1a_2 - b_1b_2 > 0$, $d_1 \leqslant d_2$, $r_1 \leqslant r_2$, $2r_1 - d_1 > 0$, $2r_2 - d_2 > 0$;

(A2) $4a_1r_1k_1 > 2r_1(1 + 2b_1k_2) + b_1r_1k_1 + b_2r_2k_2 + d_1$,

$\quad 4a_2r_2k_2 > 2r_2(1 + 2b_2k_1) + b_1r_1k_1 + b_2r_2k_2 + d_2$.

注 1　令 $a_1 = 2$, $a_2 = 2.5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.2$, 通过计算可知假设(A2)是成立的.

为了给出加权能量函数及适当的估计,在此我们定义如下两个关于 β 的函数：

$$f_1(\beta) = 4a_1r_1k_1 - 2r_1(1 + 2b_1k_2) - b_1r_1k_1 - b_2r_2k_2 - d_1(\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta} - 1),$$

$$f_2(\beta) = 4a_2r_2k_2 - 2r_2(1 + 2b_2k_1) - b_1r_1k_1 - b_2r_2k_2 - d_2(\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta} - 1).$$

由假设(A2),易得

$$f_1(0) = 4a_1r_1k_1 - 2r_1(1 + 2b_1k_2) - b_1r_1k_1 - b_2r_2k_2 - d_1 > 0,$$

$$f_2(0) = 4a_2r_2k_2 - 2r_2(1 + 2b_2k_1) - b_1r_1k_1 - b_2r_2k_2 - d_2 > 0.$$

再由 $f_i(\beta)\ (i = 1,2)$ 的连续性,知存在 $\beta_0 > 0$,使得 $f_1(\beta_0) > 0$ 和 $f_2(\beta_0) > 0$.之后再定义另外两个关于 ξ 的函数：

$$g_1(\xi) = - 2r_1(1 + 2b_1k_2) - b_1r_1k_1 - b_2r_2k_2 + 4a_1r_1\phi(\xi) - d_1(\mathrm{e}^{\beta_0} + \mathrm{e}^{-\beta_0} - 1),$$

$$g_2(\xi) = - 2r_2(1 + 2b_2k_1) - b_1r_1k_1 - b_2r_2k_2 + 4a_2r_2\psi(\xi) - d_2(\mathrm{e}^{\beta_0} + \mathrm{e}^{-\beta_0} - 1),$$

其中 $(\phi(\xi),\psi(\xi))$ 是系统(1)的波前解. 易得

$$\lim_{\xi\to+\infty} g_1(\xi)=f_1(\beta_0)>0,\ \lim_{\xi\to+\infty} g_2(\xi)=f_2(\beta_0)>0.$$

于是存在足够大的 $\xi_0>0$, 使得

$$g_i(\xi_0)>0,\qquad i=1,2. \tag{4}$$

由上文,我们进一步定义如下的关于 β_0 和 ξ_0 的加权函数:

$$\omega(\xi)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta_0(\xi-\xi_0)}, & \xi\leqslant\xi_0,\\ 1, & \xi>\xi_0.\end{cases}$$

最后,我们给出本文的主要结论,即系统(1)的波前解的指数稳定性.

定理 1 假设(A1)和(A2)成立. 令

$$\tilde{c}=\max\{c^*,\beta_0^{-1}c_1,\beta_0^{-1}c_2\},$$

其中

$$c_1=2r_1(1+2b_1k_2)+b_1r_1k_1+b_2r_2k_2+d_1(\mathrm{e}^{\beta_0}+\mathrm{e}^{-\beta_0}-1),$$

$$c_2=2r_2(1+2b_2k_1)+b_1r_1k_1+b_2r_2k_2+d_2(\mathrm{e}^{\beta_0}+\mathrm{e}^{-\beta_0}-1).$$

当 $c>\tilde{c}$ 时,对于系统(1)给定的波前解 $(\phi(x+ct),\psi(x+ct))$, 如果初始值及其扰动满足

$$0\leqslant u_0(x,s)\leqslant k_1,\ 0\leqslant v_0(x,s)\leqslant k_2,\qquad (x,s)\in\mathbb{R}\times[-\tau,0],$$

$u_0(x,s)-\phi(x+cs)\in C([-\tau,0];H^1_\omega(\mathbb{R}))$ 和 $v_0(x,s)-\psi(x+cs)\in C([-\tau,0];H^1_\omega(\mathbb{R}))$, 那么 Cauchy 问题(1)、(2)的解满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant k_1,\ 0\leqslant v(x,t)\leqslant k_2,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,$$

$$u(x,t)-\phi(x+ct)\in C([0,+\infty);H^1_\omega(\mathbb{R})),\ v(x,t)-\psi(x+ct)\in C([0,+\infty);H^1_\omega(\mathbb{R})).$$

另外,解 $(u(x,t),v(x,t))$ 指数收敛到$(\phi(x+ct),\psi(x+ct))$, 即

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x,t)-\phi(x+ct)|\leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t},\qquad t\geqslant 0,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(x,t)-\psi(x+ct)|\leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t},\qquad t\geqslant 0,$$

其中常数 $\mu>0$.

2 稳定性的证明

本节将通过加权能量的方法证明本文的主要结论. 首先,类似文献[22,27]中的证明,我们可以给出系统(1)的存在性定理和比较原理.

引理 2 假设 $a_1a_2-b_1b_2>0$, $2r_1-d_1>0$, $2r_2-d_2>0$ 成立,若初始条件满足

$$(0,0)\leqslant(u_0(x,s),v_0(x,s))\leqslant(k_1,k_2),\qquad (x,s)\in\mathbb{R}\times[-\tau,0],$$

那么 Cauchy 问题(1)、(2)的解存在唯一且满足

$$(0,0)\leqslant(u(x,t),v(x,t))\leqslant(k_1,k_2),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

令 $(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t))$ 和$(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))$ 分别是系统(1)带有初值 $(\underline{u}_0(x,s),\underline{v}_0(x,s))$ 和$(\bar{u}_0(x,s),\bar{v}_0(x,s))$ 的解. 如果

$$(0,0)\leqslant(\underline{u}_0(x,s),\underline{v}_0(x,s))\leqslant(\bar{u}_0(x,s),\bar{v}_0(x,s))\leqslant(k_1,k_2),\qquad (x,s)\in\mathbb{R}\times[-\tau,0],$$

那么

$$(0,0)\leqslant(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t))\leqslant(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))\leqslant(k_1,k_2),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

若 $(u_0(x,s),v_0(x,s))$ 满足

$$(0,0)\leqslant(u_0(x,s),v_0(x,s))\leqslant(k_1,k_2),\qquad (x,s)\in\mathbb{R}\times[-\tau,0],$$

令

$$\begin{cases}u_0^+(x,s)=\max\{u_0(x,s),\phi(x+cs)\},\\ u_0^-(x,s)=\min\{u_0(x,s),\phi(x+cs)\},\\ v_0^+(x,s)=\max\{v_0(x,s),\psi(x+cs)\},\\ v_0^-(x,s)=\min\{v_0(x,s),\psi(x+cs)\},\end{cases}\qquad (x,s)\in\mathbb{R}\times[-\tau,0], \tag{5}$$

那么

$$\begin{cases}0 \leqslant u_0^-(x,s) \leqslant u_0(x,s) \leqslant u_0^+(x,s) \leqslant k_1, \\ 0 \leqslant u_0^-(x,s) \leqslant \phi(x+cs) \leqslant u_0^+(x,s) \leqslant k_1, \\ 0 \leqslant v_0^-(x,s) \leqslant v_0(x,s) \leqslant v_0^+(x,s) \leqslant k_2, \\ 0 \leqslant v_0^-(x,s) \leqslant \psi(x+cs) \leqslant v_0^+(x,s) \leqslant k_2,\end{cases} \quad (x,s) \in \mathbb{R} \times [-\tau, 0]. \tag{6}$$

设 $(u^-(x,t), v^-(x,t))$ 和 $(u^+(x,t), v^+(x,t))$ 分别是系统(1)的初值为 $(u_0^-(x,s), v_0^-(x,s))$ 和 $(u_0^+(x,s), v_0^+(x,s))$ 相对应的解,由引理 2 可得

$$\begin{cases}0 \leqslant u^-(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant u^+(x,t) \leqslant k_1, \\ 0 \leqslant u^-(x,t) \leqslant \phi(x+ct) \leqslant u^+(x,t) \leqslant k_1, \\ 0 \leqslant v^-(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant v^+(x,t) \leqslant k_2, \\ 0 \leqslant v^-(x,t) \leqslant \psi(x+ct) \leqslant v^+(x,t) \leqslant k_2,\end{cases} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

接下来将分三步来证明主要的结果.

首先,证明 $u^+(x,t)$ 收敛到 $\phi(x+ct)$.令

$$U(\xi,t) = u^+(x,t) - \phi(x+ct),\ U_0(\xi,s) = u_0^+(x,s) - \phi(x+cs),$$

$$V(\xi,t) = v^+(x,t) - \psi(x+ct),\ V_0(\xi,s) = v_0^+(x,s) - \psi(x+cs),$$

其中 $\xi = x + ct$.由式(5)和(6),有

$$(0,0) \leqslant (U(\xi,t), V(\xi,t)) \leqslant (k_1,k_2),\ (0,0) \leqslant (U_0(\xi,s), V_0(\xi,s)) \leqslant (k_1,k_2).$$

通过计算易得 $U(\xi,t), V(\xi,t)$ 满足

$$\begin{cases}U_t + cU_\xi = d_1 \mathcal{D}[U(\xi,t)] - r_1 U[2a_1\phi - 1 - b_1\psi(\xi - c\tau) - b_1 V(\xi - c\tau, t-\tau)] - \\ \qquad a_1 r_1 U^2 + b_1 r_1 \phi V(\xi - c\tau, t-\tau), \\ V_t + cV_\xi = d_2 \mathcal{D}[V(\xi,t)] - r_2 V[2a_2\psi - 1 - b_2\phi(\xi - c\tau) - b_2 U(\xi - c\tau, t-\tau)] - \\ \qquad a_2 r_2 V^2 + b_2 r_2 \psi U(\xi - c\tau, t-\tau),\end{cases} \tag{8}$$

式(8)的方程两端分别乘以 $e^{2\mu t}\omega(\xi)U(\xi,t)$ 和 $e^{2\mu t}\omega(\xi)V(\xi,t)$,其中 $\mu > 0$ 待定,可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}e^{2\mu t}\omega U^2\right)_t + \left(\frac{c}{2}e^{2\mu t}\omega U^2\right)_\xi - e^{2\mu t}\omega U d_1[U(\xi+1,t) + U(\xi-1,t)] + \\ &\quad e^{2\mu t}\omega U^2\left\{2d_1 - \mu - \frac{c}{2}\frac{\omega'}{\omega} + r_1[2a_1\phi - 1 - b_1\psi(\xi - c\tau) - b_1 V(\xi - c\tau, t-\tau)]\right\} = \\ &\quad - a_1 r_1 e^{2\mu t}\omega U^3 + b_1 r_1 \phi e^{2\mu t}\omega U V(\xi - c\tau, t-\tau),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}e^{2\mu t}\omega V^2\right)_t + \left(\frac{c}{2}e^{2\mu t}\omega V^2\right)_\xi - e^{2\mu t}\omega V d_2[V(\xi+1,t) + V(\xi-1,t)] + \\ &\quad e^{2\mu t}\omega V^2\left\{2d_2 - \mu - \frac{c}{2}\frac{\omega'}{\omega} + r_2[2a_2\psi - 1 - b_2\phi(\xi - c\tau) - b_2 U(\xi - c\tau, t-\tau)]\right\} = \\ &\quad - a_2 r_2 e^{2\mu t}\omega V^3 + b_2 r_2 \psi\ e^{2\mu t}\omega V U(\xi - c\tau, t-\tau).\end{aligned} \tag{10}$$

注意到 $U \in H_\omega^1$ 和 $V \in H_\omega^1$,那么由文献[27]可得

$$\{e^{2\mu t}\omega(\xi)U^2(\xi,t)\}\big|_{\xi=-\infty}^{\infty} = 0,\ \{e^{2\mu t}\omega(\xi)V^2(\xi,t)\}\big|_{\xi=-\infty}^{\infty} = 0.$$

因此,对式(9)和式(10)分别关于 ξ 和 t 在$\mathbb{R} \times [0,t]$ 上积分可得

$$\begin{aligned}&e^{2\mu t}\|U(t)\|_{L_\omega^2}^2 - 2d_1\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega U(\xi,s)[U(\xi+1,s) + U(\xi-1,s)]d\xi ds + \\ &\quad \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega U^2\left\{4d_1 - 2\mu - c\frac{\omega'}{\omega} + 2r_1[2a_1\phi - 1 - b_1\psi(\xi - c\tau) - b_1 V(\xi - c\tau, s-\tau)]\right\}d\xi ds \leqslant \\ &\quad \|U_0(0)\|_{L_\omega^2}^2 + 2b_1 r_1\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \phi e^{2\mu s}\omega U V(\xi - c\tau, s-\tau)d\xi ds,\end{aligned} \tag{11}$$

$$e^{2\mu t}\|V(t)\|_{L^2_\omega}^2 - 2d_2\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega V(\xi,s)[V(\xi+1,s)+V(\xi-1,s)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega V^2\left\{4d_2-2\mu-c\frac{\omega'}{\omega}+2r_2[2a_2\psi-1-b_2\phi(\xi-c\tau)-b_2U(\xi-c\tau,s-\tau)]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant \|V_0(0)\|_{L^2_\omega}^2 + 2b_2r_2\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\psi\, e^{2\mu s}\omega VU(\xi-c\tau,s-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s. \tag{12}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$2\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega W(\xi,s)W(\xi\pm1,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega[W^2(\xi,s)+W^2(\xi\pm1,s)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega W^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\frac{\omega(\xi\mp1)}{\omega(\xi)}e^{2\mu s}\omega W^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s, \tag{13}$$

其中 $W=U,V$.类似地,对于式(11)和式(12)右端的第二项,有

$$2b_1r_1\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega\phi UV(\xi-c\tau,s-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant b_1r_1\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega\phi U^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + b_1r_1e^{2\mu\tau}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi+c\tau)\phi(\xi+c\tau)V^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + b_1r_1e^{2\mu\tau}\int_{-\tau}^0\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi+c\tau)\phi(\xi+c\tau){V_0}^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s, \tag{14}$$

$$2b_2r_2\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega\psi VU(\xi-c\tau,s-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant b_2r_2\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega\psi V^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + b_2r_2e^{2\mu\tau}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi+c\tau)\psi(\xi+c\tau)U^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + b_2r_2e^{2\mu\tau}\int_{-\tau}^0\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi+c\tau)\psi(\xi+c\tau)U_0^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s. \tag{15}$$

将式(13)—(15)代入到式(11)和(12)中,由于对于 $\xi\in\mathbb{R}$ 有 $\omega(\xi+c\tau)/\omega(\xi)\leqslant 1$, 因此

$$e^{2\mu t}\|U(t)\|_{L^2_\omega}^2 + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega U^2\left\{4d_1-2\mu-c\frac{\omega'}{\omega}-b_1r_1\phi-d_1\left[2+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} 2e^{2\mu s}\omega U^2r_1[2a_1\phi-1-b_1\psi(\xi-c\tau)-b_1V(\xi-c\tau,s-\tau)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant \|U_0(0)\|_{L^2_\omega}^2 + b_1r_1k_1e^{2\mu\tau}\int_{-\tau}^0\|V_0(s)\|_{L^2_\omega}^2\mathrm{d}s + b_1r_1e^{2\mu\tau}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi+c\tau)\phi(\xi+c\tau)V^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s, \tag{16}$$

$$e^{2\mu t}\|V(t)\|_{L^2_\omega}^2 + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega V^2\left\{4d_2-2\mu-c\frac{\omega'}{\omega}-b_2r_2\psi-d_2\left[2+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} 2e^{2\mu s}\omega V^2r_2[2a_2\psi-1-b_2\phi(\xi-c\tau)-b_2U(\xi-c\tau,s-\tau)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant \|V_0(0)\|_{L^2_\omega}^2 + b_2r_2k_2e^{2\mu\tau}\int_{-\tau}^0\|U_0(s)\|_{L^2_\omega}^2\mathrm{d}s + b_2r_2e^{2\mu\tau}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi+c\tau)\psi(\xi+c\tau)U^2(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s. \tag{17}$$

结合式(16)与式(17),可得

$$e^{2\mu t}(\|U(t)\|_{L^2_\omega}^2 + \|V(t)\|_{L^2_\omega}^2) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{2\mu s}\omega(\xi)(B^1_{\mu,\omega}(\xi,s)U^2(\xi,s)+B^2_{\mu,\omega}(\xi,s)V^2(\xi,s))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant$$

$$C_0\left(\|U_0(0)\|_{L^2_\omega}^2+\|V_0(0)\|_{L^2_\omega}^2+\int_{-\tau}^0\|U_0(s)\|_{L^2_\omega}^2\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^0\|V_0(s)\|_{L^2_\omega}^2\mathrm{d}s\right), \tag{18}$$

其中

$$B^1_{\mu,\omega}(\xi,t)=A^1_\omega(\xi,t)-2\mu-b_2r_2(\mathrm{e}^{2\mu\tau}-1)\psi(\xi+c\tau)\frac{\omega(\xi+c\tau)}{\omega(\xi)},$$

$$B^2_{\mu,\omega}(\xi,t)=A^2_\omega(\xi,t)-2\mu-b_1r_1(\mathrm{e}^{2\mu\tau}-1)\phi(\xi+c\tau)\frac{\omega(\xi+c\tau)}{\omega(\xi)},$$

$$A^1_\omega(\xi,t)=4d_1-c\frac{\omega'}{\omega}+2r_1[2a_1\phi-1-b_1\psi(\xi-c\tau)-b_1V(\xi-c\tau,t-\tau)]-b_1r_1\phi-$$
$$b_2r_2\psi(\xi+c\tau)\frac{\omega(\xi+c\tau)}{\omega(\xi)}-d_1\left[2+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}\right],$$

$$A^2_\omega(\xi,t)=4d_2-c\frac{\omega'}{\omega}+2r_2[2a_2\psi-1-b_2\phi(\xi-c\tau)-b_2U(\xi-c\tau,t-\tau)]-b_2r_2\psi-$$
$$b_1r_1\phi(\xi+c\tau)\frac{\omega(\xi+c\tau)}{\omega(\xi)}-d_2\left[2+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}\right].$$

接下来,我们通过下面的引理证明 $A^i_\omega(\xi,t)\,(i=1,2)$ 大于某些正整数.

引理 3　假设(A1)与(A2)成立.当 $c>\tilde{c}$ 及 $\xi\in\mathbb{R}$, $t\geqslant0$ 时,存在正整数 $C_i, i=1,2$, 使得

$$A^i_\omega(\xi,t)\geqslant C_i,\qquad i=1,2.$$

证明　首先,我们证明存在常数 $C_1>0$ 使得 $A^1_\omega(\xi,t)\geqslant C_1$.当 $\xi<\xi_0-1$ 时,此时 $\omega(\xi+c\tau)/\omega(\xi)\leqslant1$.由前面的讨论及直接计算可得

$$A^1_\omega(\xi,t)\geqslant c\beta_0-2r_1(1+2b_1k_2)-b_1r_1k_1-b_2r_2k_2-d_1(\mathrm{e}^{\beta_0}+\mathrm{e}^{-\beta_0}-1)+d_1.$$

类似地,当 $\xi_0-1\leqslant\xi\leqslant\xi_0$ 时,此时 $\omega(\xi+c\tau)/\omega(\xi)\leqslant1$.然后可得

$$A^1_\omega(\xi,t)\geqslant c\beta_0-2r_1(1+2b_1k_2)-b_1r_1k_1-b_2r_2k_2-d_1(\mathrm{e}^{\beta_0}+\mathrm{e}^{-\beta_0}-1)+d_1\mathrm{e}^{-\beta_0}.$$

当 $\xi_0<\xi\leqslant\xi_0+1$ 时,此时 $\omega(\xi+c\tau)/\omega(\xi)=1$.然后可得

$$A^1_\omega(\xi,t)\geqslant2r_1[2a_1\phi(\xi_0)-1-2b_1k_2]-b_1r_1k_1-b_2r_2k_2-d_1(\mathrm{e}^{\beta_0}+\mathrm{e}^{-\beta_0}-1)+d_1\mathrm{e}^{-\beta_0}.$$

当 $\xi>\xi_0+1$ 时,此时 $\omega(\xi+c\tau)/\omega(\xi)=1$.然后可得

$$A^1_\omega(\xi,t)\geqslant2r_1[2a_1\phi(\xi_0)-1-2b_1k_2]-b_1r_1k_1-b_2r_2k_2-d_1(\mathrm{e}^{\beta_0}+\mathrm{e}^{-\beta_0}-1)+d_1.$$

综上所述,令 $C_1=d_1\mathrm{e}^{-\beta_0}$,可得 $A^1_\omega(\xi,t)\geqslant C_1$.

类似地,可证存在常数 $C_2>0$ 使得 $A^2_\omega(\xi,t)\geqslant C_2$.　□

在引理 3 基础之上,我们将进一步给出 $B^i_{\mu,\omega}(\xi,t)\,(i=1,2)$ 的正下界.

引理 4　设 $\mu_1>0$ 是如下方程

$$\bar{C}-2\mu-h(\mathrm{e}^{2\mu\tau}-1)=0$$

的唯一实根,其中 $\bar{C}=\min\{C_1,C_2\}$ 和 $h=\max\{b_1r_1k_1,b_2r_2k_2\}$.取 $0<\mu<\mu_1$,那么存在 $C_3>0$ 使得

$$B^i_{\mu,\omega}(\xi,t)\geqslant C_3,\qquad i=1,2,\ \xi\in\mathbb{R},\ t\geqslant0. \tag{19}$$

证明　由于 $(0,0)\leqslant(\phi(\xi),\psi(\xi))\leqslant(k_1,k_2)$ 及 $\omega(\xi+c\tau)/\omega(\xi)\leqslant1\,(\xi\in\mathbb{R})$,因此,当 $0<\mu<\mu_1$ 时,可得

$$B^1_{\mu,\omega}(\xi,t)=A^1_\omega(\xi,t)-2\mu-b_2r_2(\mathrm{e}^{2\mu\tau}-1)\psi(\xi+c\tau)\frac{\omega(\xi+c\tau)}{\omega(\xi)}\geqslant$$
$$\bar{C}-2\mu-h(\mathrm{e}^{2\mu\tau}-1):=C_3>0.$$

类似地,可证 $B^2_{\mu,\omega}(\xi,t)\geqslant C_3$.　□

然后,将式(19)代入式(18),我们可得如下估计.

引理 5　假设(A1)和(A2)成立.对于 $c>\tilde{c}$,存在正常数 C_4 使得

$$
\begin{cases}
\mathrm{e}^{2\mu t}\|U(t)\|_{L_\omega^2}^2 \leqslant C_4\left[\|U_0(0)\|_{L_\omega^2}^2+\|V_0(0)\|_{L_\omega^2}^2+\int_{-\tau}^0(\|U_0(s)\|_{L_\omega^2}^2+\|V_0(s)\|_{L_\omega^2}^2)\mathrm{d}s\right],\\
\mathrm{e}^{2\mu t}\|V(t)\|_{L_\omega^2}^2 \leqslant C_4\left[\|U_0(0)\|_{L_\omega^2}^2+\|V_0(0)\|_{L_\omega^2}^2+\int_{-\tau}^0(\|U_0(s)\|_{L_\omega^2}^2+\|V_0(s)\|_{L_\omega^2}^2)\mathrm{d}s\right].
\end{cases}
\tag{20}
$$

之后,我们给出 U_ξ 和 V_ξ 在加权空间中的 L^2 估计.类似地,对式(8)方程两端关于 ξ 求导并对所得方程的两边分别乘以 $\mathrm{e}^{2\mu t}\omega(\xi)U_\xi(\xi,t)$ 和 $\mathrm{e}^{2\mu t}\omega(\xi)V_\xi(\xi,t)$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mu t}\omega U_\xi^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{2\mu t}\omega U_\xi^2\right)_\xi-\mathrm{e}^{2\mu t}\omega U_\xi d_1[U_\xi(\xi+1,t)+U_\xi(\xi-1,t)]+\\
&\quad \mathrm{e}^{2\mu t}\omega U_\xi^2\left\{2d_1-\mu-\frac{c}{2}\frac{\omega'}{\omega}+r_1[2a_1\phi-1-b_1\psi(\xi-c\tau)-b_1V(\xi-c\tau,t-\tau)]\right\}+\\
&\quad r_1\mathrm{e}^{2\mu t}\omega UU_\xi[2a_1\phi'-b_1\psi'(\xi-c\tau)-b_1V_\xi(\xi-c\tau,t-\tau)]=\\
&\quad -2a_1r_1\mathrm{e}^{2\mu t}\omega UU_\xi^2+b_1r_1\phi'\mathrm{e}^{2\mu t}\omega U_\xi V(\xi-c\tau,t-\tau)+b_1r_1\phi\mathrm{e}^{2\mu t}\omega U_\xi V_\xi(\xi-c\tau,t-\tau),\\
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mu t}\omega V_\xi^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{2\mu t}\omega V_\xi^2\right)_\xi-\mathrm{e}^{2\mu t}\omega V_\xi d_2[V_\xi(\xi+1,t)+V_\xi(\xi-1,t)]+\\
&\quad \mathrm{e}^{2\mu t}\omega V_\xi^2\left\{2d_2-\mu-\frac{c}{2}\frac{\omega'}{\omega}+r_2[2a_2\psi-1-b_2\phi(\xi-c\tau)-b_2U(\xi-c\tau,t-\tau)]\right\}+\\
&\quad r_2\mathrm{e}^{2\mu t}\omega VV_\xi[2a_2\psi'-b_2\phi'(\xi-c\tau)-b_2U_\xi(\xi-c\tau,t-\tau)]=\\
&\quad -2a_2r_2\mathrm{e}^{2\mu t}\omega VV_\xi^2+b_2r_2\psi'\mathrm{e}^{2\mu t}\omega V_\xi U(\xi-c\tau,t-\tau)+b_2r_2\psi\mathrm{e}^{2\mu t}\omega V_\xi U_\xi(\xi-c\tau,t-\tau).
\end{aligned}
$$

重复上述证明过程可得引理 6.

引理 6 假设(A1)与(A2)成立.对于 $c>\tilde{c}$,存在正常数 C_5 使得

$$
\begin{cases}
\mathrm{e}^{2\mu t}\|U_\xi(t)\|_{L_\omega^2}^2 \leqslant C_5\left[\|U_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\int_{-\tau}^0(\|U_0(s)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(s)\|_{H_\omega^1}^2)\mathrm{d}s\right],\\
\mathrm{e}^{2\mu t}\|V_\xi(t)\|_{L_\omega^2}^2 \leqslant C_5\left[\|U_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\int_{-\tau}^0(\|U_0(s)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(s)\|_{H_\omega^1}^2)\mathrm{d}s\right].
\end{cases}
$$

由引理 5 和 6,可得到如下估计.

引理 7 假设(A1)与(A2)成立.对于 $c>\tilde{c}$, 有

$$
\begin{cases}
\|U(t)\|_{H_\omega^1} \leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t}\left[\|U_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\int_{-\tau}^0(\|U_0(s)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(s)\|_{H_\omega^1}^2)\mathrm{d}s\right]^{1/2},\\
\|V(t)\|_{H_\omega^1} \leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t}\left[\|U_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(0)\|_{H_\omega^1}^2+\int_{-\tau}^0(\|U_0(s)\|_{H_\omega^1}^2+\|V_0(s)\|_{H_\omega^1}^2)\mathrm{d}s\right]^{1/2}.
\end{cases}
$$

由于 $\omega(\xi)\geqslant 1$, 运用 Sobolev 嵌入定理 $H^1(\mathbb{R})\hookrightarrow C(\mathbb{R})$, 我们得到如下衰减结论.

引理 8 假设(A1)与(A2)成立.对于 $c>\tilde{c}$, 有

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|u^+(x,t)-\phi(x+ct)|=\\
\qquad\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}|U(\xi,t)|\leqslant\|U(t)\|_{H^1}\leqslant\|U(t)\|_{H_\omega^1}\leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t\geqslant 0,\\
\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|v^+(x,t)-\psi(x+ct)|=\\
\qquad\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}|V(\xi,t)|\leqslant\|V(t)\|_{H^1}\leqslant\|V(t)\|_{H_\omega^1}\leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t\geqslant 0.
\end{cases}
$$

其次,重复上述证明过程可得引理 9.

引理 9 假设(A1)与(A2)成立.对于 $c>\tilde{c}$, 有

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|u^-(x,t)-\phi(x+ct)|\leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t\geqslant 0,\\
\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|v^-(x,t)-\psi(x+ct)|\leqslant C\mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t\geqslant 0.
\end{cases}
$$

最后,运用挤压定理并结合引理 8 与 9,可证明定理 1 成立.

3 结　　论

本文运用 L^2- 加权能量方法、比较原理和挤压技术得到了具有时滞的离散 Lotka-Volterra 合作系统波前解的全局指数稳定性，并解决了离散扩散算子及时滞共同作用下建立能量估计的问题．此稳定性结果可以有助于理解解 (u,v) 渐近地表现为以正速度 c 传播的行波解，并且随着时间 t 的推移，这两个物种趋于合作水平．

参考文献（References）：

[1] 叶其孝，李正元，王明新，等. 反应扩散方程引论［M］. 2 版. 北京：科学出版社，2011.（YE Qixiao，LI Zhengyuan，WANG Mingxin，et al. *Introduction to Reaction-Diffusion Equations*［M］. 2nd ed. Beijing：Science Press，2011.（in Chinese））

[2] HUANG J H，ZOU X F. Travelling wave fronts in diffusive and cooperative Lotka-Volterra system with delays［J］. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*，2002，**271**：455-466.

[3] WU J H，ZOU X F. Traveling wave fronts of reaction diffusion systems with delay［J］. *Journal of Dynamics and Differential Equations*，2001，**13**：651-687.

[4] LV G Y，WANG M X. Traveling wave front in diffusive and competitive Lotka-Volterra system with delays［J］. *Nonlinear Analysis*：*Real World Applications*，2010，**11**（3）：1323-1329.

[5] GUO J S，WU C H. Traveling wave front for a two-component lattice dynamical system arising in competition-models［J］. *Journal of Differential Equations*，2012，**252**（8）：4357-4391.

[6] LI K，HUANG J H，LI X，et al. Traveling wave fronts in a delayed lattice competitive system［J］. *Applicable Analysis*，2017，**97**（6）：982-999.

[7] 张秋，陈广生. 一类具有非线性发生率与时滞的非局部扩散 SIR 模型的临界波的存在性［J］. 应用数学和力学，2019，**40**（7）：713-727.（ZHANG Qiu，CHEN Guangsheng. Existence of critical traveling waves for nonlocal dispersal SIR models with delay and nonlinear incidence［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*，2019，**40**（7）：713-727.（in Chinese））

[8] 谷雨萌，黄明迪. 一类时间周期的时滞竞争系统行波解的存在性［J］. 应用数学和力学，2020，**41**（6）：658-668.（GU Yumeng，HUANG Mingdi. Existence of periodic traveling waves for time-periodic Lotka-Volterra competition systems with delay［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*，2020，**41**（6）：658-668.（in Chinese））

[9] BRAMSON M. *Convergence of Solutions of the Kolmogorov Equation to Traveling Waves*［M］. Memoirs of the American Mathematical Society，1983.

[10] KIRCHGÄSSNER K. On the nonlinear dynamics of travelling fronts［J］. *Journal of Differential Equations*，1992，**96**（2）：256-278.

[11] TSAI J C，SNEYD J. Existence and stability of traveling waves in bufferedsystems［J］. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*，2005，**66**：237-265.

[12] MA S W，ZHAO X Q. Global asymptotic stability of minimal fronts in monostable lattice equations［J］. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*，2008，**21**：259-275.

[13] WANG Y，CAO X Y，MA Z H，et al. Global stability of noncritical traveling front solutions of Fisher-type equations with degenerate nonlinearity［J］. *Journal of Mathematical Physics*，2021，**62**（5）：051506.

[14] ZHOU Y H，YAN Z M，JI S G. Global stability of traveling waves with non-monotonicity for population dynamicsmodel［J］. *Tokyo Journal of Mathematics*，2021，**44**：383-396.

[15] LIU C C，MEI M，YANG J Q. Global stability of traveling waves for nonlocal time-delayed degenerate diffusion equation［J］. *Journal of Differential Equations*，2022，**306**：60-100.

[16] SCHAAF K W. Asymptotic behavior and traveling wave solutions for parabolic functional differentialequations［J］. *Transactions of the American Mathematical Society*，1987，**302**：587-615.

[17] MEI M，SO J W H，LI M Y，et al. Asymptotic stability of traveling waves for the Nicholson's blowflies equation with diffusion［J］. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*：*Mathematics*，2004，**134**（3）：579-594.

[18] LIN C K，MEI M. On travellingwavefronts of the Nicholson's blowflies equations with diffusion［J］. *Proceed-*

ings of the Royal Society of Edinburgh Section A: *Mathematics*, 2010, **140**(1): 135-152.

[19] MEI M, LIN C K, LIN C T, et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction-diffusion equation, Ⅰ: local nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2009, **247**(2): 495-510.

[20] MEI M, LIN C K, LIN C T, et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction-diffusion equation, Ⅱ: nonlocal nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2009, **247**(2): 511-529.

[21] YU Z X, XU F, ZHANG W G. Stability of invasion traveling waves for a competition system with nonlocaldispersals[J]. *Applicable Analysis*, 2017, **96**(7): 1107-1125.

[22] ZHANG G B, DONG F D, LI W T. Uniqueness and stability of traveling waves for a three-species competition system with nonlocaldispersal[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series B*), 2019, **24**(4): 1511-1541.

[23] MA S, ZOU X F. Existence, uniqueness and stability of traveling waves in a discrete reaction-diffusionmonostable equation with delay[J]. *Journal of Differential Equations*, 2005, **217**(1): 54-87.

[24] GUO S J, ZIMMER J. Stability of travelingwavefronts in discrete reaction-diffusion equations with nonlocal delay effects[J]. *Nonlinearity*, 2015, **28**(2): 463-492.

[25] HSU C H, LIN J J, YANG T S. Stability for monostable wave fronts of delayed lattice differential equations [J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2017, **29**: 323-342.

[26] YU Z X, HSU C H. Wave propagation and its stability for a class of discrete diffusion systems[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2020, **71**: 194.

[27] CHEN G S, WU S L, HSU C H. Stability of travelingwavefronts for a discrete diffusive competition system with three species[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, **474**(2): 909-930.

[28] SU T, ZHANG G B. Stability of travelingwavefronts for a three-component Lotka-Volterra competition system on a lattice[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, **57**(2018): 1-16.

[29] HSU C H, LIN J J. Stability analysis of traveling wave solutions for lattice reaction-diffusion equations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series B*), 2020, **25**(5): 1757-1774.

[30] 朱福国. 格上时滞 Lotka-Volterra 合作系统的波前解[J]. 生物数学学报, 2012, **27**(1): 150-156.(ZHU Fuguo. Traveling wavefrons of delayed Lotka-Volterra system on lattice[J]. *Journal of Biomathematics*, 2012, **27**(1): 150-156.(in Chinese))