

三维快速多极边界元法分析地埋管群传热问题*

宋子欣, 胡宗军, 胡 斌, 牛忠荣

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘要: 基于三节点三角形线性单元, 为克服单元跨叶子积分难题, 将三维位势问题快速多极边界元法与几乎奇异积分的半解析算法相结合, 实现了三维边界元法中几乎奇异积分的准确计算, 该方法适用于 U 型地埋管薄体结构的换热分析. 在制冷、制热两种工况下研究了 U 型地埋管壁厚对换热量的影响, 并进一步分析了管群间的热相互作用. 计算结果显示, 当管壁导热系数一定时, 管壁越厚, 对管内流体和土壤之间的换热影响越大. 当钻孔间距一定时, 管群中埋管数量越多, 热干扰现象越强烈, 提高管群换热量的主要措施是降低管群间热干扰. 因准确计算了几乎奇异积分, 三维快速多极边界元法可以有效计算薄体和厚体耦合的三维热传导问题. 该文方法和分析结果可为地埋管换热器系统的工程应用提供参考.

关键词: 地埋管群换热器; 几乎奇异积分; 薄体; 传热; 快速多极边界元法

中图分类号: O39 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430210

3D Fast Multipole Boundary Element Method Analysis of Heat Exchange Performance of Buried Pipe Groups

SONG Zixin, HU Zongjun, HU Bin, NIU Zhongrong

(College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China)

Abstract: Based on the 3-node triangular linear element and to overcome the element cross-leaf integration problem, a new 3D fast method was formulated for 3D potential problems through combination of the fast multipole boundary element method (FMBEM) with the semi-analytical algorithm of nearly singular integral, to realize the accurate calculation of the nearly singular integral in the 3D boundary element method (BEM). This method is applicable to the heat exchange of thin-wall structures of U-type buried pipe groups. In the cooling and heating conditions, the effects of the wall thickness of the U-type buried pipe group were analyzed by means of the new FMBEM, and the thermal interaction between multiple buried pipes was discussed. The calculation results show that, for a constant thermal conductivity of the pipe wall, the thicker the pipe wall is, the greater the effect on the heat exchange between the pipe fluid and the soil will be. For a constant borehole spacing, the bigger the number of buried pipes in a group is, the stronger the thermal interference between the pipes will be. The main strategy to increase the heat exchange of the pipe group is to reduce the thermal interference between the heat exchange pipes. Due to the accurate calculation of the nearly singular integral, the proposed 3D FMBEM can effectively solve the 3D heat exchange problems of thin-thick coupled bodies. This

* 收稿日期: 2022-06-21; 修订日期: 2022-10-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11272111)

作者简介: 宋子欣(1997—), 女, 硕士(E-mail: peytonsong@163.com);

胡宗军(1975—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: huzongjun_1975@163.com).

引用格式: 宋子欣, 胡宗军, 胡斌, 牛忠荣. 三维快速多极边界元法分析地埋管群传热问题[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(7): 797-808.

method and the results for the provide references for the engineering application of buried pipe heat exchangers.

Key words: U-type buried pipe heat exchanger; nearly singular integral; thin body; heat conduction; fast multiple boundary element method

0 引言

地理管换热器的埋置深度一般在30~200 m之间,埋管管径为25~100 mm,壁厚为2~6 mm,U型管道狭长,涉及到薄壁结构与周围土体耦合问题,导致换热分析较为困难.为此,国内外学者对其传热问题进行了诸多研究.Guan等^[1]将U型管通过等效公式简化为矩形管,略去了U型管管底区域,在此模型下讨论了地下水渗流速度对埋管传热的影响.Kerme等^[2]利用能量平衡方程分析了具有两个独立回路的双U管的瞬态传热过程,得到了沿钻孔深度分布的传热曲线.贺泽群等^[3]采用自适应负荷法,以钻孔壁温度替代管内壁温度,对不同钻孔位置的换热量和热堆积问题进行了研究.张荻等^[4]采用实验和数值模拟相结合的方法,研究了层流条件下球窝结构内矩形通道内部的流动与换热特性.朱利媛等^[5]考虑热量沿轴向的传递,利用边界元法对二维稳态热传导下的地理管换热器进行了模拟研究.Lei等^[6]将U型管简化为三维曲线,利用有限元软件COSMOL建立了地理管群的热渗耦合三维数值模型,研究了系统运行一年后地层温度场的变化.

目前,多数学者是利用有限元法(FEM)对地理管换热器进行模拟研究.在FEM中有无限单元、管道单元和基于连续体的壳单元等,用于计算薄体和厚体耦合的传热问题.其中无限单元一般用于解决土壤无限域问题,和常规有限元一起用来解决更复杂的无界问题.同时,对于模拟接触问题,基于连续体的壳单元由于考虑了厚度的变化,与常规壳单元相比更加精确.相比于FEM,边界元法(BEM)只需在结构的表面和界面上划分网格,缩减了网格的自由度数量,因此在分析薄体问题时具有优势.但传统BEM生成的定解方程组的系数矩阵是非对称满秩矩阵^[7],计算量级过大,难以计算大规模问题,因此传统BEM无力计算地理管群的传热问题.随着快速多极算法的发展,应运而生的快速多极边界元法(FMBEM)提高了传统BEM的计算效率,并降低了内存的占有量,近二十年被广泛应用于解决各种大规模问题.由于FMBEM在使用线性单元和高阶单元时,八叉树结构中存在着同一单元的节点处于不同叶子的现象,导致单元积分难以处理.因此目前FMBEM主要采用常值单元,在处理薄体结构和高梯度场时,需布置稠密网格以弥补计算精度的不足,导致计算效率较低.徐刚等^[8]将传统常值单元中直接布置在流体计算域表面网格中心上的奇点移到了计算区域外部,以此实现了无奇异化.刘静等^[9]基于自适应分块技术,提出了一种组合变换法,分别消除了径向和角度方向积分的近奇异性.侯俊剑等^[10]利用扩展单元插值法,在不连续的边界配置虚拟节点,利用虚拟节点插值边界上连续和不连续的物理场,将非连续单元变为高阶连续单元.胡宗军等^[11]针对二维位势问题,通过在几乎奇异积分单元上扣除奇异函数部分消除了几乎奇异性,并将其应用于二维薄体结构温度场分析中.

本文基于边界元法基本理论,引入三维线性单元几乎奇异积分的正则化算法^[12],解决了线性单元跨叶子积分难题,对三维位势问题建立了三角形线性单元FMBEM和计算程序,大大提高了FMBEM分析大规模三维薄壁热传导问题的计算效率和精度.文中采用三角形线性单元FMBEM对地理管换热器的换热性能进行分析,讨论了管壁厚度对地理管传热性能的影响,并研究了地理管群的传热效率.本文研究成果可为地源热泵的设计和运行提供参考.

1 三维位势问题快速多极边界元分析与数值验证

1.1 边界元法分析稳态热传导的基本方程

考虑各向同性均匀介质三维区域 Ω 的热传导问题. $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_u + \Gamma_q$, Γ_u 为第一类边界条件,即给定温度 \bar{u} 的边界, Γ_q 为第二类边界条件,即给定热流 \bar{q} 的边界.忽略体源项,设置直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$,稳态传热温度场的控制方程可转换为位势边界积分方程^[13]:

$$C(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} Q^*(\mathbf{x},\mathbf{y})u(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (1)$$

式中 \mathbf{y} 为源点, \mathbf{x} 为场点, $C(\mathbf{y})$ 为位势奇性系数, $u(\mathbf{y})$ 为位势, $q = k \frac{\partial u}{\partial n}$ 为热流, k 为介质的导热系数, n 为 Γ 的

外法线, U^* 和 Q^* 为 \mathbf{y} 处单位点源作用下 Laplace 方程的基本解, 其中

$$U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi kr}, \tag{2}$$

$$Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k \frac{\partial U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n}, \tag{3}$$

式中 $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ 为源点 \mathbf{y} 到场点 \mathbf{x} 的距离。

采用 3 节点三角形单元对计算域边界进行离散, 在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中建立如图 1 所示的局部参考坐标系 $o\xi\eta$, 对单元 Γ_e 的几何坐标、位势以及热流进行插值, 单元 Γ_e 上场点 \mathbf{x} 的坐标 \mathbf{x}_i 可以表达为

$$\mathbf{x}_i(\xi, \eta) = N_m(\xi, \eta)\mathbf{x}_i^m, \quad i, m = 1, 2, 3, \tag{4}$$

式中形函数 N_m 为

$$N_m(\xi, \eta) = \frac{1}{2A}(a_m + b_m\xi + c_m\eta), \tag{5}$$

其中 A 为三角形单元面积, a_m, b_m, c_m 为常数, 由 3 节点局部坐标表示。

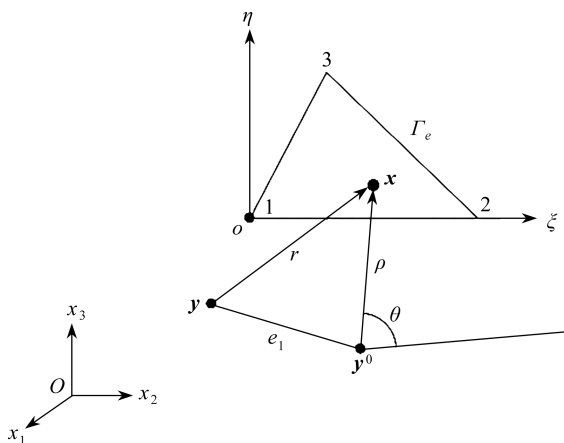


图 1 参考坐标系

Fig. 1 Reference coordinate systems

令源点 \mathbf{y} 在单元 Γ_e 上的垂足点为 \mathbf{y}^0 , \mathbf{y}^0 在 $Ox_1x_2x_3$ 中的坐标为 (y_1^0, y_2^0, y_3^0) , 在 $o\xi\eta$ 中的坐标为 (ξ_0, η_0) , 则源点 \mathbf{y} 到单元 Γ_e 的最短距离为 $d = |\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|$. 进一步在局部参考坐标系 $o\xi\eta$ 上建立以垂足 \mathbf{y}^0 为极点, 极轴平行于 $o\xi$ 轴的极坐标系 $\rho\theta$, 则有坐标转换关系

$$\xi - \xi_0 = \rho \cos \theta, \quad \eta - \eta_0 = \rho \sin \theta. \tag{6}$$

将式(6)代入式(4), 有

$$\mathbf{x}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \rho (b_m \cos \theta + c_m \sin \theta) \mathbf{x}_i^m + N_m(\xi_0, \eta_0) \mathbf{x}_i^m, \tag{7}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i = \frac{1}{2A} \rho (b_m \cos \theta + c_m \sin \theta) \mathbf{x}_i^m + N_m(\xi_0, \eta_0) \mathbf{x}_i^m - \mathbf{y}_i. \tag{8}$$

因此, 源点 \mathbf{y} 与场点 \mathbf{x} 之间的距离 r 可表示为

$$r = r_i r_i = \rho^2 + e_1^2, \tag{9}$$

式中

$$e_1^2 = [N_m(\xi_0, \eta_0) \mathbf{x}_i^m - \mathbf{y}_i][N_m(\xi_0, \eta_0) \mathbf{x}_i^m - \mathbf{y}_i]. \tag{10}$$

用边界单元离散后, 边界积分方程表达式(1)变为

$$C(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) = \sum_{e=1}^f \int_{\Gamma_e} (U^* q - Q^* u) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \tag{11}$$

式中 f 为边界单元总数, 让源点 \mathbf{y} 遍历所有边界节点, 则边界积分方程(11)转化为代数方程

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{B}, \tag{12}$$

其中 \mathbf{A} 为系数矩阵, \mathbf{z} 为未知量, \mathbf{B} 为已知量. 引入已知边界条件, 即可由方程 (12) 求得所有未知的边界节点位势 $u(\mathbf{x})$ 和热流 $q(\mathbf{x})$. 上述方程若采用直接法或迭代法求解, 如网格数量众多, 则系数矩阵 \mathbf{A} 需要极大的存储量, 计算量也快速增长.

这里的快速多极边界元法将式 (11) 中线性单元积分划分为两类: 远场单元积分和近场单元积分. 近场单元积分是指源点离单元较近的积分, 包含有奇异积分、几乎奇异积分和非奇异积分. 本文采用 Gauss 数值积分计算非奇异积分; 采用常位势场法计算奇异积分, 而对于几乎奇异积分采用半解析算法^[12], 具体过程如下.

将式 (8) 和式 (9) 代入式 (2)、(3), 离散后的积分形式为

$$I_n = \int_{\Gamma_e} \frac{Q_n(\rho, \theta)}{r^{n/2}} \rho d\rho d\theta, \quad n = 1, 3, 5. \quad (13)$$

随着式 (10) 中 e_1 的减小, 式 (13) 的积分产生几乎奇异性, 常规 Gauss 数值积分失效. 对式 (13) 的变量 ρ 做积分, 令

$$K_n(\rho, \theta) = \int \frac{Q_n(\rho, \theta)}{r^{n/2}} \rho d\rho = \int \frac{Q_n(\rho, \theta)}{r_i^n} \rho d\rho, \quad n = 1, 3, 5, \quad (14)$$

并对式 (14) 反复运用分部积分, 因 $Q_n(\rho, \theta)$ 为 ρ 的多项式, 在三维位势问题中, 于线性单元而言, 对 ρ 求导必有

$$Q_1''(\rho, \theta) = 0, \quad Q_3'''(\rho, \theta) = 0, \quad Q_5^{(4)}(\rho, \theta) = 0. \quad (15)$$

因此, 反复运用分部积分后, 式 (13) 转化为

$$I_n = \int_{\Gamma_e} [K_n(\rho, \theta)]_{\rho=0}^{\rho(\theta)} d\theta, \quad (16)$$

其中 $\rho(\theta)$ 由单元 Γ_e 的 3 个边的极坐标表达式决定. 式 (16) 已将式 (13) 的面积分转化成一列关于变量 θ 的线积分, 积分的几乎奇异性消失, 可利用常规 Gauss 数值积分计算.

对于远场单元积分, FMBEM 通过对基本解 (2) 和 (3) 进行双球谐函数展开, 用自适应树结构代替传统矩阵, 减少了计算量和存储量. 基本解 $U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 在球坐标系下的多极展开式^[13]为

$$U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi k r} \cong \frac{1}{4\pi k} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n S_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c) R_{n,m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c), \quad (17)$$

式中, \mathbf{y}_c 为展开中心点, p 为展开级数截断项数, $S_{n,m}$ 和 $R_{n,m}$ 称作球谐函数^[14]. 将式 (17) 代入式 (11) 积分 $\int_{\Gamma_e} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma$, 得到此积分的多极展开, 有

$$\int_{\Gamma_e} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma \cong \frac{1}{4\pi k} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n S_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c) M_{n,m}^U(\mathbf{y}_c), \quad (18)$$

其中 $M_{n,m}^U(\mathbf{y}_c)$ 为多极展开系数, 表达式为

$$M_{n,m}^U(\mathbf{y}_c) = \int_{\Gamma} R_{n,m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c) q(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (19)$$

将基本解 $Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 按同样方法展开, 有

$$\int_{\Gamma_e} Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\Gamma \cong \frac{1}{4\pi k} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n S_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c) M_{n,m}^Q(\mathbf{y}_c), \quad (20)$$

其中 $M_{n,m}^Q(\mathbf{y}_c)$ 为多极展开系数, 表达式为

$$M_{n,m}^Q(\mathbf{y}_c) = \int_{\Gamma} k \frac{\partial R_{n,m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c)}{\partial n} q(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (21)$$

由式 (18) — (21) 可以看出, 场点 \mathbf{x} 由中心点 \mathbf{y}_c 传递到源点 \mathbf{y} , 避免了每个源点都要对每个场点进行单独积分计算, 因此 FMBEM 在形成式 (12) 系数矩阵 \mathbf{A} 时大幅度减少了计算量.

目前 FMBEM 主要采用常值单元^[14], 因而没有几乎奇异积分计算的难题. 本文将三角形面单元几乎奇异积分处理技术^[15]与三维边界元快速算法结合, 创立了三维位势问题三角形线性面单元 FMBEM, 并研制了计

算程序.本文三角形线性面单元 FMBEM 算法显著提高了三维位势边界元法的计算精度和效率,能够胜任大规模三维薄体结构的热传导分析.

1.2 多介质传热模型 FMBEM 分析

采用三角形线性面单元 FMBEM 程序,分析图 2 所示双层圆筒壁结构的热传递问题. $r_1 = 8 \text{ mm}$, $r_2 = 10 \text{ mm}$, $r_3 = 11 \text{ mm}$,圆筒沿 Z 方向深 20 mm, Ω_1, Ω_2 两个区域的热导系数分别为 $9.93 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 和 $0.5 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$,圆筒最内侧壁面温度 $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$,最外侧壁面热流 $q = 21.33 \text{ W}/\text{m}^2$,其余表面绝热,热流 $q = 0 \text{ W}/\text{m}^2$.

对结构表面和界面按照三角形面单元进行离散,如图 3 所示,为做对比分析,分别给出了 3 种网格模型:
 ① 具有 10 327 个节点、20 864 个单元的稀疏网格模型;
 ② 具有 16 036 个节点、32 324 个单元的常规网格模型;
 ③ 具有 36 793 个节点、74 004 个单元的加密网格模型.

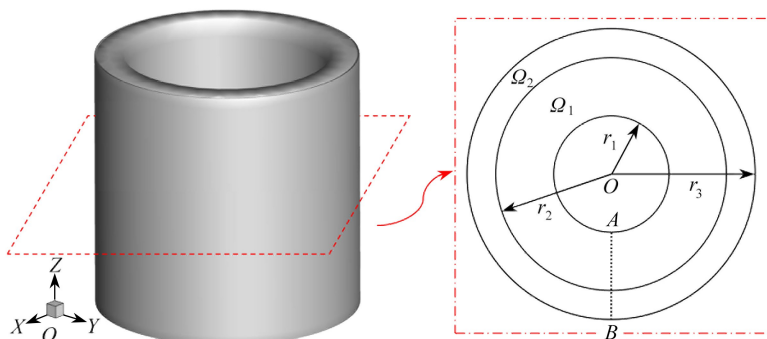


图 2 双层圆筒壁结构

Fig. 2 The double cylindrical wall structure

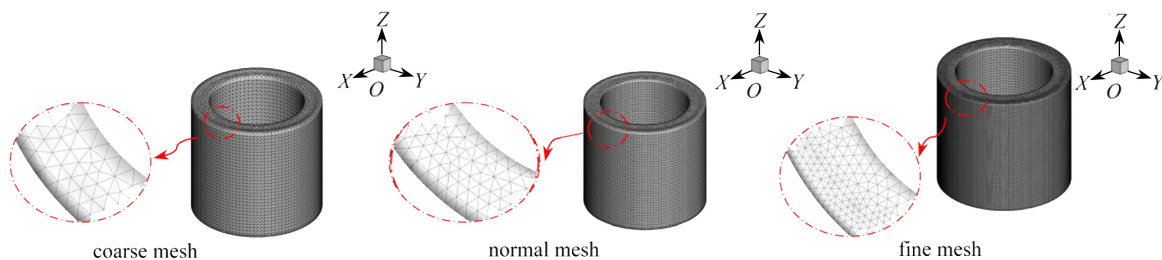


图 3 双层圆筒壁网格模型

Fig. 3 Double-layer cylindrical wall mesh models

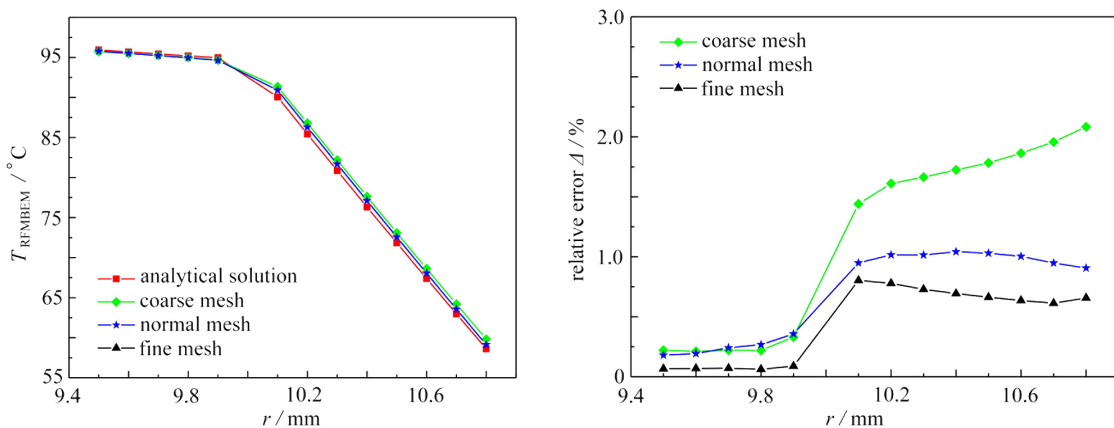


图 4 FMBEM 在 $Z = 10 \text{ mm}$ 处沿 AB 路径计算所得温度 T_{FMBEM} 及相对误差 Δ

Fig. 4 Temperature T_{FMBEM} and relative error Δ calculated with the FMBEM along the AB path at $Z = 10 \text{ mm}$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

图 4 给出深度 $Z = 10 \text{ mm}$ 位置,沿 AB 路径的 3 种网格模型通过 FMBEM 程序计算所得温度 T_{FMBEM} 以及

与解析解温度 T_a 的相对误差 Δ , 其中 r 为 AB 路径上的点到圆心的距离:

$$\Delta = \frac{|T_{\text{FMBEM}} - T_a|}{T_a} \times 100\%.$$

对稀疏网格模型, 本文算法计算得到的各点温度与解析解相比, 在 r 大于 9.9 mm 后相对误差 Δ 增大, 但不超过 2.1%; 对常规网格模型和加密网格模型, 本文算法的温度计算结果基本一致, 且与解析解的相对误差 Δ 不超过 1.05%. 计算结果表明本文算法计算三维热传导问题时, 采用常规网格即可获得较高的计算精度.

2 U型地埋管换热器的 FMBEM 分析

2.1 U型管计算假定及设计参数

地源热泵系统中, U型地埋管换热器和土壤之间的实际传热关系复杂, 现采用三角形面单元 FMBEM 程序计算其换热性能. 本文对地源热泵系统做以下假设:

- 1) 将土壤看成连续均匀的各向同性物质, 土壤的热物性在整个换热过程中保持不变.
- 2) 假设土壤地下温度保持恒定, 不受地面气温的影响^[16].
- 3) 水的热扩散率比土壤低 2~4 个数量级^[17], 因此在地埋管换热器的传热过程中, 忽略土壤中水分和溶质的转移, 即不考虑地下水渗流的影响.
- 4) 忽略管道内流体和地埋管管内壁之间的对流换热热阻, 假设管内壁温度为流体温度, 且温度沿管埋深线性变化. 在 U型管底部区域温度恒定, 为进水与出水温度的平均值.

计算模型中, 土壤区域和回填区域上表面均绝热, 热流 $q = 0 \text{ W/m}^2$, 其余设计参数如表 1 所示.

表 1 地埋管换热器设计参数

Table 1 The U-tube buried pipe design parameters

number	parameter name	value	unit
1	borehole depth	50	m
2	borehole radius	75	mm
3	U-tube pipe outer radius	16	mm
4	U-tube pipe inner radius	13	mm
5	shank spacing	100	mm
6	soil radius	1.5	m
7	U-tube (PE pipe) thermal conductivity	0.4	$\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$
8	fill material thermal conductivity	2.4	$\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$
9	ground thermal conductivity	2.0	$\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$
10	inlet water temperature in summer	35	$^\circ\text{C}$
11	outlet water temperature in summer	32	$^\circ\text{C}$
12	inlet water temperature in winter	7	$^\circ\text{C}$
13	outlet water temperature in winter	10	$^\circ\text{C}$
14	undisturbed ground temperature	18	$^\circ\text{C}$

在 U型地埋管换热器中, 管壁厚度远小于回填区域和土壤区域的尺寸, 一般计算方法难以考虑 U型管管壁厚度对换热的影响, 而边界元法具有降维特性, FMBEM 只需在结构表面和界面上划分网格, 特别适用于厚体和薄体区域的耦合问题. 在制冷和制热两种工况下, 本小节研究了不同的管壁厚度对单 U型地埋管换热量的影响. 取管外直径为 32 mm, 管材为聚乙烯, 导热系数为 $0.4 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, 其他计算参数如表 2 所示. U型地埋管的 FMBEM 计算模型见图 5, 共有 23 113 个节点和 46 256 个三角形面单元.

采用 FMBEM 计算得到各点的温度及热流密度. 然后根据 U型管内壁的热流计算地埋管换热器单位并深换热量:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^m S_i q_i}{L}, \quad (22)$$

其中 S_i 为 U 型管内壁上第 i 个三角形单元 Γ_i 的面积, q_i 为 FMBEM 计算所得单元 Γ_i 平均热流密度(三角形单元 3 个节点热流均值), m 为 U 型管内壁面所划分的单元总数, L 为地理管埋置深度。

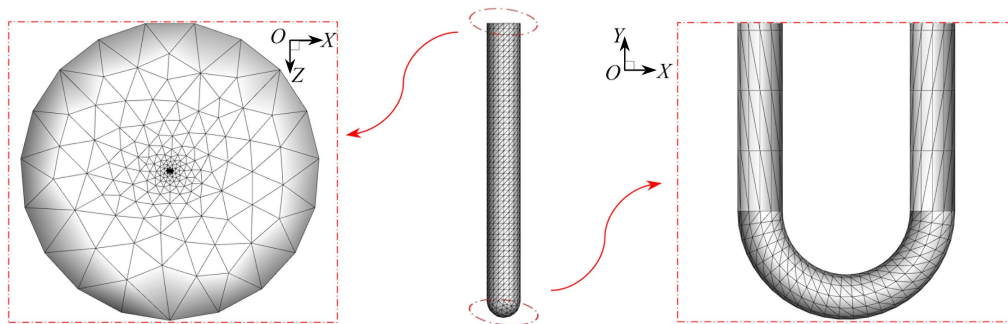


图 5 U 型管 FMBEM 网格模型
Fig. 5 The U-tube FMBEM mesh model

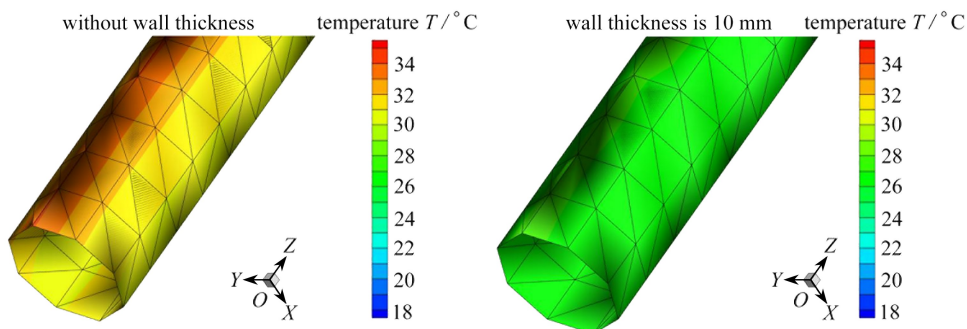
不同管壁厚度时,通过 FMBEM 程序计算得地理管单位井深换热量如表 2 所示,其中 Q_i, Q_o 分别为进、水管单位管长换热量, $Q = Q_i + Q_o$ 为单位井深换热量.由表 2 可知,随着管壁厚度增加,地理管单位井深换热量逐渐减小.制冷条件下,当管壁厚度为 10 mm 时,单位井深换热量为 28.944 W/m,与管壁厚度为 3 mm 时的单位井深换热量 41.381 W/m 相比,减小了 30.05%;与不考虑管壁厚度时的单位井深换热量 46.696 W/m 相比,减小了 38.02%.制热条件下,当管壁厚度为 10 mm 时,单位井深换热量为 17.739 W/m,与管壁厚度为 3 mm 时的单位井深换热量 25.361 W/m 相比,减小了 30.05%;与不考虑管壁厚度时的单位井深换热量 28.638 W/m 相比,减小了 38.06%。

按我国对地理管道外径及壁厚尺寸的规定^[18],当管外径小于 40 mm 时,壁厚应为 3 mm.由表 2 可知,制冷条件下,管壁厚度为 3 mm 时,单位井深换热量为 41.381 W/m,与不考虑管壁厚度时的单位井深换热量 46.696 W/m 相比,减小了 11.38%;制热条件下,当管壁厚度为 3 mm 时,单位井深换热量为 25.361 W/m,与不考虑管壁厚度时的单位井深换热量 28.638 W/m 相比,减小了 11.44%。

表 2 不同管壁厚度时地理管单位井深换热量(单位: W/m)

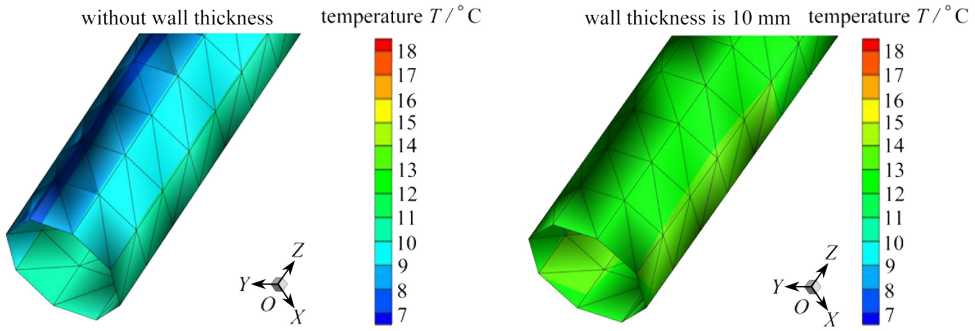
Table 2 Heat transfer fluxes of buried pipes with different wall thicknesses (unit: W/m)

wall thickness	cooling			heating		
	Q_i	Q_o	$Q = Q_i + Q_o$	Q_i	Q_o	$Q = Q_i + Q_o$
0	-29.466	-17.230	-46.696	20.433	8.205	28.638
3	-28.081	-13.300	-41.381	20.061	5.300	25.361
6	-21.922	-15.910	-37.832	14.640	8.548	23.188
8	-18.118	-14.471	-32.589	11.826	8.147	19.973
10	-15.927	-13.017	-28.944	10.332	7.407	17.739



(a) 制冷工况时 FMBEM 计算结果温度分布图

(a) Calculation results of temperature during cooling



(b) 制热工况时 FMBEM 计算结果温度分布图

(b) Calculation results of temperature during heating

图 6 不同管壁厚度时 FMBEM 计算温度分布图

Fig. 6 FMBEM calculated temperature distribution diagrams for different tube wall thicknesses

为反映管壁厚度对换热的影响,图 6 分别给出制冷、制热两种工况下,不考虑管壁厚度和管壁厚度为 10 mm 时,地埋管回填土壤区域在底部边界的温度分布局部图,由图 6 可知,当管壁导热系数小于土壤和回填材料的导热系数时,管壁热阻是阻碍地埋管换热的主要因素之一,讨论地埋管换热器的换热量时,不应忽略管壁厚度对其产生的影响,否则会造成较大误差。当管壁导热系数一定时,管壁越厚,对管内流体和土壤之间的换热影响越大,计算时考虑管壁厚度产生的影响,会得到更符合工程实际的结果。当管壁导热系数小于土壤导热系数时,在保证 U 型管结构强度满足要求的前提下,管壁应尽量薄,以减小其热阻对地埋管换热器产生的负面影响。

2.2 多孔管群换热器的 FMBEM 分析

在工程应用中,地源热泵地埋管换热器系统通常都是以多管井即管群的形式出现。由于各埋管之间存在热相互作用,因此管群的换热特性与单 U 型地埋管相比有明显区别,单 U 管的结论不能直接应用于大型管群换热分析。本文采用 FMBEM 对地埋管换热器管群系统进行分析,讨论管群之间的热干扰现象。

考虑 4(横向)×4(纵向)等间距排列管群在不同工况下的运行情况,利用对称性取 1/4 结构,以分析含 16 个管井的 U 型管群换热性能。取土壤半径为 15 m,土壤区域内分布有 4 组 U 型管井,各管井中心间距为 5 m,井深 50 m。模型坐标原点位于对称中心,靠近坐标原点的管井,其中心距两坐标轴均为 2.5 m,为①号管井。②号管井坐标位于(-7.5 m, 2.5 m),③号管井位于(-2.5 m, 7.5 m),④号管井位于(-7.5 m, 7.5 m)。

本例中钻孔区域内部采用原土回填,即土壤和回填土的导热系数均为 $2.0 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 。U 型管外径 32 mm,管壁厚 3 mm,两管腿中心间距 50 mm。利用三角形面单元对结构表面和界面进行离散,共生成 58 785 个节点,117 670 个单元,如图 7 所示。土壤上表面与对称面绝热,外表面温度 18°C ,其余计算参数如表 2 所示。利用 FMBEM 程序计算得制冷、制热两种工况下各管井单位井深换热量,如表 3 所示。其中 Q_i, Q_o 分别为进、出水管单位管长换热量, $Q = Q_i + Q_o$ 为单位井深换热量。

由于此管群模型有 16 个管井,呈对称形式,因此将管井分为 3 类,中心的 4 个管称为中井,离中心最远位置的 4 个管称为角井,除了角井之外的四周的管称为边井。

表 3 壁厚 3 mm 时 4×4 管群单位井深换热量(单位: W/m)Table 3 Heat transfer fluxes of 4×4 pipe groups for a wall thickness of 3 mm (unit: W/m)

heat exchange	cooling				heating			
	tube of No.①	tube of No.②	tube of No.③	tube of No.④	tube of No.①	tube of No.②	tube of No.③	tube of No.④
Q_i	-7.901	-10.999	-11.640	-14.856	6.055	8.218	8.390	10.352
Q_o	-1.530	-5.077	-5.637	-8.999	0.379	1.822	2.216	4.275
$Q = Q_i + Q_o$	-9.431	-16.076	-17.277	-23.855	6.434	10.040	10.606	14.627

由表 3 可知,对于 4×4 地埋管管群,制冷工况下,中井单位井深换热量为 $9.431 \text{ W}/\text{m}$,与角井的单位井深换热量 $23.855 \text{ W}/\text{m}$ 相比,减少了 60.47%;制热工况下,中井单位井深换热量为 $6.434 \text{ W}/\text{m}$,与角井的单位井深换热量 $14.627 \text{ W}/\text{m}$ 相比,减少了 55.78%。边井与角井相比,单位井深换热量在制冷工况下分别减少

了 32.61% 和 27.57%, 在制热工况下分别减少了 31.36% 和 27.49%。中井位于土壤中心, 周围存在的其他管井同土壤的换热导致土壤中心区域温度变化, 减小了中井内流体与其周围土壤的温差, 降低了中井的换热效率。图 8 给出了 4×4 管群在制冷、制热两种工况下的温度云图, 由温度云图可以看出, 在两种工况下, 角井内流体与周围土壤的温差均大于中井。因此, 管井与管井之间产生了热量的互相干扰, 周围管井对中心管井产生的热干扰阻碍了中心管井沿径向传热。因角井周围毗邻无限大土壤区域, 热扩散条件优于其他区域管井, 受到的热干扰影响最小; 边井附近除了无限大土壤区域, 还受到角井和中井的影响, 热扩散条件较差, 导致其换热量下降; 中井被其他管井所包围, 换热量最低, 在夏季工况下只有角井换热量的 39.53%, 冬季工况也仅达到了角井换热量的 44.22%。

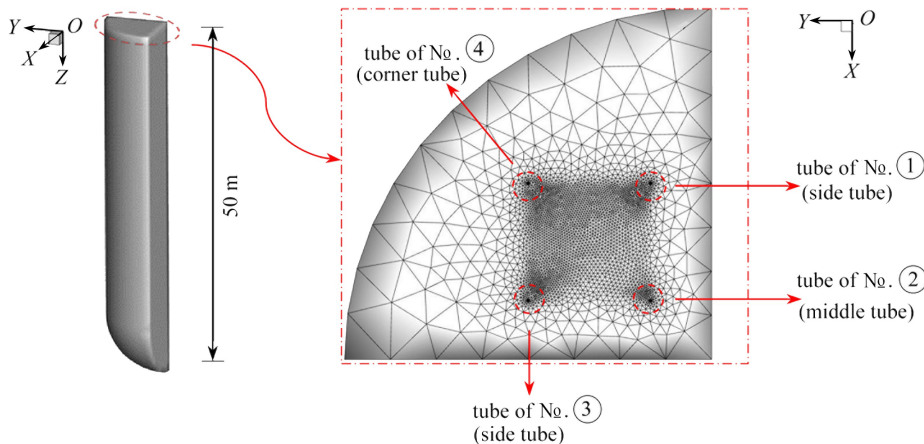
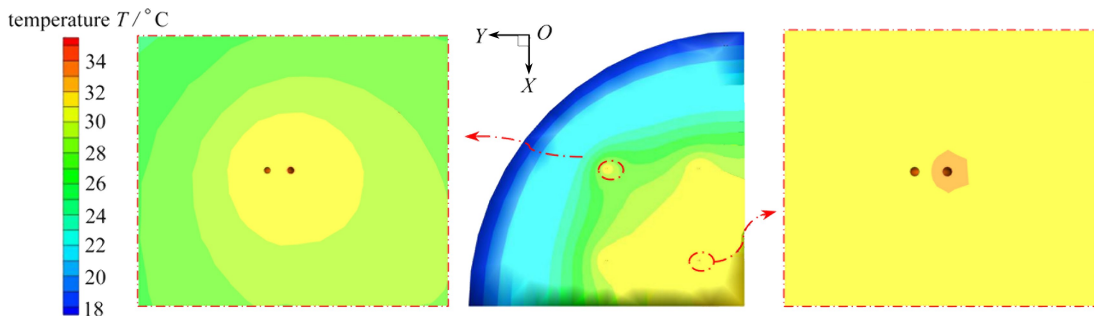


图 7 4×4 管群 FMBEM 单元模型

Fig. 7 The 4×4 pipe system's FMBEM model

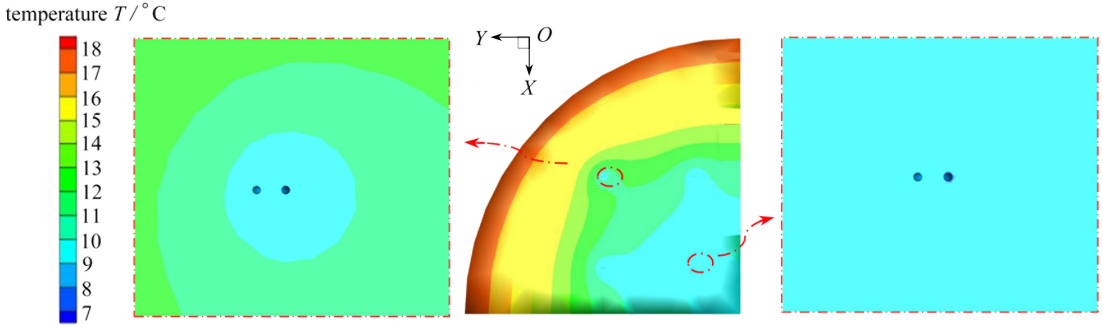
为直观地比较管群间的热相互影响, 图 9 给出了在制冷、制热两种工况下, 单 U 型埋管与①至④号管井及 4×4 管群单位井深换热量的对比。由图 9 可知, 制冷工况下, 与单 U 型埋管单位井深换热量 40.607 W/m 相比, 4×4 管群的单位井深换热量为 266.556 W/m, 提高了 556.43%; 制热工况下, 与单 U 型埋管单位井深换热量 24.883 W/m 相比, 4×4 管群的单位井深换热量为 166.828 W/m, 提高了 570.99%。中井在制冷工况下的单位井深换热量为 9.431 W/m, 相较于单 U 型埋管换热量降低了 76.77%; 在制热工况下的单位井深换热量为 6.434 W/m, 相较于单 U 型埋管换热量降低了 74.01%。角井在制冷工况下的单位井深换热量为 23.855 W/m, 比单 U 管换热量降低了 41.25%, 制热工况下的单位井深换热量为 14.627 W/m, 比单 U 管换热量降低了 41.22%。

由此可见, 对于埋管管群而言, 周边区域埋管的热扩散条件显著优于中心区域埋管, 在管内流体温度相同时, 周边区域埋管承担了较大的换热负荷。中心区域埋管受到周边区域埋管热干扰的影响较大, 导致土壤中心区域埋管换热器换热效率低下。



(a) 制冷工况时 FMBEM 计算结果温度分布图

(a) The FMBEM calculation results of temperature during cooling



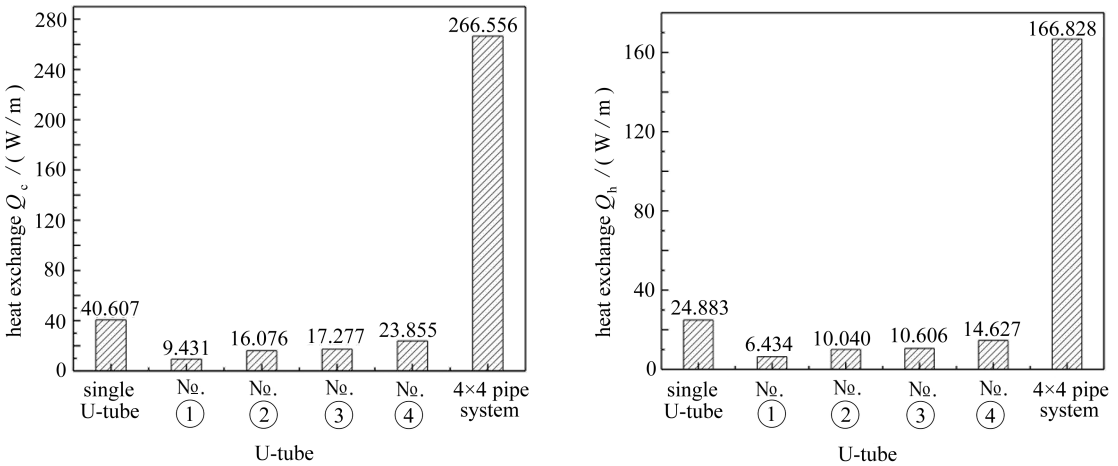
(b) 制热工况时 FMBEM 计算结果温度分布图

(b) The FMBEM calculation results of temperature during heating

图 8 4x4 管群 FMBEM 计算温度分布图

Fig. 8 The 4x4 pipe system's FMBEM calculated temperature distribution diagrams

为研究管壁厚度对管群换热量的影响,表 4 给出了 4x4 管群在不考虑壁厚时换热量的计算结果,其中管径为 32 mm.表 4 结果表明,制冷工况下,不考虑壁厚时 4x4 管群总换热量为 289.016 W/m,与壁厚 3 mm 时 4x4 管群总换热量 266.556 W/m 相比,提高了 8.43%;制热工况下,不考虑壁厚时 4x4 管群总换热量为 193.060 W/m,与壁厚 3 mm 时 4x4 管群总换热量 166.828 W/m 相比,提高了 15.72%.因此,对管群进行模拟计算时,考虑管壁热阻十分必要.若忽略管壁热阻产生的影响,会造成较大的计算误差.表 3、4 对比表明,换热量增加主要是由于中井和角井的贡献.因此,于管群而言,提高换热量的主要措施在于降低埋管之间的热相互作用,同时减少中井和角井的管壁厚度.



(a) 制冷工况下换热量对比图

(b) 制热工况下换热量对比图

(a) Heat exchanges during cooling

(b) Heat exchanges during heating

图 9 4x4 埋管群单位井深换热量对比

Fig. 9 Comparison of heat transfer fluxes of 4x4 buried pipe groups

表 4 不考虑壁厚时 4x4 管群单位井深换热量(单位: W/m)

Table 4 Heat transfer fluxes of 4x4 pipe groups regardless of the wall thickness (unit: W/m)

heat exchange	cooling				heating			
	tube of No.①	tube of No.②	tube of No.③	tube of No.④	tube of No.①	tube of No.②	tube of No.③	tube of No.④
Q_i	-9.768	-14.009	-13.776	-17.944	7.966	10.579	10.447	13.002
Q_o	-0.519	-3.829	-4.128	-8.281	2.320	0.337	0.535	3.079
$Q = Q_i + Q_o$	-10.287	-17.838	-17.904	-26.225	10.286	10.916	10.982	16.081

3 结 论

本文基于线性单元,克服单元跨叶子积分难题,针对边界元法在奇点附近区域因存在奇异积分而产生的误差,将三维位势问题快速多极边界元法与几乎奇异积分的半解析算法相结合,创立了一种精确高效的快速多极边界元新算法,使得边界元法能够有效分析大规模三维薄体结构热传导问题.应用本文算法对考虑了管壁厚度的地理管换热器三维模型进行计算,分析讨论了单 U 型地理管换热器和管群换热器的传热性能.所得结论如下:

- 1) 管群中,管与管之间产生的热干扰会阻碍热量的传递,导致中心区域管井换热效率低下,且管群规模越大,管与管之间热干扰现象越强烈,提高管群换热量的主要措施是降低热干扰的同时减少壁厚.
- 2) 管壁的厚度是影响地理管换热效率的主要因素之一.在讨论地理管换热器的换热量时,对管壁的影响因素加以考虑,方可得到更符合工程实际的结果.
- 3) 本文中对曲面结构表面采用平面单元进行网格划分,若采用曲面单元划分网格,则有可能进一步减小问题的自由度,同时提高计算精度.

参考文献(References):

- [1] GUAN Y L, ZHAO X L, WANG G J. 3D dynamic numerical programming and calculation of vertical buried tube heat exchanger performance of ground source heat pumps under coupled heat transfer inside and outside of tube[J]. *Energy & Buildings*, 2017, **139**: 186-196.
- [2] KERME E D, FUNG A S. Transient heat transfer simulation, analysis and thermal performance study of double U-tube borehole heat exchanger based on numerical heat transfer model[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2020, **173**: 115189.
- [3] 贺泽群, 于明志, 毛煜东. 基于负荷自适应分配的地理管换热器传热分析[J]. 工程热物理学报, 2020, **41**(8): 2044-2051. (HE Zequn, YU Mingzhi, MAO Yudong. Heat transfer analysis of ground heat exchanger based on self adaption load distribution method[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2020, **41**(8): 2044-2051. (in Chinese))
- [4] 张荻, 郭帅, 谢永慧. 基于球窝结构冷却通道的强化传热数值及实验研究[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(3): 254-263. (ZHANG Di, GUO Shuai, XIE Yonghui. Numerical and experimental study of heat transfer enhancement based on the structure of cooling channels with dimples[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(3): 254-263. (in Chinese))
- [5] 朱利媛, 牛忠荣, 胡宗军. 地源热泵地理管换热性能的边界元法分析[J]. 太阳能学报, 2015, **36**(4): 936-942. (ZHU Liyuan, NIU Zhongrong, HU Zongjun. Boundary element analysis of heat transfer of buried pipes in GSHP[J]. *Acta Energetica Solaris Sinica*, 2015, **36**(4): 936-942. (in Chinese))
- [6] LEI X B, ZHENG X H, DUAN C Y. Three dimensional numerical simulation of geothermal field of buried pipe group coupled with heat and permeable groundwater[J]. *Energies*, 2019, **12**(19): 3698.
- [7] 李聪, 胡斌, 胡宗军, 等. 二维正交各向异性位势问题的高阶单元快速多极边界元法[J]. 力学学报, 2021, **53**(4): 1038-1048. (LI Cong, HU Bin, HU Zongjun, et al. Analysis of 2D orthotropic potential problems using fast multipole boundary element method with higher order elements[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, **53**(4): 1038-1048. (in Chinese))
- [8] 徐刚, 陈静, 王树齐, 等. 无奇异边界元法精度分析[J]. 上海交通大学学报, 2018, **52**(7): 867-872. (XU Gang, CHEN Jing, WANG Shuqi, et al. The numerical accuracy of the desingularized boundary integral equation method[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2018, **52**(7): 867-872. (in Chinese))
- [9] 刘静, 姚齐水, 杨文, 等. 边界元近奇异积分计算的迭代 sinh-sigmoidal 组合式变换法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(4): 385-393. (LIU Jing, YAO Qishui, YANG Wen, et al. An iterated sinh-sigmoidal combined transformation method for calculating nearly singular integrals of boundary elements[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(4): 385-393. (in Chinese))
- [10] 侯俊剑, 郭壮志, 钟玉东, 等. 一种基于新型插值单元的稳态传热边界元法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**

- (11): 1169-1176. (HOU Junjian, GUO Zhuangzhi, ZHONG Yudong, et al. A boundary element method for steady-state heat transfer problems based on a novel type of interpolation elements[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(11): 1169-1176. (in Chinese))
- [11] 胡宗军, 牛忠荣, 程长征, 等. 薄体结构温度场的高阶边界元分析[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(2):149-158. (HU Zongjun, NIU Zhongrong, CHENG Changzheng, et al. High-order boundary element analysis of temperature fields in thin-walled structures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(2):149-158. (in Chinese))
- [12] HU Z J, NIU Z R, CHENG C Z. A new semi-analytic algorithm of nearly singular integrals on higher order element in 3D potential BEM[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2016, **63**: 30-39.
- [13] 姚振汉, 王海涛. 边界元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010; 21-22. (YAO Zhenhan, WANG Haitao. *Boundary Element Method*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010; 21-22. (in Chinese))
- [14] YOSHIDA K I. Applications of fast multipole method to boundary integral equation method[D]. Kyoto: Kyoto University, 2001.
- [15] HU B, HU Z J, LI C. A fast multipole boundary element method based on higher order elements for analyzing 2-D potential problems[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2021, **87**: 65-76.
- [16] 章熙民. 传热学[M]. 3版. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993; 40-42. (ZHANG Ximin. *Heat Transfer*[M]. 3rd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 1993;40-42. (in Chinese))
- [17] 王恩琦, 赵强, 张方方. 基于动态负荷下的地埋管钻孔壁温度简化计算方法[J]. 建筑科学, 2012, **28**(12): 100-103. (WANG Enqi, ZHAO Qiang, ZHANG Fangfang. Simplified calculation method of thermal performance of borehole heat exchanger based on dynamic load[J]. *Building Science*, 2012, **28**(12): 100-103. (in Chinese))
- [18] 中华人民共和国建设部, 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局. 地源热泵系统工程技术规范: GB 50336—2005[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005. (Ministry of Construction of the People's Republic of China, General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of the People's Republic of China. Ground source heat pump system engineering technical specification: GB 50336—2005[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005. (in Chinese))