

异质分数阶非线性多智能体系统的预设时间一致性*

龚 平

(广东外语外贸大学 数学与统计学院, 广州 510006)

摘要: 该文研究了一类异质分数阶非线性多智能体系统的预设时间一致性问题. 设计了一类基于时变函数的预设时间分数阶积分控制器, 将分数阶非线性多智能体系统转化为一阶非线性多智能体系统. 然后综合利用整数阶 Lyapunov 函数法和预设时间控制技术, 分别实现了具有连通无向图和具有含生成树有向图的多智能体系统的精确预设时间一致性控制. 该预设时间可以通过时变函数预先设定, 且不依赖于系统初始值和参数. 最后, 用实例验证了理论结果的有效性.

关键词: 分数阶多智能体系统; 一致性问题; 预设时间; 异质非线性动态

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430223

Preset-Time Consensus of Heterogeneous Fractional-Order Nonlinear Multi-Agent Systems

GONG Ping

(School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510006, P.R.China)

Abstract: The preset-time consensus problem of a class of heterogeneous fractional-order nonlinear multi-agent systems was studied. A type of time-varying function-based preset-time fractional integral controllers were designed, to convert the fractional-order nonlinear multi-agent system into a 1st-order nonlinear multi-agent system. Then, by means of the integer-order Lyapunov function method combined with the preset-time control technology, the accurate bipartite consensus control of multi-agent systems with the connected undirected graph and the directed graph containing spanning trees was realized, respectively. The preset time can be preset with the time-varying function, independent of system initial values and parameters. An example verifies the effectiveness of the theoretical results.

Key words: fractional-order multi-agent system; consensus problem; preset time; heterogeneous nonlinear dynamics

0 引 言

近年来, 基于多智能体系统的分布式协同控制方法被应用于移动机器人^[1]、无人机^[2]、分布式传感器网络^[3]和交通运输系统^[4]等不同应用领域. 这种控制方法的广泛应用是因为其克服了集中控制体系结构的某

* 收稿日期: 2022-07-04; 修订日期: 2022-08-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(62003142); 广东省基础与应用基础研究基金项目(2020A1515110965)

作者简介: 龚平(1987—), 男, 讲师, 博士(E-mail: gongping@gdufs.edu.cn).

引用格式: 龚平. 异质分数阶非线性多智能体系统的预设时间一致性[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 605-618.

些能力的限制,如设备和传感器的空间分布,短距离通信和计算负担^[5].分布式一致性问题^[6-7]作为分布式协同控制的一个基本问题和热点问题,它要求每个智能体仅使用或获得有限局部信息,使得所有智能体的状态在任意初始条件下达成一致.文献[8-9]对多智能体系统一致性问题进行了综述,从中可知多智能体系统的分布式一致性问题研究成果丰富,但也存在一些未解决的问题.

分数阶微积分是传统整数阶微积分的扩展,它为描述各种材料和过程的记忆和遗传特性提供了一个极好的工具.近几十年来,分数阶微积分引起广泛关注并被应用于信号学、黏弹性理论、流体力学、计算机网络、电路和控制理论等领域^[10-11].分数阶微积分数学模型的应用可以提高对实际动态系统的表征、设计以及控制能力,分数阶微积分在控制领域的应用成为一个研究热点.根据智能体工作环境的复杂性,许多自然现象的动力学特性不能应用整数阶方程描述,更适合用分数阶(非整数阶)动力学的智能个体合作行为来解释.例如在有大量微生物和黏性物质的海底工作的水下机器人和在复杂太空环境运行的无人驾驶飞行器等^[12].基于此,分数阶多智能体系统分布式一致性问题研究已经得到了相当多的关注,如无领导者的分布式一致性问题^[13-17]和有一个领导者的分布式一致性跟踪问题^[18-22].

收敛速率是多智能体系统一致性算法设计的一个重要性能指标.存在的一致性算法大多是渐近收敛算法^[8],这意味着智能体状态只能在无限时间内趋于一致.若需要及时完成某项控制任务,渐近收敛算法显然无法满足需求,这就需要设计有限时间内收敛的算法.针对分数阶多智能体系统,文献[16,21]设计了含分数次幂的有限时间收敛算法,并得到了依赖于系统参数和初始值的算法收敛时间上确界估计.有限时间收敛算法通过调节系统参数可以满足某一有限收敛时间的要求.基于固定时间稳定性理论^[9,23],文献[24-30]针对不同阶数动态的多智能体系统设计了含分数次幂的固定时间一致性算法,并得到了仅依赖系统参数的算法收敛时间上确界估计.值得注意的是,固定时间控制算法和有限时间控制算法一样,只能得到依赖于系统参数的收敛时间上确界估计,因此具有保守性.另一方面,为了减小收敛时间估计值往往需要增加控制参数值,从而需要更大的控制能量或成本.为了实现不依赖于任何系统参数和初始值的收敛时间,文献[31-32]分别针对高阶单积分系统和二阶线性多智能体系统发展了基于时变函数的预设时间控制方法.此外,文献[33]针对一阶线性多智能体系统提出了一种基于时变函数的预先指定有限时间控制算法,实现了智能体在无需依赖系统参数和初值的指定有限时间达到一致.进一步地,文献[34]研究了具有饱和执行器的多智能体系统的指定时间一致性跟踪问题.我们注意到,已有的预设(或指定)时间控制方法要求所有智能体都具有线性或同质动态,但通常异质非线性动态广泛存在于现实场景^[21].此外,由于传感器的感知范围不均匀,智能体之间的通信拓扑通常由非对称有向图而不是对称无向图来描述^[20].基于预设(或指定)时间控制方法的已有研究成果大多基于无向拓扑下的线性动态多智能体系统,具有较大局限性.据笔者所知,目前还没有文献考虑具有异质非线性动态和有向拓扑的多智能体系统的预设时间一致性问题,虽然异质非线性动态和有向拓扑都增加了问题的研究难度,但更符合实际工程应用背景,具有重要而广泛的工程应用价值.

基于以上观察,本文研究了一类异质分数阶非线性多智能体系统在连通无向图和含生成树有向图情况下的预设时间一致性问题.一个主要问题是一些用于同质线性多智能体系统框架的工具不能用于异质非线性多智能体系统框架;此外,异质分数阶非线性多智能体系统的复杂性与有向网络图的非对称性和局部性,都增加了解决本文研究问题的难度.为了处理具有复杂动态的异质分数阶非线性多智能体系统,在控制器的设计中同时引入了具有分数阶动态的滤波变量,一类非负时变函数和符号函数,将异质分数阶非线性多智能体系统在某个预设时刻转化成了易处理的一阶线性多智能体系统.通过矩阵变换方法来处理含生成树有向图中非对称的 Laplace 矩阵.

本文的主要贡献如下:1)与文献[16,21,24-30]中设计的含分数次幂的有限时间或固定时间控制算法比较,本文设计的预设时间控制算法设计简单,控制成本低,收敛时间可以预先指定且不依赖于系统参数和初值.此外,文献[24-25,27-29]中仅考虑无向图,而本文考虑了含生成树的有向图.2)已有的预设时间一致性问题成果仅限于具有整数阶动态的多智能体系统,本文考虑了具有异质分数阶非线性动态的多智能体系统.本文将已有的预设时间一致性问题研究成果推广到更一般的,具有异质分数阶非线性动态的多智能体系统,丰富和发展了多智能体系统分布式协同控制理论和方法.

1 预备知识

本节将给出符号说明、分数阶算子、符号图论和一些引理等预备知识.

1.1 符号说明

一些符号说明如下: $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 实矩阵, \mathbb{R}^n 表示 n 维 Euclid 空间, $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ 表示对角项为 a_1 到 a_n 的对角矩阵, $\|\cdot\|_1$ 表示 1-范数, $\mathbf{b}_n = [b, \dots, b]^T$ 表示每一项都为 b 的 n 维列向量, $\|\cdot\|$ 表示 2-范数或 Euclid 范数, $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 单位矩阵, \otimes 表示 Kronecker 乘积, $\text{sgn}(\mathbf{x}) = [\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \dots, \text{sgn}(x_n)]^T$, 其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数.

1.2 分数阶算子

定义 1、定义 2 和引理 1 如下, 可参见文献[11].

定义 1 函数 $f(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ 的 α 阶积分为

$$I^\alpha f(t) = I^\alpha [f(\cdot)](t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau,$$

其中 $0 < \alpha \leq 1, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ 为 Gamma 函数.

定义 2 函数 $f(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ 的 Caputo 分数阶(α 阶, $0 < \alpha \leq 1$) 导数为

$$D^\alpha f(t) = I^{1-\alpha} [\dot{f}(t)] = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \dot{f}(\tau) d\tau.$$

引理 1 当 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $f(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ 时, 有 $D^\alpha [D^{1-\alpha} f(t)] = \dot{f}(t)$ 和 $D^\alpha [I^\alpha f(t)] = f(t)$.

1.3 代数图理论

令 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 为 N 个智能体组成的一个加权网络拓扑图, 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ 和 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 分别表示节点和有向边的集合, $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{N \times N}$ 表示一个邻接矩阵, 其权重 $a_{ij} \neq 0$ 当且仅当 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$, 即节点 v_j 是节点 v_i 的邻居, 否则 $a_{ij} = 0$, 且令 $a_{ii} = 0, i \in \{1, 2, \dots, N\}$. 图 \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}]_{N \times N}, l_{ii} = \sum_{k=1}^N |a_{ik}|, l_{ij} = -a_{ij}$ 当 $i \neq j$. 如果 $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, 则图 \mathcal{G} 是无向图. 如果图 \mathcal{G} 中任意一个节点都有一条路径到达其他任意节点, 则图 \mathcal{G} 是连通的. 如果存在一条从一个节点(记为根节点)到其他节点的有向路径, 则称图 \mathcal{G} 为包含一条有向生成树的有向图.

1.4 重要引理

引理 2^[33] 令 $h(t, T) \in \mathbb{R}$ 为一个非负时变函数, 如果存在一个常数 $\gamma > 0$ 使得

$$\dot{V}(t) = - \left(\gamma + 2 \frac{\dot{h}(t, T)}{h(t, T)} \right) V(t), \quad 0 \leq t < T,$$

其中

$$h(t, T) = \begin{cases} \left(\frac{T}{T-t} \right)^m, & 0 \leq t < T, \\ 1, & t \geq T, \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{h}(t, T) = \begin{cases} \frac{m}{T} (h(t, T))^{1+1/m}, & 0 \leq t < T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \tag{2}$$

$m > 2$ 为一个实数, $T > 0$ 为预设时刻. 则当 $t \geq T$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow T^-} V(t) = 0$ 和 $V(t) \equiv 0$, 这意味着 $V(t)$ 的原点是全局预设时间稳定. 此外

$$V(t) \leq \frac{e^{-\gamma t}}{(h(t, T))^2} V(0), \quad 0 \leq t < T. \tag{3}$$

引理 3^[35] 如果图 \mathcal{G} 为包含有向生成树的有向图, \mathcal{L} 为图 \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}, \quad (4)$$

则存在某个全列矩阵 $M \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 和某个正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 使得 $\mathcal{L} = ME$ 和

$$QEM + (QEM)^T > \delta Q$$

成立,其中 $0 < \delta < 2\min_{i \in \{1,2,\dots,N-1\}} \operatorname{Re}(\lambda_i(EM)), \operatorname{Re}(\lambda_i(EM))$ 表示矩阵 EM 的第 i 个特征值的实部。

2 系统模型和问题描述

考虑由 N 个智能体组成一个多智能体系统.令 \mathcal{G} 为 N 个智能体之间的网络拓扑图.考虑如下异质分数阶非线性多智能体系统的预设时间一致性问题:

$$D^\alpha \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (5)$$

其中 $D^\alpha \mathbf{x}_i(t) = [D^\alpha x_{i1}(t), D^\alpha x_{i2}(t), \dots, D^\alpha x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_i(t)$ 和 $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示智能体 i 的状态和控制输入,异质非线性函数 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) \in \mathbb{R}^n$ 表示智能体 i 的异质非线性动态或异质时变扰动。

定义 3(预设时间一致性^[32-33]) 异质分数阶非线性多智能体系统(5)达到预设时间一致性,如果对于任意的初始状态 $\mathbf{x}_i(0)$ 都有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0, \\ \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_j(t), \quad t > T, \quad \forall i, j \in \mathcal{I} \end{cases} \quad (6)$$

成立,其中 $T > 0$ 为一个预先设定的时间点或时刻。

本文要解决的问题是:为每个智能体 $i \in \mathcal{I}$ 设计一个分布式控制器 \mathbf{u}_i , 使得异质分数阶非线性多智能体系统(5)达到预设时间一致性,即实现控制目标(6)。

下文中,为了简便将省去 (t) ,如将 $\mathbf{x}_i(t)$ 简写为 \mathbf{x}_i 等。

3 主要结论

在本节中,通过设计基于时变函数的预设时间一致性算法,先解决分数阶非线性多智能体系统在连通无向图情况下的预设时间一致性问题,然后把上述结论拓展到含生成树的有向图情况。

3.1 连通无向网络图的预设时间一致性

本小节研究异质分数阶非线性多智能体系统(5)的网络拓扑图和异质非线性函数满足如下假设。

假设 1^[33] 网络拓扑图 \mathcal{G} 为连通的无向图。

假设 2^[13] 存在某些非负常数 \bar{f}_i ,使得异质非线性函数满足 $\|\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)\| \leq \bar{f}_i, \forall i \in \mathcal{I}$ 。

注 1 假设 1 中连通无向图的假设条件在无向网络中是一个基本的假设条件,如文献[33];此外,在下一小节中,考虑了更一般的含生成树有向图情况,进一步弱化了条件假设 1.本文中为了保证控制输入信号全局有界,假设异质非线性函数 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$ 满足假设 2,当 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$ 有界时显然满足假设 2,存在很多有界函数 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$,如 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) = (a_i \arctan(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i)^3$,其中 a_i 为常数; $\mathbf{g}_i = [g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}]^T \in \mathbb{R}^n, g_{ik}$ 为 $\cos(t), e^{i-t} \sin(t), (i+t)^{-2}$ 或 $i^2 \tanh(t)$ 等有界的时变函数, $k = 1, 2, \dots, n$.注意到,当 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$ 表示异质时变扰动时,其有界性假设是一个常见的假设条件,见文献[32]。

当假设 1 成立时,则图 \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵 \mathcal{L} 对称,且对称的 Laplace 矩阵 \mathcal{L} 有 N 个特征值 λ_i 满足 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, 详见文献[6]。

首先,引入两类滤波变量 \mathbf{y}_i 和 \mathbf{z}_i 分别满足如下分数阶微分方程:

$$D^{1-\alpha} \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i, \quad (7)$$

$$D^\alpha \mathbf{z}_i = \mathbf{u}_i^*, \quad i \in \mathcal{I}, \quad (8)$$

其中 \mathbf{u}_i^* 为需要设计的虚拟控制器。

令

$$e_{x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j), \quad i \in \mathcal{I}. \tag{9}$$

若图 \mathcal{G} 为连通的无向图, 考虑如下基于时变函数的预设时间分布式一致性控制算法 ($i \in \mathcal{I}$):

$$u_i = u_i^* - \left(\gamma_1 + \frac{\dot{h}(t, T_1)}{h(t, T_1)} \right) y_i - \beta_i \text{sgn}(y_i), \tag{10}$$

其中 $\beta_i \geq \bar{f}_i$, 虚拟控制器设计为

$$\begin{cases} u_i^* = I^{1-\alpha} v_i, \\ v_i = - \left(\gamma_2 + b \frac{\dot{h}(t, T_2)}{h(t, T_2)} \right) e_{x_i}, \end{cases} \tag{11}$$

$\gamma_j > 0, j = 1, 2, b \geq 1/\lambda_2$, 时变函数 $h(t, T_j)$ 和 e_{x_i} 分别由式(1)和(9)定义, $T_2 > T_1 > 0$ 为预先设定时间点(时刻).

注 2 实际上, 由引理 2 中定义的非负时变函数 $h(t, T)$ 可知

$$g(t, T) = \frac{\dot{h}(t, T)}{h(t, T)} = \begin{cases} \frac{m}{T-t}, & 0 \leq t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \tag{12}$$

注 3 为了更清楚地显示控制器(10)的设计流程, 图 1 给出了闭环分数阶多智能体系统的框架. 从图 1 或控制器(10)中可以看出, 控制器(10) 使用了滤波变量 y_i 和局部状态变量 $e_{x_i} (i \in \mathcal{I})$, 因此所设计的控制器(10)是分布式的. 分布式控制器(10)由虚拟控制器 u_i^* 和含滤波变量 y_i 的部分组成, 其中引入滤波变量的作用是消除异质非线性函数 f_i 对系统稳定性的影响, 引入虚拟控制器的作用是实现系统状态的一致性.

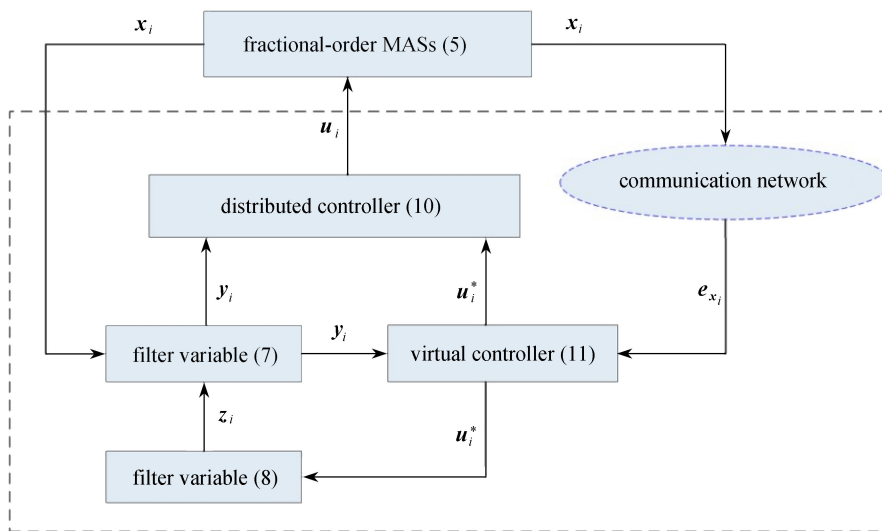


图 1 闭环分数阶多智能体系统的框架

Fig. 1 The flowchart for closed-loop fractional-order multi-agent systems

定理 1 如果假设 1 和假设 2 成立, 考虑分布式控制器(10), 滤波变量(7)、(8)和虚拟控制器(11), 则异质分数阶非线性多智能体系统(5)在时刻 $t = T_2$ 时达到预设时间一致性. 此外, 控制输入信号全局有界.

证明 本定理的证明分为如下 3 步: 第一步, 证明滤波变量 y_i 在原点是全局预设时间稳定; 第二步, 证明多智能体系统(5)的状态 x_i 达到预设时间一致性, 即实现控制目标(6); 第三步, 证明控制输入 u_i 全局有界.

第 1 步 证明滤波变量 y_i 在原点是全局预设时间稳定.

利用引理 1, 分数阶微分方程(7)和(8), 有

$$\dot{y}_i = D^\alpha (D^{1-\alpha} y_i) = D^\alpha x_i - D^\alpha z_i = u_i + f_i(x_i, t) - u_i^*. \tag{13}$$

将控制器(10)代入式(13)得

$$\dot{\mathbf{y}}_i = - \left(\gamma_1 + \frac{\dot{h}(t, T_1)}{h(t, T_1)} \right) \mathbf{y}_i - \beta_i \text{sgn}(\mathbf{y}_i) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t). \quad (14)$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i. \quad (15)$$

由式(14)和假设2可得到 Lyapunov 函数 $V_1(t)$ 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & - \left(\gamma_1 + \frac{\dot{h}(t, T_1)}{h(t, T_1)} \right) \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^N (-\beta_i \|\mathbf{y}_i\|_1 + \mathbf{y}_i^T \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)) \leq \\ & - \left(2\gamma_1 + 2 \frac{\dot{h}(t, T_1)}{h(t, T_1)} \right) V_1(t), \end{aligned} \quad (16)$$

其中最后一个不等式成立是由于 $\mathbf{y}_i^T \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) \leq \bar{f}_i \|\mathbf{y}_i\| \leq \beta_i \|\mathbf{y}_i\| \leq \beta_i \|\mathbf{y}_i\|_1$. 然后利用引理2可得

$$V_1(t) \leq \frac{e^{-2\gamma_1 t}}{(h(t, T_1))^2} V_1(0), \quad 0 \leq t < T_1. \quad (17)$$

令 $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_N^T]^T$. 由式(15)和(17)可得

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \frac{e^{-\gamma_1 t}}{h(t, T_1)} \|\mathbf{y}(0)\|, \quad 0 \leq t < T_1. \quad (18)$$

注意到 $\lim_{t \rightarrow T_1} (h(t, T_1))^{-1} = 0$, 再由式(18)易知

$$\lim_{t \rightarrow T_1} \|\mathbf{y}(t)\| = 0, \quad \|\mathbf{y}(t)\| \equiv 0, \quad t \geq T_1,$$

这意味着当 $t \geq T_1$ 时 $\mathbf{y}_i(t) = \dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{0}_n$. 再由式(13)可知, 分数阶非线性多智能体系统(5)在 $t \geq T_1$ 时等价于 $D^\alpha \mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i^*$. 然后利用引理1有

$$\dot{\mathbf{x}}_i = D^{1-\alpha} [I^{1-\alpha} \dot{\mathbf{x}}_i] = D^{1-\alpha} [D^\alpha \mathbf{x}_i] = D^{1-\alpha} \mathbf{u}_i^*. \quad (19)$$

将虚拟控制器(11)代入式(19)有

$$\dot{\mathbf{x}}_i = D^{1-\alpha} [I^{1-\alpha} \mathbf{v}_i] = \mathbf{v}_i = - \left(\gamma_2 + b \frac{\dot{h}(t, T_2)}{h(t, T_2)} \right) \mathbf{e}_{x_i}. \quad (20)$$

第2步 证明多智能体系统状态 \mathbf{x}_i 达到预设时间一致性.

由假设1可知, Laplace 矩阵 \mathcal{L} 有 N 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 满足 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. 令

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T, \quad \mathbf{e}_x = [\mathbf{e}_{x_1}^T, \mathbf{e}_{x_2}^T, \dots, \mathbf{e}_{x_N}^T]^T,$$

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad \mathbf{A}_0 = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_N),$$

其中 $\lambda_0 > 0$ 为某一常数. 易知 $\mathbf{e}_x = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}$. 假设1成立, 则存在一个酉矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足 $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_N$, 使得 $\mathcal{L} = \mathbf{U}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{U}$. 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_2(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x^T (\mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{e}_x. \quad (21)$$

注意到 $\mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}$ 为一个正定矩阵. 由文献[6]可知 $V_2(t) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j, \forall i, j \in \mathcal{G}$. 取 Lyapunov 函数(21)的导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \mathbf{e}_x^T (\mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{x}^T (\mathcal{L}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{x}} = \\ & \mathbf{x}^T [(\mathbf{U}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{U})^T \mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n] \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{U}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{x}} = \\ & \mathbf{x}^T (\mathbf{U}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (22)$$

事实上, 由式(22)可知 Lyapunov 函数(21)等价于 $V_2(t) = (1/2) \mathbf{x}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}$. 将式(20)代入式(22), 可得

$$\dot{V}_2(t) = - \left(\gamma_2 + b \frac{\dot{h}(t, T_2)}{h(t, T_2)} \right) \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x \leq$$

$$-2\lambda_2 \left(\gamma_2 + b \frac{\dot{h}(t, T_2)}{h(t, T_2)} \right) V_2(t) \leq - \left(2\lambda_2 \gamma_2 + 2 \frac{\dot{h}(t, T_2)}{h(t, T_2)} \right) V_2(t), \quad (23)$$

其中第一个不等式成立是因为 $\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x = \|(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}\|^2 = ((\mathcal{L}^{1/2} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x})^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) (\mathcal{L}^{1/2} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x} \geq \lambda_2 \mathbf{x}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x} = 2\lambda_2 V_2(t)$, 最后一个不等式成立是因为 $b \geq 1/\lambda_2$. 然后利用引理 2 知

$$V_2(t) \leq \frac{e^{-2\lambda_2 \gamma_2 t}}{(h(t, T_2))^2} V_2(0), \quad T_1 \leq t < T_2. \quad (24)$$

因为 $\lim_{t \rightarrow T_2} V_2(t) = 0$ 和 $V_2(t) = 0, t \geq T_2$. 故当 $t \geq T_2$ 时 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j, \forall i, j \in \mathcal{J}$. 因此条件(6) 满足.

第 3 步 证明控制输入 \mathbf{u}_i 全局有界.

下面分 3 种情况证明.

情况 1 当 $t \in [0, T_1]$ 时, $D^\alpha \mathbf{x}_i = \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{u}_i^*$, 然后利用引理 1 有

$$\dot{\mathbf{x}}_i = D^{1-\alpha} [1^{1-\alpha} \dot{\mathbf{x}}_i] = D^{1-\alpha} [D^\alpha \mathbf{x}_i] = D^{1-\alpha} (\dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{u}_i^*) = D^{1-\alpha} \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{v}_i. \quad (25)$$

联立式(14)和(18)可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i &\leq \left(\gamma_1 + \frac{\dot{h}(t, T_1)}{h(t, T_1)} \right) \frac{e^{-\gamma_1 t}}{h(t, T_1)} \|\mathbf{y}(0)\| + 2\beta_i = \\ &\left(\gamma_1 \left(\frac{T_1 - t}{T_1} \right)^m + \frac{m}{T_1} \left(\frac{T_1 - t}{T_1} \right)^{m-1} \right) e^{-\gamma_1 t} \|\mathbf{y}(0)\| + 2\beta_i \leq \\ &\left(\gamma_1 + \frac{m}{T_1} \right) \|\mathbf{y}(0)\| + 2\beta_i. \end{aligned} \quad (26)$$

故当 $t \in [0, T_1]$ 时 $D^{1-\alpha} \dot{\mathbf{y}}_i$ 有界, 即存在某个正常数 ϱ 使得 $\|D^{1-\alpha} \dot{\mathbf{y}}_i\| \leq \varrho$. 取 Lyapunov 函数(21) 的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \mathbf{e}_x^T (D^{1-\alpha} \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{v}_i) \leq \varrho \|\mathbf{e}_x\| - \left(\gamma_2 + b \frac{\dot{h}(t, T_2)}{h(t, T_2)} \right) \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x \leq \\ &\varrho \sqrt{2\lambda_N V_2(t)} \leq \varrho \sqrt{2\lambda_N} \left(V_2(t) + \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

其中第二个不等式成立是因为 $\|\mathbf{e}_x\|^2 = \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x = \|(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}\|^2 = ((\mathcal{L}^{1/2} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x})^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) (\mathcal{L}^{1/2} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x} \leq \lambda_N \mathbf{x}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x} = 2\lambda_N V_2(t)$, 最后一个不等式成立是因为 $(\sqrt{V_2(t)} - 1/2)^2 \geq 0$. 因此, 当 $t \in [0, T_1]$ 时 $V_2(t)$ 有界, 从而 \mathbf{e}_x 有界, 即存在某个正常数 ρ 使得 $\|\mathbf{e}_x\| \leq \rho$. 再由式(11)和(13)可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_i\| &= \|\dot{\mathbf{y}}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + \mathbf{u}_i^*\| \leq \\ &\|\dot{\mathbf{y}}_i\| + \beta_i + \left\| \int_0^t \frac{(\gamma_2 + bm/(T_2 - \tau)) \mathbf{e}_{x_i}}{\Gamma(1 - \alpha)(t - \tau)^\alpha} d\tau \right\| \leq \\ &\left(\gamma_1 + \frac{m}{T_1} \right) \|\mathbf{y}(0)\| + 3\beta_i + \left(\gamma_2 + \frac{bm}{T_2 - T_1} \right) \frac{\rho T_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} < \infty. \end{aligned} \quad (28)$$

情况 2 当 $t \in [T_1, T_2]$ 时, $\mathbf{y}_i(t) = \dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{0}_n$, 从而由控制算法(10)可知 $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^*$. 由式(11)和(24)可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_i^*\| &= \left\| \int_{T_1}^t \frac{(\gamma_2 + bm/(T_2 - \tau)) \mathbf{e}_{x_i}}{\Gamma(1 - \alpha)(t - \tau)^\alpha} d\tau \right\| \leq \left(\gamma_2 + \frac{bm}{T_2 - t} \right) \frac{\sqrt{2\lambda_N V_2(0)} e^{-\lambda_2 \gamma_2 t} (t - T_1)^{1-\alpha}}{h(t, T_2) \Gamma(2 - \alpha)} = \\ &\left(\gamma_2 \left(\frac{T_2 - t}{T_2} \right)^m + \frac{bm}{T_2} \left(\frac{T_2 - t}{T_2} \right)^{m-1} \right) \frac{\sqrt{2\lambda_N V_2(0)} e^{-\lambda_2 \gamma_2 t} (t - T_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \leq \\ &\left(\gamma_2 \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)^m + \frac{bm}{T_2} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)^{m-1} \right) \frac{\sqrt{2\lambda_N V_2(0)} (T_2 - T_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} < \infty. \end{aligned} \quad (29)$$

情况 3 当 $t \geq T_2$ 时, $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{u}_i^* = \mathbf{0}_n$, 故 $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}_n, \forall i \in \mathcal{J}$. 综合上述 3 种情况, 控制输入信号全局有界. 证毕. □

注 4 本文设计的预设时间分布式一致性控制算法(10)包含如下 3 项: 虚拟控制器项 \mathbf{u}_i^* 、预设时间镇定控制项 $-(\gamma_1 + \dot{h}(t, T_1)/h(t, T_1)) \mathbf{y}_i$ 和符号函数项 $-\beta_i \text{sgn}(\mathbf{y}_i)$, 其中符号函数项用于补偿异质非线性函数 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$, 预设时间镇定控制项用于

实现滤波变量 y_i 的预设时间稳定,虚拟控制器项用于实现智能体状态的预设时间一致性.以上3部分在控制器(10)的设计中缺一不可.

本文通过转化思想和预设时间控制技术,将不易处理的分数阶非线性多智能体系统(5)在预设时刻转化成易处理的一阶线性多智能体系统 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i$.这样分数阶非线性多智能体系统(5)的预设时间一致性问题就转变成一阶线性多智能体系统 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i$ 的预设时间一致性问题.以定理1中设计的控制算法为例,其详细设计步骤如下:

(S1) 设计滤波变量(7)和(8),将分数阶非线性多智能体系统(5)转化成含滤波变量的分数阶多智能体系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}_i = \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{u}_i^*, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

(S2) 设计预设时间分布式一致性控制器(10),使得一阶非线性系统(13)(分数阶系统(30)的等价形式)在 $t \geq T_1$ 时稳定,从而当 $t \geq T_1$ 时, $\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{0}_n$,同时系统(30)等价于含虚拟控制器的分数阶线性多智能体系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i^*, \quad t \geq T_1. \quad (31)$$

(S3) 令 $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{I}^{1-\alpha} \mathbf{v}_i$,则分数阶线性多智能体系统(31)等价于一阶线性多智能体系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \quad t \geq T_1. \quad (32)$$

(S4) 设计 \mathbf{v}_i ,即设计预设时间虚拟控制器(11)使得一阶线性多智能体系统(32)达到预设时间一致性.

3.2 含生成树有向网络图的预设时间一致性

本小节把上一小节中的连通无向网络图推广到更一般的含生成树有向网络图,即研究分数阶非线性多智能体系统(5)的网络拓扑图满足如下假设.

假设3 假设网络拓扑图 \mathcal{G} 为含一条有向生成树的有向图.

若假设3成立,则由定理3可知,存在全列矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 和正定矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 使得 $\mathcal{L} = \mathbf{M}\mathbf{E}$ 和

$$\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{M} + (\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{M})^\top > \delta \mathbf{Q} \quad (33)$$

成立,其中 $0 < \delta < 2\min_{i \in \{1,2,\dots,N-1\}} \operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{E}\mathbf{M}))$, $\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{E}\mathbf{M}))$ 表示矩阵 $\mathbf{E}\mathbf{M}$ 的第 i 个特征值的实部.

若图 \mathcal{G} 为含有向生成树的有向图,考虑如下基于时变函数的预设时间分布式一致性控制算法 ($i \in \mathcal{I}$):

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^* - \left(\gamma_3 + \frac{\dot{h}(t, T_3)}{h(t, T_3)} \right) \mathbf{y}_i - \beta_i \operatorname{sgn}(\mathbf{y}_i), \quad (34)$$

其中 $\beta_i \geq \bar{f}_i$,滤波变量 \mathbf{y}_i 由式(7)定义,虚拟控制器设计为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{I}^{1-\alpha} \mathbf{v}_i, \\ \mathbf{v}_i = - \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) \mathbf{e}_{x_i}, \end{cases} \quad (35)$$

$\gamma_l > 0, l = 3, 4, c \geq 2/\delta$,时变函数 $h(t, T_l)$ 和 \mathbf{e}_{x_i} 分别由式(1)和(9)定义, $T_4 > T_3 > 0$ 为预先设定的时间点(时刻).

定理2 如果假设2和假设3成立,考虑分布式控制器(34),滤波变量(7)、(8)和虚拟控制器(35),则异质分数阶非线性多智能体系统(5)在时刻 $t = T_4$ 时达到预设时间一致性.此外,控制输入信号全局有界.

证明 本定理的证明分为如下3步:第一步,证明滤波变量 \mathbf{y}_i 在原点是全局预设时间稳定;第二步,证明多智能体系统(5)达到预设时间一致性;第三步,证明控制输入信号全局有界.

本定理的第一步证明类似于定理1中的第一步,考虑 Lyapunov 函数(15)可以得到分数阶非线性多智能体系统(5)在 $t \geq T_3$ 时等价于 $D^\alpha \mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i^*$,然后利用引理1和虚拟控制器(35)有

$$\dot{\mathbf{x}}_i = - \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) \mathbf{e}_{x_i}. \quad (36)$$

下面证明多智能体系统(5)达到预设时间一致性.令

$$\hat{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k+1}(t), \quad k = \{1, 2, \dots, N-1\},$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{\mathbf{x}}_1^T(t), \hat{\mathbf{x}}_2^T(t), \dots, \hat{\mathbf{x}}_{N-1}^T(t)]^T.$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V_3(t) = \hat{\mathbf{x}}^T(t) (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (37)$$

其中 $\mathbf{Q} > 0$ 满足不等式(33). 易知 $V_3(t) = 0$ 当且仅当 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{Nn}$, 而 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{Nn}$ 当且仅当 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j, \forall i, j \in \mathcal{J}$. 由式(4)定义的矩阵 \mathbf{E} 和式(36)可知

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \\ &= - \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) (\mathbf{E} \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mathbf{x}} = - \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) (\mathbf{E} \mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (38)$$

沿着轨迹(38), 可得 Lyapunov 函数(37)的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= 2\hat{\mathbf{x}}^T(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \\ &= -2 \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) \hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mathbf{x}} \leq -\delta \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) \hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mathbf{x}} = \\ &= -\delta \left(\gamma_4 + c \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) V_3(t) \leq - \left(\gamma_4 \delta + 2 \frac{\dot{h}(t, T_4)}{h(t, T_4)} \right) V_3(t), \end{aligned} \quad (39)$$

其中最后一个不等式成立因为 $c \geq 2/\delta$. 然后利用引理 2 知

$$V_3(t) \leq \frac{e^{-\gamma_4 \delta t}}{(h(t, T_4))^2} V_3(0), \quad T_3 \leq t < T_4. \quad (40)$$

故 $\lim_{t \rightarrow T_4} V_3(t) = 0$ 和 $V_3(t) = 0, t \geq T_4$. 这意味着当 $t \geq T_4$ 时 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j, \forall i, j \in \mathcal{J}$. 因此条件(6)满足. 类似于定理 1 中的第三步证明可知控制输入信号全局有界. 证毕. \square

特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 分数阶非线性多智能体系统(5)简化为如下一阶非线性多智能体系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t), \quad i \in \mathcal{J}. \quad (41)$$

由定理 2 可直接得到如下定理.

定理 3 如果假设 2 和假设 3 成立, 则一阶非线性多智能体系统(41)在时刻 $t = T_6$ 时达到预设时间一致性, 当

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^* - \left(\gamma_5 + \frac{\dot{h}(t, T_5)}{h(t, T_5)} \right) \mathbf{y}_i - \beta_i \text{sgn}(\mathbf{y}_i), \quad (42)$$

其中 $\beta_i \geq \bar{f}_i, i \in \mathcal{J}$, 滤波变量 \mathbf{y}_i 满足

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i, \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{u}_i^* - \left(\gamma_6 + d \frac{\dot{h}(t, T_6)}{h(t, T_6)} \right) \mathbf{e}_{x_i}, \quad (44)$$

$\gamma_p > 0, p = 5, 6, d > 2/\delta$, 时变函数 $h(t, T_p)$ 和 \mathbf{e}_{x_i} 分别由式(1)和(9)定义, $T_6 > T_5 > 0$ 为预先设定时间点(时刻). 此外, 控制输入信号全局有界.

注 5 当 $\alpha = 1$ 时 $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{v}_i$, 从式(43)和(44)中可知, 滤波变量 \mathbf{y}_i 和 \mathbf{z}_i 为滑模变量, 设计基于时变函数的预设时间滑模控制器使得一阶非线性多智能体系统(41)在预设时刻到达滑模流形 $\mathbf{y}_i = \mathbf{0}_n$ 上, 此刻系统动态可描述为一阶线性多智能体系统 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i^*$.

注 6 注意到文献[16, 21, 24-30]中设计了含分数次幂的有限或固定时间控制器, 并得到了依赖于系统初值或参数的收敛时间的上确界值估计. 因收敛时间上确界值估计依赖于系统初值或参数而具有保守性, 当无法预先观测到系统初值或系统参数不可测时就无法保证规定的收敛时间, 从而无法及时完成某项控制任务. 本文设计的基于时变函数的分布式控制算法(10)和(34)能在某一时刻实现一致性控制, 该收敛时刻由时变函数预先给定且不依赖于系统初值和参数. 因此本文设计的基于时变函数的分布式控制算法(10)和(34)能够保证预设收敛时间, 从而及时完成某项控制任务.

注 7 虽然本文设计的控制算法(10)和(34)能够以分布式的方式在预先给定的独立于系统参数和初值的时刻实现低成本和零误差的一致性控制, 但算法(10)和(34)的控制增益依赖于全局信息, 如 $b \geq 1/\lambda_2$ 和 $c \geq 2/\delta$. 因此算法(10)和(34)都不是完全分布式的. 如何消除本文设计的预设时间一致性算法中控制增益对全局信息的依赖性, 是未来的一个重要研究课题.

4 仿真实例

例 1 注意到定理 1 和定理 3 都是定理 2 的一种特殊情况, 本例只验证定理 2 的理论结果. 为了验证定理 2 中理论结果的有效性, 考虑如图 2 所示的 6 个智能体之间的含生成树有向图 \mathcal{G} , 其中权重已在图中给出. 令

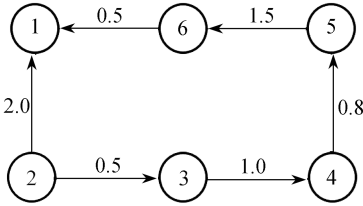


图 2 含生成树有向图 \mathcal{G}

Fig. 2 Directed graph \mathcal{G} containing the spanning tree

$$f_i = \begin{cases} \frac{i}{8} [\sin(\pi t) - e^{-x_i}], & i = 1, 2, 3, \\ \frac{8-i}{8} [\sin(-\pi t) + e^{-x_i}], & i = 4, 5, 6. \end{cases}$$

易知假设 2 和假设 3 都成立. 此外, 为了比较分数阶参数 α 对系统控制性能的影响, 我们考虑具有不同阶数而其他参数和初值都相同的控制算法 (34) 和控制算法 (42) (即考虑定理 2 和定理 3 中的控制算法). 定理 2 中设计的控制算法的参数和初值分别选取为: $\alpha = 0.8, \gamma_3 = \gamma_4 = 1, m = 3, T_3 = 0.8 \text{ s}, T_4 = 2 \text{ s}$,

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{i}{4}, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{8-i}{4}, & i = 4, 5, 6, \end{cases}$$

通过计算可得 $\min_{i \in \{1, 2, \dots, 5\}} \operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{EM})) = 0.5$, 故取 $\delta = 0.5$ 和 $c = 5 > 2/\delta$,

$$[x_1(0), x_2(0), \dots, x_6(0)] = [1, 5, -3, -4, 3, 2],$$

$$[y_1(0), y_2(0), \dots, y_6(0)] = [5, -1, 3, -5, 1, -3],$$

$$[z_1(0), z_2(0), \dots, z_6(0)] = [-1, 1, 2, -2, -3, 3].$$

当 $\alpha = 0.8$ 和 $\alpha = 1$ 时, 滤波变量 y_i 和一致性误差 \hat{x}_k 的轨迹分别如图 3 和图 4 所示, 分布式控制器 u_i 和虚拟控制器 u_i^* 的轨迹分别如图 5 和图 6 所示, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, 6\}, k \in \{1, 2, \dots, 5\}$. 观察图 3 和图 4 可知, 当 $t \geq 0.8 \text{ s}$ 时 $y_i = 0$, 当 $t \geq 2 \text{ s}$ 时 $\hat{x}_k = 0$, 这说明分数阶多智能体系统实现了控制目标 (6). 观察图 5 和图 6 可知, 分布式控制器 u_i 和虚拟控制器 u_i^* 都有界.

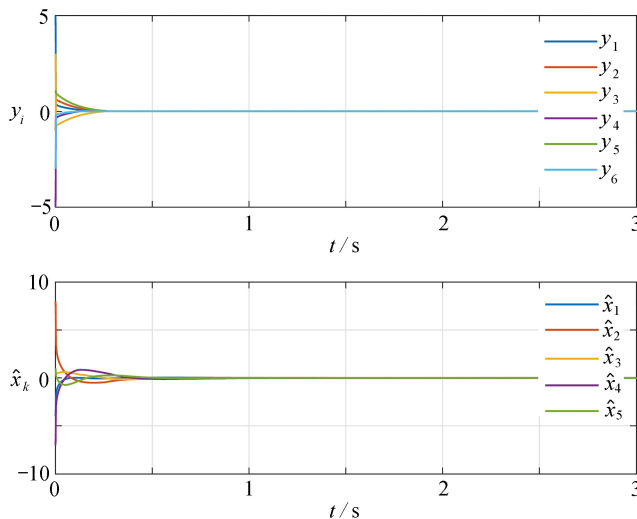


图 3 当 $\alpha = 0.8$ 时, 滤波变量 y_i 和一致性误差 \hat{x}_k 的轨迹

Fig. 3 Trajectories of filter variable y_i and consensus error \hat{x}_k for $\alpha = 0.8$

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

进一步观察比较图 5 和图 6 可知, 分数阶多智能体系统 ($\alpha = 0.8$) 比一阶多智能体系统 ($\alpha = 1$) 在达到

预设时间一致性时所需消耗的控制能量更少,这说明分数阶控制算法能够获得比传统整数阶控制算法更好的控制性能.此外,我们注意到图 5 和图 6 中控制器 u_i 在零附近线条比较粗,这是因为控制器 u_i 含有在零点不连续的符号函数,而不连续符号函数易引起抖振现象,从而导致控制器 u_i 在零附近线条比较粗.

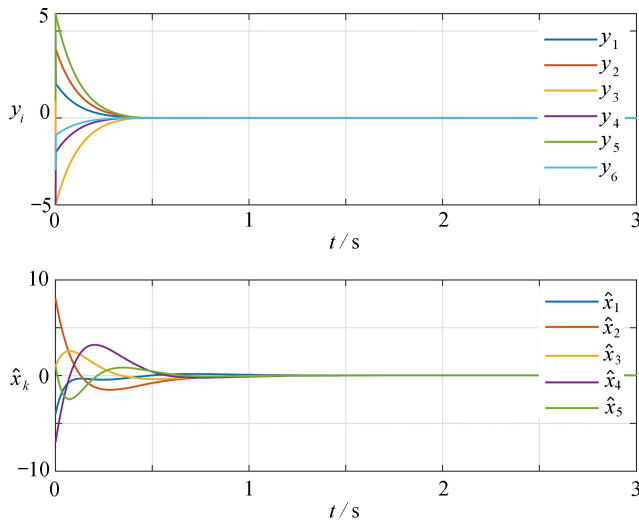


图 4 当 $\alpha = 1$ 时,滤波变量 y_i 和一致性误差 \hat{x}_k 的轨迹

Fig. 4 Trajectories of filter variable y_i and consensus error \hat{x}_k for $\alpha = 1$

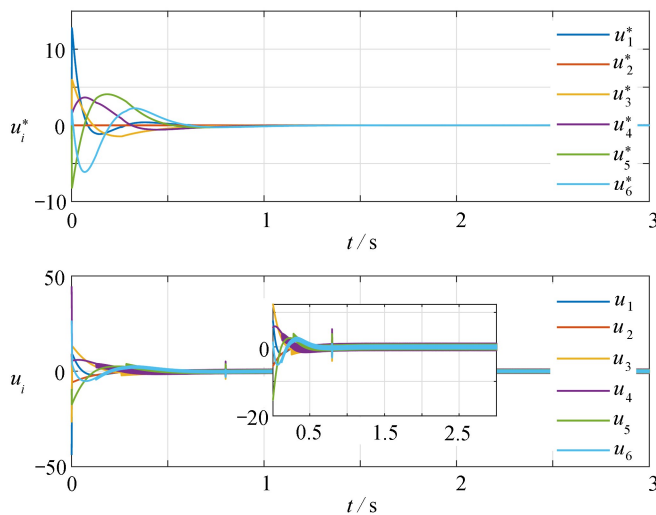


图 5 当 $\alpha = 0.8$ 时,控制器 u_i^* 和 u_i 的轨迹

Fig. 5 Trajectories of controllers u_i^* and u_i for $\alpha = 0.8$

为了验证定理 2 中预设时间控制算法的收敛时间与控制参数和初值无关,我们分别选取了 4 组不同的参数 γ_3, γ_4 和 4 组不同的初值 $\mathbf{x}(0)$.图 7 给出了算法(34)取这 4 种不同参数和 4 种不同初值(其他参数和初值都相同)时的一致性误差 $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ 的轨迹.从图 7 中可以看出,一致性误差 $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ 的收敛时间不受控制参数和初值的影响.因此,本文设计的预设时间控制算法的收敛时间不依赖于系统参数和初值.

注 8 值得注意的是,文献[16,21,24-30]中设计了含分数次幂的有限时间或固定时间控制器,并得到了算法收敛时间的上确界估计值,该上确界估计值依赖于系统参数且估计具有保守性.为了得到较小的上确界估计值需要选取较大的控制增益,从而需要更大的控制能量或控制成本.与文献[16,21,24-30]中设计的有限时间或固定时间控制器比较,本文设计的预设时间控制器具有如下优点: 1) 收敛时间与系统参数和初值无关; 2) 能够预先保证精确的收敛时间; 3) 低控制成本; 4) 设计简单.

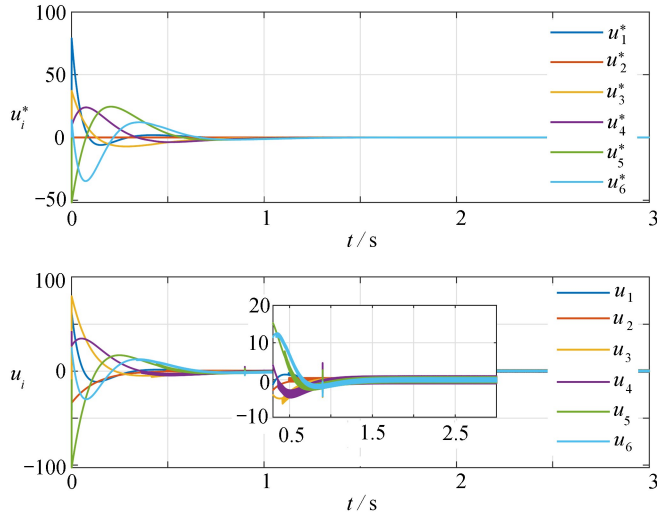


图6 当 $\alpha = 1$ 时, 控制器 u_i^* 和 u_i 的轨迹

Fig. 6 Trajectories of controllers u_i^* and u_i for $\alpha = 1$

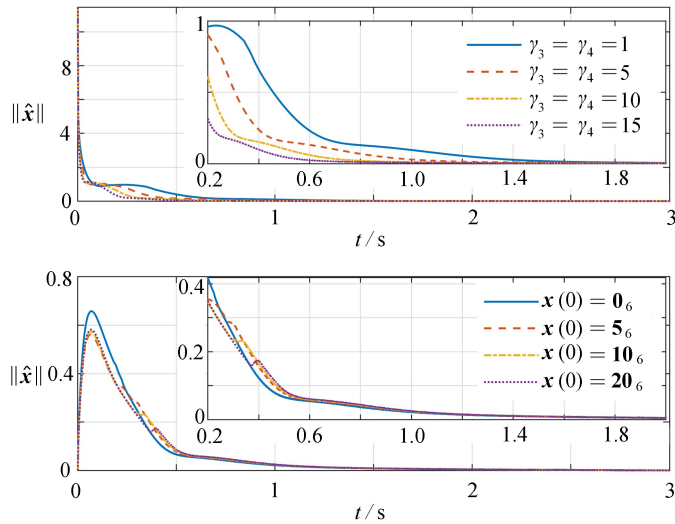


图7 取不同参数 γ_3, γ_4 和初值 $\mathbf{x}(0)$ 时, 一致性误差 $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ 的轨迹

Fig. 7 Trajectories of consensus error $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ for different parameters γ_3, γ_4 and initial values of $\mathbf{x}(0)$

5 结 论

本文研究了一类异质分数阶非线性多智能体系统的预设时间一致性问题. 当多智能体网络图是连通无向图和含生成树的有向图时, 通过引入滤波变量和一类非负时变函数, 分别设计了实现闭环系统精确预设时间一致性控制的分布式控制器. 最后, 通过仿真实例验证了所提出的预设时间控制算法的有效性. 把本文的结果推广到更高阶的异质分数阶非线性多智能体系统中, 是未来一个有趣的研究方向. 此外, 如何设计连续的控制算法, 以消除本文设计的不连续算法容易引起的抖振现象, 亦是未来的一个研究方向.

参考文献 (References):

- [1] DU H, WEN G, CHENG Y, et al. Distributed finite-time cooperative control of multiple high-order nonholonomic mobile robots[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, **28**(12): 2998-3006.
- [2] DONG X, YU B, SHI Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: theories and applications[J]. *IEEE Transactions Control System Technology*, 2015, **23**(1): 340-348.

- [3] LESSER V, ORTIZ C L, TAMBE M. *Distributed Sensor Networks: a Multiagent Perspective*[M]. New York: Springer, 2003.
- [4] CHEN B, CHENG H. A review of the applications of agent technology in traffic and transportation systems [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2010, **11**(2): 485-497.
- [5] GHARIB A, EJAZ W, IBNKAHLA M. Distributed spectrum sensing for IoT networks: architecture, challenges, and learning[J]. *IEEE Internet of Things Magazine*, 2021, **4**(2): 66-73.
- [6] OLFATI-SABER R, M-MURRAY R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520-1533.
- [7] 郑丽颖, 杨永清, 许先云. 基于时变拓扑结构的二阶多智能体系统采样一致性[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(7): 783-791.(ZHENG Liying, YANG Yongqing, XU Xianyun. Sampling consensus of 2nd-order multi-agent systems based on time-varying topology[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(7): 783-791.(in Chinese))
- [8] QIN J, MA Q, SHI Y, et al. Recent advances in consensus of multi-agent systems: a brief survey[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **64**(6): 4972-4983.
- [9] ZUO Z, HAN Q L, NING B, et al. An overview of recent advances in fixed-time cooperative control of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, **14**(6): 2322-2334.
- [10] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
- [11] Podlubny I. *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [12] CAO Y C, LI Y, REN W, et al. Distributed coordination of networked fractional-order systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics(Part B): Cybernetics*, 2009, **40**(2): 362-370.
- [13] GONG P, HAN Q L. Practical fixed-time bipartite consensus of nonlinear incommensurate fractional-order multiagent systems in directed signed networks[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, **58**(6): 3322-3341.
- [14] ZHU W, LI W, ZHOU P, et al. Consensus of fractional-order multi-agent systems with linear models via observer-type protocol[J]. *Neurocomputing*, 2017, **230**: 60-65.
- [15] CHEN J, CHEN B, ZENG Z. Synchronization and consensus in networks of linear fractional-order multi-agent systems via sampled-data control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **31**(8): 2955-2964.
- [16] LIU H, CHENG L, TAN M, et al. Exponential finite-time consensus of fractional-order multiagent systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(4): 1549-1558.
- [17] SU H, YE Y, CHEN X, et al. Necessary and sufficient conditions for consensus in fractional-order multiagent systems via sampled data over directed graph[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, **51**(4): 2501-2511.
- [18] HU W, WEN G, RAHMANI A, et al. Differential evolution-based parameter estimation and synchronization of heterogeneous uncertain nonlinear delayed fractional-order multi-agent systems with unknown leader [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, **97**(2): 1087-1105.
- [19] GONG P. Distributed tracking of heterogeneous nonlinear fractional-order multi-agent systems with an unknown leader[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(5): 2226-2244.
- [20] GONG P, LAN W. Adaptive robust tracking control for uncertain nonlinear fractional-order multi-agent systems with directed topologies[J]. *Automatica*, 2018, **92**: 92-99.
- [21] GONG P, HAN Q L, LAN W. Finite-time consensus tracking for incommensurate fractional-order nonlinear multiagent systems with directed switching topologies[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(1): 65-76.
- [22] 马丽新, 刘晨, 刘磊. 基于 actor-critic 算法的分数阶多自主体系统最优主-从一致性控制[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(1): 104-114.(MA Lixin, LIU Chen, LIU Lei. Optimal leader-following consensus control of fractional-order multi-agent systems based on the actor-critic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*,

- 2022, **43**(1): 104-114. (in Chinese))
- [23] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2106-2110.
- [24] SHI X, LU J, LIU Y, et al. A new class of fixed-time bipartite consensus protocols for multi-agent systems with antagonistic interactions [J]. *Journal of Franklin Institute*, 2018, **355**(12): 5256-5271.
- [25] ZOU W, QIAN K, XIANG Z. Fixed-time consensus for a class of heterogeneous nonlinear multiagent systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, **67**(7): 1279-1283.
- [26] WANG H, YU W, WEN G, et al. Fixed-time consensus of nonlinear multi-agent systems with general directed topologies [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, **66**(9): 1587-1591.
- [27] FU J, WANG J. Fixed-time coordinated tracking for second-order multi-agent systems with bounded input uncertainties [J]. *Systems and Control Letters*, 2016, **93**: 1-12.
- [28] ZUO Z, TIAN B, DEFOORT M, et al. Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatics Control*, 2018, **63**(2): 563-570.
- [29] 赵玮, 任凤丽. 基于牵制控制的多智能体系统的有限时间与固定时间一致性 [J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(3): 299-307. (ZHAO Wei, REN Fengli. Finite-time and fixed-time consensus for multi-agent systems via pinning control [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(3): 299-307. (in Chinese))
- [30] GONG P, HAN Q L. Fixed-time bipartite consensus tracking of fractional-order multi-agent systems with a dynamic leader [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, **67**(10): 2054-2058.
- [31] BECERRA H M, VÁZQUEZ C R, ARECHAVALETA G, et al. Predefined-time convergence control for high-order integrator systems using time base generators [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, **26**(5): 1866-1873.
- [32] NING B, HAN Q L, ZUO Z. Bipartite consensus tracking for second-order multiagent systems: a time-varying function-based preset-time approach [J]. *IEEE Transactions on Automatics Control*, 2021, **66**(6): 2739-2745.
- [33] WANG Y, SONG Y, HILL D J, et al. Prescribed-time consensus and containment control of networked multiagent systems [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(4): 1138-1147.
- [34] ZHOU Y, LI C, JIANG G P, et al. Robust prescribed-time consensus of multi-agent systems with actuator saturation and actuator faults [J]. *Asian Journal of Control*, 2022, **24**(2): 743-754.
- [35] LIU W, ZHOU S, QI Y, et al. Leaderless consensus of multiagent systems with Lipschitz nonlinear dynamics and switching topologies [J]. *Neurocomputing*, 2016, **173**: 1322-1329.