http://www.applmathmech.cn

四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的能量守恒*

王　斌，　周艳平，　别群益

（三峡大学 理学院，湖北 宜昌 443002）

摘要： 研究了四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的能量守恒，当该方程的 Leray-Hopf 弱解（适当弱解）存在维数小于 4 的奇异集时，基于 Wu 在文章中关于四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的部分正则性结果，得到了四维空间中 $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^4))$ 条件，保证该方程能量守恒.

关　键　词： Navier-Stokes 方程；部分正则性；能量守恒

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　**DOI：** 10.21656/1000-0887.430370

Energy Conservation of the 4D Incompressible Navier-Stokes Equations

WANG Bin，　ZHOU Yanping，　BIE Qunyi

（*College of Science*, *China Three Gorges University*, *Yichang*, *Hubei* 443002, *P.R.China*）

Abstract: The energy conservation of 4D incompressible Navier-Stokes equations was studied. In the case of a singular set with a dimension number less than 4 for the Leray-Hopf weak solution (suitable weak solution), the $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^4))$ condition in the 4D space was obtained based on Wu's partial regularity results about the 4D incompressible Navier-Stokes equations, to ensure the energy conservation.

Key words: Navier-Stokes equation; partial regularity; energy conservation

1　引言与预备知识

本文研究如下四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的能量守恒：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} = -\nabla\pi, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 表示速度场，$\boldsymbol{\pi}$ 表示压力，ν 表示黏性系数.Navier-Stokes 方程描述的是黏性不可压缩流体动量守恒的运动方程，该方程解的存在性、稳定性、唯一性和解的非线性动力学特性等问题[1-6]是流体力学家近几十年来关注的热点.

* **收稿日期：** 2022-11-16；**修订日期：** 2022-12-24

基金项目： 国家自然科学基金项目（11901346；11871305）

作者简介： 王斌（1998—），女，硕士生（E-mail：2895969956@qq.com）；
周艳平（1980—），女，副教授，博士（通讯作者. E-mail：zhyp5208@163.com）；
别群益（1970—），男，教授，博士，博士生导师（E-mail：qybie@126.com）.

引用格式： 王斌，周艳平，别群益. 四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的能量守恒[J]. 应用数学和力学，2023，**44**(8)：999-1006.

1.1　能量弱解的定义

Leray[7] 和 Hopf[8] 证明了在能量有限的初始条件下,Navier-Stokes 方程存在弱解,可记为 Leray-Hopf 弱解.接着,Masuda[9] 证明了在 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 中 Navier-Stokes 方程弱解的存在性.以下给出其定义.

定义 1　对于初始值 $\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 和一个特定时间 T, 方程(1)中存在一个弱解使得

(i) $\boldsymbol{u} \in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^N))$;

(ii) 对任意的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T))$, 满足

$$
-\int_{\mathbb{R}^N} \boldsymbol{u}_0 \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \boldsymbol{u}\phi_t \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \nu \int_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \nabla \boldsymbol{u} \nabla \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \\
\int_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \pi \nabla \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t; \tag{2}
$$

(iii) 对任意的 $t \in [0,T]$, 有

$$
\int_{\mathbb{R}^N \times \{t\}} |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N \times \{0\}} |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} - 2\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \tag{3}
$$

Foias[10] 引入了函数空间 $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^N))$,其中 $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$,证明了若 $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^N))$ 中存在一个弱解 $\boldsymbol{u}$, 满足

$$
\frac{N}{q} + \frac{2}{p} < 1, \qquad N < q,
$$

则 $\boldsymbol{u}$ 是 Navier-Stokes 方程的唯一弱解;Serrin[11] 在 $\mathbb{R}^N (2 \leqslant N \leqslant 4)$ 的情况下也得到了一个类似的定理:对于 $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, 满足

$$
\frac{N}{q} + \frac{2}{p} \leqslant 1, \qquad N < q,
$$

则 $\boldsymbol{u}$ 是 Navier-Stokes 方程的唯一弱解.

1.2　适当弱解和部分正则性

在文献[12-14]中,Scheffer 引入了 Navier-Stokes 方程的适当弱解和广义能量不等式的概念,并得到了这类弱解的各种部分正则性结果.随后,Wu[15] 证明了四维空间中 Navier-Stokes 方程也存在适当弱解且满足局部能量不等式.以下给出适当弱解的定义(见文献[15]).

定义 2　设 $(\boldsymbol{u},\pi)$ 是 Navier-Stokes 方程在 $Q \subset \mathbb{R}^4$ 上的适当弱解,对于 $t \in [-1,0]$ 使得

(i) $\boldsymbol{u} \in L^\infty([-1,0];L^2(Q)) \cap L^2([-1,0];H^1(Q))$;

(ii) 对任意非负试验函数 $\varphi \in C^\infty(Q)$, 满足局部能量不等式:

$$
\int_Q \varphi |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\int_{-1}^0 \int_Q \varphi |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t \leqslant \\
\int_{-1}^0 \int_Q |\boldsymbol{u}|^2 (\Delta\varphi + \partial_t \varphi) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi (|\boldsymbol{u}|^2 + 2\pi) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t.
$$

关于四维 Navier-Stokes 方程弱解的部分正则性研究已经取得了很多成果.Scheffer[13] 证明了在 $\mathbb{R}^4$ 的局部闭集外存在弱解 $\boldsymbol{u}$ 是连续的,且该局部闭集的三维 Hausdorff 测度有限;Dong 和 Du[16]、Wang 和 Wu[17] 均证明了奇异集的二维抛物型 Hausdorff 测度为 0;接着,Wu[15] 证明了在 $\mathbb{R}^4 \times [0,\infty]$ 中 Navier-Stokes 方程存在部分正则性弱解满足局部能量不等式,且奇异集具有有限的二维抛物型 Hausdorff 测度.以下给出弱解的奇异集定义(可参考文献[15]).

定义 3　设 $\boldsymbol{u}$ 是 Navier-Stokes 方程在 $\mathbb{R}^4 \times [0,T]$ 上的弱解,若存在 $r > 0$,有 $\boldsymbol{u} \in L^\infty(Q_r(\boldsymbol{x}),t)$,其中 $Q_r(\boldsymbol{x},t)$ 是以 $(\boldsymbol{x},t)$ 为中心的时空柱面,则点 $(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^4 \times [0,\infty]$ 为正则点.否则 $(\boldsymbol{x},t)$ 为奇异点,这里用 S 表示所有奇异点的闭集.

1.3　能量等式

若 $\boldsymbol{u}$ 是方程(1)的强解,则对所有 $t \in [0,T]$, 方程(1)满足能量等式:

$$
\int_{\mathbb{R}^4 \times \{t\}} |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^4 \times \{0\}} |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \tag{4}
$$

在 Onsager 猜想[18]下,等式(4)排除了由非线性项导致的异常能量耗散,该能量耗散与无黏性($\nu = 0$)Euler 方程的弱解有关.对于能量等式(4)的讨论,这里利用弱解的奇异集可能局限在一个低维时空子集的事实,通过 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 定理[19]构建适当的覆盖奇异集的试验函数来建立能量等式.

关于 Navier-Stokes 方程的能量守恒已有很多研究结果,在三维空间中,Lions[20]证明了当 $\boldsymbol{u} \in L^4([0,T];L^4(\mathbb{R}^3))$ 时等式(4)成立;Ladyženskaja、Solonnikov 和 Ural'ceva 在文献[21]中也得到了这个结果;随后 Kukavica[22]假设压力 $\boldsymbol{\pi} \in L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))$,得到了能量守恒;在 N 维空间中,Serrin[11]证明了在 $\boldsymbol{u} \in L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^N))$ 和 $2/q + N/p \leqslant 1$ 的条件下能量守恒;Shinbrot[23]改进了这一结论,证明了当 $2/p + 2/q \leqslant 1, p \geqslant 4$ 时,该方程能量守恒.

本文利用 Wu[15]研究的四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的部分正则性结果,得到了四维空间中新的 $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^4))$ 条件,保证该方程的能量守恒.以 $x = 1/p$ 为横坐标,$y = 1/q$ 为纵坐标绘图(见图 1—4),图中虚线表示不包含边界,实线表示包含边界.

1.4　主要结果

定理 1　假设 $\boldsymbol{u} \in C_w([0,T];L^2(\mathbb{R}^4)) \cap L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^4))$ 是方程(1)在$[0,T]$上的适当弱解且在$[0,T)$上是正则的.若 $\boldsymbol{u} \in L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^4))$ 满足下列条件:

$$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} \leqslant 1, \qquad 3 \leqslant q \leqslant p, \tag{5}$$

$$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} < 1, \qquad 3 \leqslant p < q, \tag{6}$$

$$\frac{4}{p} + \frac{2}{pq} - \frac{4}{p^2} < 1, \qquad p < 3, \tag{7}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 在$[0,T]$上满足能量等式(4).

注 1　定理 1 为奇异集的 Hausdorff 维数 $d = 2$ 时的情况(见后文中图 3).

注 2　若 $p < 3$,和文献[24]中三维情形时的结果比较可知:在四维空间中,当奇异集的 Hausdorff 维数 $d = 2$ 时,式(7)为双曲线,$2xy + 4x - 4x^2 = 1$;而在三维空间中,其对应的曲线为抛物线,$6x^2 - 7x - 2y + 2 = 0$(此时 $d = 1$),其中 $x = 1/p$,$y = 1/q$.

2　证明思路

下文中的 $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^4))$ 均简记为 $L^q(L^p)$.假设$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\pi})$是 Navier-Stokes 方程在 $\mathbb{R}^4 \times [0,T]$ 上的一个 Leray-Hopf 弱解,类似文献[25],当 $0 \leqslant s < t \leqslant T$ 时,有如下局部能量方程:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^4} |\boldsymbol{u}(t)|^2 \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^4} |\boldsymbol{u}(s)|^2 \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^4 \times (s,t)} |\boldsymbol{u}|^2 \partial_t \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^4 \times (s,t)} |\boldsymbol{u}|^2 \boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + 2\int_{\mathbb{R}^4 \times (s,t)} \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t - \\ &\quad 2\nu\int_{\mathbb{R}^4 \times (s,t)} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \phi \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t - 2\nu\int_{\mathbb{R}^4 \times (s,t)} \boldsymbol{u} \otimes \nabla\phi : \nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{8}$$

这里 $\phi \in C_0^\infty((\mathbb{R}^4 \times [0,T]) \backslash S)$ 是试验函数,其中 S 是奇异集(见定义 3).记方程(8)中各项为

$$A - B - C = D + 2P - 2\nu E - 2\nu F. \tag{9}$$

本节主要目的是在试验函数 ϕ 中找出一个序列 $\{\phi_\delta\}_{\delta>0}$,使得当 $\delta \to 0$ 时,A,B 和 E 分别收敛到式(4)各项;C,F 和 $D + 2P$ 趋于 0,从而得到 p 和 q 的取值范围使得能量等式(4)成立.

给定一个 Leray-Hopf 弱解 $\boldsymbol{u}$ 和奇异集 S,在试验函数中找到一个序列 $\{\phi_\delta\}_{\delta>0}$,满足如下两个条件:

(i) $\sup \phi_\delta \subset (\mathbb{R}^4 \times [0,T]) \backslash S$, $\phi_\delta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^4 \times [0,T])$; (10)

(ii) $0 \leqslant \phi_\delta \leqslant 1$, $\delta \to 0$, $\phi_\delta \to 1$. (11)

对于 A,B 和 E 的极限,若 $\boldsymbol{u} \in L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$,由控制收敛定理,得

$$\lim_{\delta\to 0}(A - B) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^4 \times \{t\}} |\boldsymbol{u}|^2 \phi_\delta \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^4 \times \{t\}} |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

即 A 和 B 分别收敛到式(4)中的两项：$\int_{\mathbb{R}^4\times\{t\}}|\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 和$\int_{\mathbb{R}^4\times\{0\}}|\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.同理可得,$E$ 收敛到式(4)中的$\int_{\mathbb{R}^4\times(0,T)}|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$.

下文用 $[-1,0]$ 来代替区间 $[0,T]$,0是临界点,假设$S\subset\mathbb{R}^4\times\{0\}$.为使$C,D+2P$和$F$趋于0,记$B_r(\boldsymbol{x})$表示开球$\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^4:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r\}$,取有限个$\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^4,r_i\in(0,\delta),\delta\in(0,1)$,对所有$i$,使得$S\subset\cup_iB_{r_i}(\boldsymbol{x}_i)$且$\sum_i^\infty r_i{}^d\leqslant H_dS+1$,其中$H_dS$表示$S$的$d$维 Hausdorff 测度.记$I_i=(-2r_i^\alpha,2r_i^\alpha)$,圆柱体$Q_i=B_{r_i}(\boldsymbol{x}_i)\times(-r_i^\alpha,r_i^\alpha)$,其中$\alpha>0$.取截断函数为

$$\varphi(w)=\begin{cases}1, & |w|<1.1,\\ 0, & |w|>1.9.\end{cases}\tag{12}$$

令$\phi_i=\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|/r_i)\varphi(t/r_i^\alpha)$,定义$\phi=1-\sup_i\phi_i$,用$Q^*$表示$\partial\phi$在$I_i=(-2r_i^\alpha,2r_i^\alpha)$上的紧支撑.当$\delta\to0$时,$\phi_\delta\to1$, Q^* 的 Lebesgue 测度趋于0.参考文献[26]中的定理4.13,有

$$|\partial\phi(\boldsymbol{x},t)|\leqslant\sup_i|\partial\phi_i(\boldsymbol{x},t)|.$$

因此,对任意的$a>0$,有

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4}|\partial_t\phi(\boldsymbol{x},t)|^a\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sum_i\int_{\mathbb{R}^4}|\partial_t\phi_i(\boldsymbol{x},t)|^a\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sum_i r_i^{-\alpha a+4}\chi_{I_i}(t),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x},t)|^a\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sum_i\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi_i(\boldsymbol{x},t)|^a\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sum_i r_i{}^{-a+4}\chi_{I_i}(t).\end{cases}\tag{13}$$

通过构建上面的试验函数ϕ,可得以下引理(其证明见文献[19]).

引理 1　由上文已知的d,δ,r_i,I_i,令σ和s是正数,假设$H=\sum_i r_i^d$是有限的,当$s\geqslant1,s(\sigma+d)\leqslant\alpha$或者$s<1,s(\sigma+d)<\alpha$时,有

$$\int\Big(\sum_i r_i^{-\sigma}\chi_{I_i}(t)\Big)^s\mathrm{d}t\lesssim H^s,\tag{14}$$

其中,常数s不依赖于δ.另外,当$d=0$时,若$s\sigma\leqslant\alpha$,则式(14)仍成立.

3　主要结果的证明

如第2节所述,用$[-1,0]$来代替区间$[0,\mathrm{T}]$.下面利用式(13)和引理1来分别估计C,F和$D+2P$.首先,对于C,由 Hölder 不等式,对任意的$p,q\geqslant2$,有

$$\begin{aligned}|C|\leqslant&\int_{-1}^0\Big(\int_{\mathbb{R}^4}(|\boldsymbol{u}|^2)^{p/2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{2/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^4}|\partial_t\phi|^{p/(p-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{(p-2)/p}\mathrm{d}t\leqslant\\ &\Big(\int_{-1}^0\Big(\int_{\mathbb{R}^4}|\boldsymbol{u}|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{q/p}\mathrm{d}t\Big)^{1/q}\Big(\int_{-1}^0\Big(\int_{\mathbb{R}^4}|\boldsymbol{u}|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{q/p}\mathrm{d}t\Big)^{1/q}\times\\ &\Big(\int_{-1}^0\Big(\int_{\mathbb{R}^4}|\partial_t\phi|^{p/(p-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{q(p-2)/(p(q-2))}\mathrm{d}t\Big)^{(q-2)/q}\leqslant\\ &\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^q(I;L^p)}\Big(\int_{-1}^0\Big(\int_{\mathbb{R}^4}|\partial_t\phi|^{p/(p-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{q(p-2)/(p(q-2))}\mathrm{d}t\Big)^{(q-2)/q}\leqslant\\ &\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^q(I;L^p)}\Big(\int_{-1}^0\Big(\sum_i r_i^{-\alpha p/(p-2)+4}\chi_{I_i(t)}\Big)^{q(p-2)/(p(q-2))}\mathrm{d}t\Big)^{(q-2)/q}.\end{aligned}\tag{15}$$

若$q<\infty$,当$\delta\to0$时,区间I的测度$|I|$趋于0,故$\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^q(I;L^p)}$趋于0.为使$C$趋于0,只须证当$\delta\to0$时,

$$\Big(\int_{-1}^0\Big(\sum_i r_i^{-\alpha p/(p-2)+4}\chi_{I_i(t)}\Big)^{q(p-2)/(p(q-2))}\mathrm{d}t\Big)^{(q-2)/q}$$

有界.为此,令

$$\sigma=\frac{\alpha p}{p-2}-4,\ s=\frac{q(p-2)}{p(q-2)}.$$

根据引理1,当$s\geqslant1$时,p和q须满足

$$\frac{\alpha}{q}+\frac{4-d}{p}\leqslant\frac{4-d}{2},\qquad p\geqslant q\geqslant 2. \tag{16}$$

另一方面,当 $s<1$ 时,则 p 和 q 须满足

$$\frac{\alpha}{q}+\frac{4-d}{p}<\frac{4-d}{2},\qquad q>p\geqslant 2. \tag{17}$$

结合式(16)和(17),得 C 趋于 0.

对于 F, 有

$$|F|\leqslant\int_{Q^*}|\boldsymbol{u}|^2|\nabla\phi|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+\int_{Q^*}|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \tag{18}$$

已知 $\boldsymbol{u}\in L^2H^1$,当 $\delta\to 0$ 时,$|Q^*|$ 趋于 0,可得式(18)最后一项趋于 0.由 Hölder 不等式,对任意的 $p,q\geqslant 2$, 有

$$\int_{Q^*}|\boldsymbol{u}|^2|\nabla\phi|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\leqslant\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^q(I;L^p)}\left(\int_{-1}^0\Big(\sum_i r_i^{-2p/(p-2)+4}\chi_{I_i(t)}\Big)^{q(p-2)/(p(q-2))}\mathrm{d}t\right)^{(q-2)/q},$$

类似于 C 的估计,由引理 1,得

$$\frac{\alpha}{q}+\frac{4-d}{p}\leqslant\frac{2-d+\alpha}{2},\qquad p\geqslant q\geqslant 2, \tag{19}$$

$$\frac{\alpha}{q}+\frac{4-d}{p}<\frac{2-d+\alpha}{2},\qquad q>p\geqslant 2, \tag{20}$$

其中

$$\sigma=\frac{2p}{p-2}-4,\ s=\frac{(p-2)q}{p(q-2)}.$$

结合式(19)和(20),得 F 趋于 0.

对于 $D+2P$,下面就 $p\geqslant 3$ 和 $p<3$ 两种情形分别讨论.

假设 $p,q\in[3,\infty)$,由 $\|\boldsymbol{u}\pi\|_{L^{q/3}L^{p/3}}\lesssim\|\boldsymbol{u}\|^3_{L^qL^p}$ 和 Hölder 不等式,得

$$\begin{aligned}|D+2P|&\lesssim\int_{\mathbb{R}^4\times(-1,0)}|\boldsymbol{u}|^3|\nabla\phi|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\lesssim\\&\int_{-1}^0\left(\int_{\mathbb{R}^4}(|\boldsymbol{u}|^3)^{p/3}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{3/p}\left(\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla\phi|^{p/(p-3)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{(p-3)/p}\mathrm{d}t\lesssim\\&\|\boldsymbol{u}\|^3_{L^q(I;L^p)}\left(\int_{-1}^0\Big(\sum_i r_i^{-p/(p-3)+4}\chi_{I_i(t)}\Big)^{(p-3)q/(p(q-3))}\mathrm{d}t\right)^{(q-3)/q}.\end{aligned} \tag{21}$$

类似于 C 的估计,由引理 1,得

$$\frac{\alpha}{q}+\frac{4-d}{p}\leqslant\frac{3-d+\alpha}{3},\qquad p\geqslant q\geqslant 3, \tag{22}$$

$$\frac{\alpha}{q}+\frac{4-d}{p}<\frac{3-d+\alpha}{3},\qquad q>p\geqslant 3, \tag{23}$$

其中

$$\sigma=\frac{p}{p-3}-4,\ s=\frac{(p-3)q}{p(q-3)}.$$

结合式(22)和(23),得 $D+2P$ 趋于 0.

当 $p<3$ 时,由插值不等式,若

$$\frac{1}{3}=\frac{\beta}{4}+\frac{1-\beta}{p}\Leftrightarrow\beta=\frac{12-4p}{12-3p}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{\sigma}=1-\frac{3\beta}{2}-\frac{3(1-\beta)}{q}=\frac{2pq-4q-2p}{8q-2pq}, \tag{25}$$

得

$$|D+2P|\lesssim\|\boldsymbol{u}\|^{3\beta}_{L^2L^4}\|\boldsymbol{u}\|^{3(1-\beta)}_{L^qL^p}\|\nabla\phi\|_{L^\sigma L^\infty}, \tag{26}$$

其中

$$\| \nabla\phi \|^{\sigma}_{L^{\sigma}L^{\infty}} = \int \sup_i \left(r_i^{-\sigma}\chi_{I_i}(t) \right) \mathrm{d}t \leqslant \int \sup_j \left(2^{j\sigma}\chi_{I_j}(t) \right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_j 2^{-j(\alpha-\sigma)}. \tag{27}$$

将式(25)代入式(27),得

$$\frac{\alpha}{q} + \frac{4+2\alpha}{p} < 1+\alpha, \qquad p < 3 \leqslant q. \tag{28}$$

上面的约束条件(16)和(17)、(19)和(20)、(22)和(23)分别表示三组平行线: 线 C、线 F 和线 DP.线 C 围绕点 $L^{\infty}L^{2}$(即点(1/2,0), 后面类似) 旋转, 线 F 围绕点 $L^{2}L^{(8-2d)/(2-d)}$ 旋转, 且都随着 α 增大而逆时针旋转.当 $d \leqslant 2$ 时,有 $\alpha = (6-d)/2$,此时线 C 和线 DP 重合;当 $d > 2$ 时,得 $\alpha = 2$,此时线 C 和线 F 重合.因此,为保证能量守恒,p 和 q 须满足如下条件:

$$\frac{8-2d}{p} + \frac{6-d}{q} \leqslant 4-d, \qquad 3 \leqslant p,\ q \leqslant p,\ d \leqslant 2, \tag{29}$$

$$\frac{8-2d}{p} + \frac{6-d}{q} < 4-d, \qquad 3 \leqslant p < q,\ d \leqslant 2, \tag{30}$$

$$\frac{4-d}{p} + \frac{2}{q} < \frac{4-d}{2}, \qquad 3 \leqslant p < q,\ 2 < d < 4. \tag{31}$$

当 $p \geqslant 3$ 时,若 $0 \leqslant d < 2$,考虑线 C 存在分离点 $L^{(14-3d)/(4-d)}L^{(14-3d)/(4-d)}$,若 $3 \leqslant p < (14-3d)/(4-d)$,线 C 为虚线,若 $p > (14-3d)/(4-d)$,线 C 为实线;当 $d = 2$ 时,线 C、线 F 和线 DP 均为直线,$2/p + 2/q = 1$; 若 $2 < d < 4$,最优直线在区域[L^4L^4,$L^{\infty}L^3$] 内相交于点 $L^{(2d+4)/(4-d)}L^{(2d+4)/d}$.

当 $p < 3$ 时,线 C 和线 F 的约束条件不变,此时线 DP 为条件(28).联立式(16)、(17)和(28),并消去 α,得到曲线:

$$-2(4-d)x^2 + 2(4-d)x + dxy + \frac{(2-d)\,y}{2} - \frac{4-d}{2} = 0. \tag{32}$$

若 $d = 2$, 代入式(32),得

$$2xy + 4x - 4x^2 = 1 \Rightarrow y = 2x - 2 + \frac{1}{2x}, \qquad x \geqslant \frac{1}{3},$$

此式为定理 1 的式(7)(见图 3).

当 $2 < d < 4$ 时,线 C 和线 F 重合,即式(31),其中线 C 与曲线(32)相交于点 $L^{(8+2d)/(4-d)}L^{(8+2d)/(d+2)}$.

图 1—4 分别表示奇异集 Hausdorff 维数 $d = 0$,$0 < d < 2$,$d = 2$ 和 $2 < d < 4$ 的情况.图中条纹加深部分表示 p 和 q 新的取值范围.

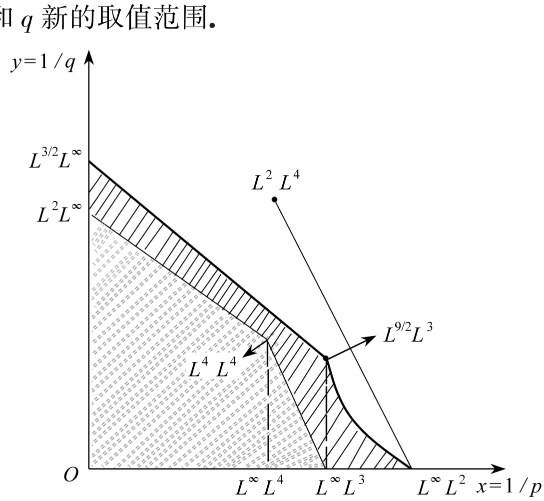

图 1 $d = 0$

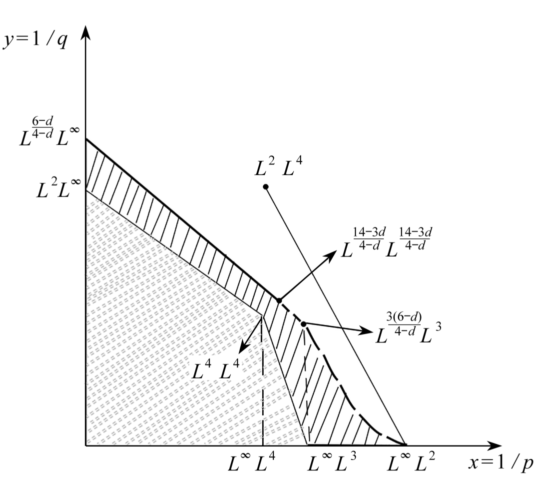

图 2 $0 < d < 2$

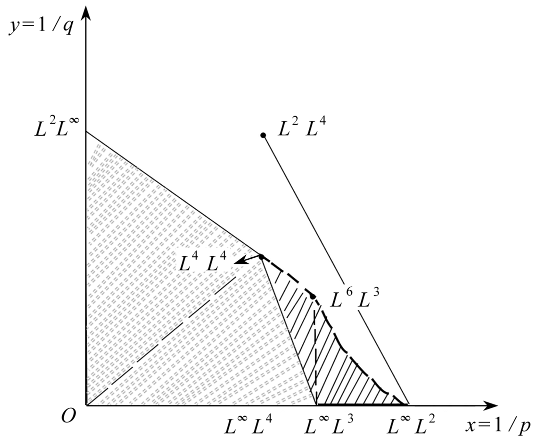

图 3　$d = 2$

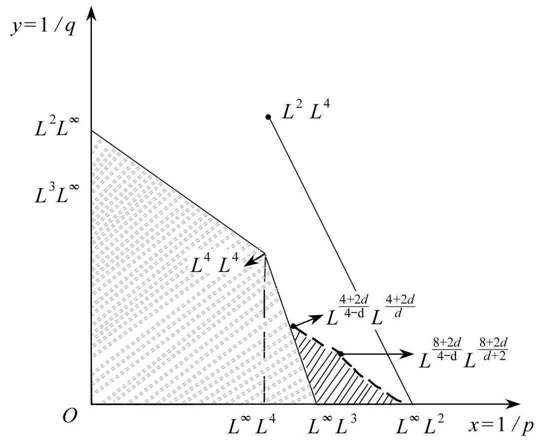

图 4　$2 < d < 4$

4　结　　论

具黏性不可压缩 Navier-Stokes 方程是流体运动的基本模型方程,有着重要的实际应用背景.Wu 在文献[15]中研究了四维不可压缩 Navier-Stokes 方程的部分正则性,当该方程的 Leray-Hopf 弱解存在 Hausdorff 维数小于 4 的奇异集时,我们利用 Wu[15]的结果,找到了四维空间中新的 $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}^4))$ 条件,从而解决了四维空间中紧性不足问题.关于 Navier-Stokes 方程适当弱解的能量守恒在三维和四维空间中已经有了很多研究,对于更高维空间里 Navier-Stokes 方程适当弱解的能量守恒的情形有待进一步研究.

参考文献(References):

[1]　FEFFERMAN C L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation[J]. The millennium prize problems, 2000, **57**: 67.

[2]　施惟慧. Navier-Stokes 方程稳定性研究(Ⅰ)[J].应用数学和力学, 1994, **15**(9): 821-822.(SHI Weihui. Stability study of Navier-Stokes equation (Ⅰ)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **15**(9): 821-822.(in Chinese))

[3]　施惟慧, 方晓佐. Navier-Stokes 方程稳定性研究(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(10): 879-883.(SHI Weihui, FANG Xiaozuo. Stability study of Navier-Stokes equation (Ⅱ)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **15**(10): 879-883.(in Chinese))

[4]　FEIREISL E, NOVOTNY A, PETZELTOVÁ H. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2001, **3**(4): 358-392.

[5]　王金城, 齐进, 吴锤结. 不可压缩 Navier-Stokes 方程最优动力系统建模和分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(1): 1-15.(WANG Jincheng, QI Jin, WU Chuijie. Modeling and analysis of the incompressible Navier-Stokes equation optimal dynamical system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(1): 1-15.(in Chinese))

[6]　ZHANG Z, CHEN Q, MIAO C. On the uniqueness of weak solutions for the 3D Navier-Stokes equations[J]. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, 2009, **26**(6): 2165-2180.

[7]　LERAY J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace[J]. *Acta Mathematica*, 1934, **63**(1): 193-248.

[8]　HOPF E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet[J]. *Mathematische Nachrichten*, 1950, **4**(1/6): 213-231.

[9]　MASUDA K. Weak solutions of Navier-Stokes equations[J]. *Tohoku Mathematical Journal: Second Series*, 1984, **36** (4): 623-646.

[10]　FOIAS C. Une remarque sur l'unicité des solutions deséquations de Navier-Stokes en dimension n[J]. *Bulle-*

tin de la Société Mathématique de France, 1961, **89**: 1-8.

[11] SERRIN J. *The Initial-Value Problem for the Navier-Stokes Equations*[M]. Madison: The University of Wisconsion Press, 1963.

[12] SCHEFFER V. Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equations[J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 1976, **66**(2): 535-552.

[13] SCHEFFER V. The Navier-Stokes equations in space dimension four[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1978, **61**(1): 41-68.

[14] SCHEFFER V. The Navier-Stokes equations on a bounded domain[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1980, **73**(1): 1-42.

[15] WU B. Partially regular weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathscr{R}^4\times[0,\infty]$[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2021, **239**(3): 1771-1808.

[16] DONG H, DU D. Partial regularity of solutions to the four-dimensional Navier-Stokes equations at the first blow-up time[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2007, **273**(3): 785-801.

[17] WANG Y, WU G. A unified proof on the partial regularity for suitable weak solutions of non-stationary and stationary Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2014, **256**(3): 1224-1249.

[18] ONSAGER L. Statistical hydrodynamics[J]. *Il Nuovo Cimento*, 1949, **6**(2): 279-287.

[19] CAFFARELLI L, KOHN R, NIRENBERG L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1982, **35** (6): 771-831.

[20] LIONS J L. Sur la régularité et l' unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes[J]. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 1960, **30**: 16-23.

[21] LADYŽENSKAJA O A, SOLONNIKOV V A, URAL' CEVA N N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*[M]. American Mathematical Soc, 1988.

[22] KUKAVICA I. Role of the pressure for validity of the energy equality for solutions of the Navier-Stokes equation[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2006, **18**(2): 461-482.

[23] SHINBROT M. The energy equation for the Navier-Stokes system[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1974, **5**(6): 948-954.

[24] LESLIE T M, SHVYDKOY R. Conditions implying energy equality for weak solutions of the Navier-Stokes equations[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2018, **50**(1): 870-890.

[25] SHVYDKOY R. On the energy of inviscid singular flows[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, **349** (2): 583-595.

[26] EVANS L C, GARIEPY R F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*[M]. Routledge, 2018.