

矩形边界越流承压含水层中非完整井稳定流解析解*

孙前林, 谭卫佳, 徐蓓艺, 王旭东

(南京工业大学 岩土工程研究所, 南京 211816)

摘要: 针对矩形边界越流承压含水层中非完整井抽水引起的复杂地下水流动问题,建立了直角坐标系下越流承压含水层非完整井稳定流数学模型.通过对地下水流动计算模型的有限 Fourier 变换和有限 Fourier 变换域降深函数的逆变换,提出了不同类型边界条件下越流承压含水层非完整井三维稳定流降深解析解.在验证降深解析解正确性的基础上,通过降深解析解计算精度的分析,并结合非完整井抽水条件下含水层地下水流动特性,给出了降深解析解满足计算精度要求的计算项数取值.探讨了含水层正交各向异性、抽水井完整性、井位布置等因素对含水层降深和地下水流动的影响规律,并利用工程案例阐明了降深解析解的工程适用性.

关键词: 矩形边界承压含水层; 非完整井; 三维稳定流; 直角坐标系; 解析解

中图分类号: TU470 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430398

Analytical Solutions of Steady Flow Toward a Partially Penetrating Well in a Rectangular Leaky-Confining Aquifer

SUN Qianlin, TAN Weijia, XU Beiyi, WANG Xudong
(Institute of Geotechnical Engineering, Nanjing Tech University,
Nanjing 211816, P.R.China)

Abstract: For the complicated problem of groundwater flow to a partially penetrating well in a rectangular confined aquifer, a mathematical model describing the groundwater flow to a partially penetrating well pumped at a constant rate in a rectangular leaky-confined aquifer, was established. The analytical solutions of the 3D steady flow in the Cartesian coordinate system under different boundary conditions, were derived through the finite Fourier transform and the inverse transform. After the verification of the analytical solution of drawdown, the number of calculation items satisfying the calculation accuracy requirement was given, based on the analysis of the calculation accuracy of the analytical solution and the characteristics of the groundwater flow to a partially penetrating well. Moreover, the effects of orthotropy, well integrity and well location on the drawdown and seepage fields, were discussed. The engineering examples demonstrate the applicability of the proposed analytical method.

Key words: rectangular confined aquifer; partially penetrating well; 3D steady flow; Cartesian coordinate system; analytical solution

* 收稿日期: 2022-12-21; 修订日期: 2023-05-06

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(41807189)

作者简介: 孙前林(1997—),男,硕士生(E-mail: 202061225023@njtech.edu.cn);

王旭东(1963—),男,教授(通讯作者. E-mail: cewxd@njtech.edu.cn).

引用格式: 孙前林, 谭卫佳, 徐蓓艺, 王旭东. 矩形边界越流承压含水层中非完整井稳定流解析解[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(8): 909-920.

0 引言

受含水层各向异性、边界条件和抽水井设置方式等因素的影响,抽水引起的含水层中地下水流动特征差异明显.1863年,Dupuit^[1]依据定水头圆岛模型,提出了均质、各向同性含水层中完整井稳定流公式.由于理想的圆岛模型缺乏工程应用的适应性,1870年,Thiem^[2]引入影响半径概念,建立了圆形边界承压含水层完整井稳定流计算 Thiem 模型,提出了承压含水层完整井地下水二维稳定流解析解.在此基础上,Hantush 和 Jacob^[3-5]进一步提出了考虑越流的承压含水层完整井降深解析解.针对非完整井抽水的地下水流动,Hantush^[6-7]研究了侧向无限越流承压含水层非完整井地下水模型,求得了井壁流量均匀分布的非完整井流解析解.为了描述圆形边界含水层中的地下水三维流动,Javandel^[8]、Chen 等^[9]利用有限 Fourier 余弦变换,在极坐标系下分别推导了各向同性、正交各向异性承压含水层非完整井抽水的三维稳定流解析解,丰富了承压含水层井流理论.

上述研究成果均基于极坐标系下地下水流动微分方程、圆形边界、中心布井的地下水计算模型,较好地反映了单井抽水的轴对称井流特征,但极坐标系下地下水流动解析解难以适应矩形边界含水层、多井、布井方式多样性等地下水流动问题的计算分析,在工程实践应用中存在局限性.为此,Daly 和 Morel-Seytoux^[10]建立了直角坐标系下非均质各向同性承压含水层地下水稳定流计算模型,利用二维有限 Fourier 变换,推导了承压含水层混合边界条件下无井流的地下水稳定流水头解析解.在此基础上,Yeo 等^[11]提出了矩形边界承压含水层多个完整井抽(注)水的稳定流降深解析解.针对均质各向同性承压含水层矩形边界的多样性,王旭东等^[12]利用有限 Fourier 变换分别推导了直角坐标系下定水头边界和隔水边界条件下完整井抽水的非稳定流降深解析解.Chan 等^[13]提出了矩形承压含水层在六类边界条件下的完整井非稳定流降深解析解,并通过算例与改进反映法进行了对比验证^[14],表明了有限 Fourier 变换法求解矩形边界承压含水层非稳定井流模型的可行性.

对于矩形边界承压含水层中的地下水井流问题,已有的研究成果在综合考虑含水层正交各向异性、非完整井、越流等因素对地下水流动的影响上仍然存在局限性.为此,本文通过构建直角坐标系下考虑含水层正交各向异性、非完整井、抽水井位置、越流等因素的地下水流动数学模型,利用有限 Fourier 余弦变换和有限复合 Fourier 变换,推导了不同类型边界条件下越流承压含水层中非完整井三维稳定流解析解,为合理开展矩形边界含水层的减压降水设计提供计算方法.

1 计算模型建立

直角坐标系下,承压含水层均质、正交各向异性、等厚且水平,初始地下水的水头水平.地下水流动服从 Darcy 定律,任意位置非完整井定流量抽水,水流沿井壁均匀进水,考虑含水层之间的越流补给,且越流强度与降深线性相关.图 1 为定水头边界条件下越流承压含水层非完整井的计算模型.在定水头边界条件下,以降深表示的越流承压含水层非完整井稳定流数学模型为

$$K_x \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + Q(z) \delta(x - x_w) \delta(y - y_w) - \frac{K'_z}{MM'} s = 0, \quad (1)$$

$$s|_{x=0} = s|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

$$s|_{y=0} = s|_{y=B} = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial s}{\partial z} \right|_{z=M} = 0, \quad (4)$$

$$Q(z) = \begin{cases} Q/l_w, & d \leq z \leq d + l_w, \\ 0, & 0 \leq z < d, d + l_w < z \leq M, \end{cases} \quad (5)$$

式中, s 为降深,m; K_x, K_y, K_z 分别为承压含水层横向、纵向和竖直向的渗透系数,m/d; K'_z 为弱透水层竖直向的渗透系数,m/d; L, B, M 分别为承压含水层的长度、宽度和厚度,m; M' 为弱透水层的厚度,m; Q 为单井抽水量,m³/d; d 为抽水井滤管到含水层顶板的距离,m; l_w 为抽水井滤管长度,m; (x_w, y_w) 为抽水井的位置坐

标, m ; $\delta(x - x_w), \delta(y - y_w)$ 为 Dirac 函数^[15-16], 用以描述抽水井的位置。

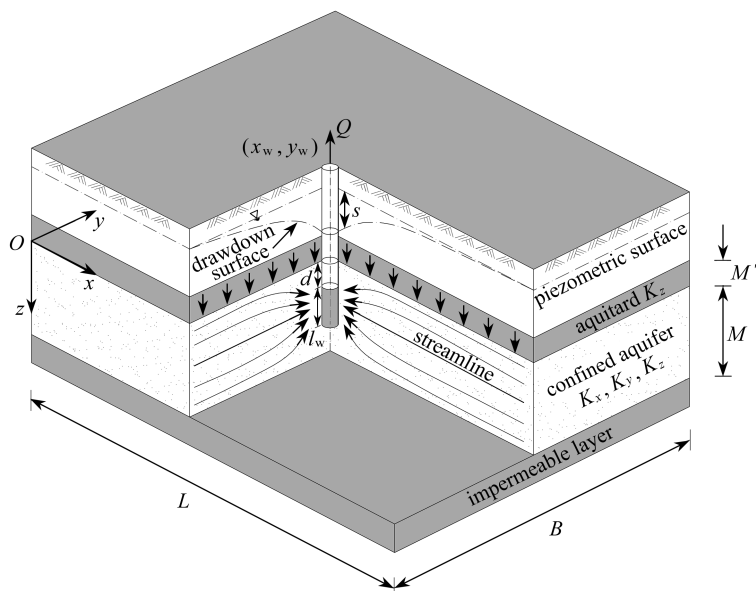


图 1 矩形边界越流承压含水层非完整井计算模型

Fig. 1 The calculation model for the partially penetrating well in a rectangular leaky-confined aquifer

2 计算模型求解

矩形边界越流承压含水层中非完整井抽水引起的地下水三维流动, 地下水流动控制方程(1)为关于空间变量 x, y, z 的二阶非齐次线性偏微分方程, 源汇项中流量式(5)为分段非连续函数. 首先利用有限 Fourier 变换法^[17]将二阶非齐次线性偏微分方程变换为常系数方程, 求得有限 Fourier 变换域中降深函数, 然后对降深函数进行逆变换得到实际空间域中的降深解析解^[18].

2.1 有限 Fourier 变换域降深函数

如式(5)所示, 非完整井的实管段封闭, 滤管段定流量 Q 均匀流入. 根据有限复合 Fourier 变换的适用条件, 首先需要数学模型做关于变量 z 的有限 Fourier 余弦变换^[19-20], 将数学模型转化为关于空间变量 x, y 的一维有限 Fourier 变换域中的数学模型.

关于空间变量 z 的有限 Fourier 余弦变换的表达式如下^[21-22]:

$$\bar{s}_k = \int_0^M s(x, y, z) \chi_k(\lambda_k z) dz. \tag{6}$$

由于承压含水层的顶底板均为隔水边界, 如式(4)所示, z 方向的特征函数 $\chi_k(\lambda_k z)$ 取为 $\cos(k\pi z/M)$, 相应的特征值为 $\lambda_k = k\pi/M$.

对地下水流动控制方程(1)和流动边界条件(2)、(3)进行有限 Fourier 余弦变换(变换过程见附录 A), 经有限 Fourier 变换后的二维地下水数学模型为

$$K_x \frac{\partial^2 \bar{s}_k}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \bar{s}_k}{\partial y^2} - \left(K_z \lambda_k^2 + \frac{K'_z}{MM'} \right) \bar{s}_k + Q \xi_k \delta(x - x_w) \delta(y - y_w) = 0, \tag{7}$$

$$\bar{s}_k \Big|_{x=0} = \bar{s}_k \Big|_{x=L} = 0, \tag{8}$$

$$\bar{s}_k \Big|_{y=0} = \bar{s}_k \Big|_{y=B} = 0, \tag{9}$$

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{M}{l_w k \pi} \left[\sin\left(\frac{k\pi(d + l_w)}{M}\right) - \sin\left(\frac{k\pi d}{M}\right) \right], & k \geq 1, \end{cases} \tag{10}$$

式中, \bar{s}_k 为一维有限 Fourier 余弦变换域中的降深函数, ξ_k 为非完整井参数.

有限 Fourier 变换域中二维地下水数学模型中的地下水流动方程(7)和边界条件(8)、(9)连续且齐次,

可对地下水流动方程(7)进行有限复合 Fourier 变换^[23-24]。关于空间变量 x, y 的有限复合 Fourier 变换的表达式如下^[25]：

$$\tilde{s}_{kmn} = \int_0^L \int_0^B \bar{s}_k(x, y) \varphi_m(\alpha_m x) \psi_n(\beta_n y) dx dy. \quad (11)$$

由于数学模型的外边界均为定水头边界, x, y 方向特征函数 $\varphi_m(\alpha_m x), \psi_n(\beta_n y)$ 分别取为 $\sin(m\pi x/L), \sin(n\pi y/B)$, 相应的特征值分别为 $\alpha_m = m\pi/L, \beta_n = n\pi/B$ 。根据边界条件(8)、(9)对控制方程(7)进行有限复合 Fourier 变换, 有限复合 Fourier 变换后的降深方程为

$$-K_x \alpha_m^2 \tilde{s}_{kmn} - K_y \beta_n^2 \tilde{s}_{kmn} - \left(K_z \lambda_k^2 + \frac{K'_z}{MM'} \right) \tilde{s}_{kmn} + Q \xi_k \varphi_m(\alpha_m x_w) \psi_n(\beta_n y_w) = 0. \quad (12)$$

式(12)是关于 \tilde{s}_{kmn} 的代数方程, 合并化简, 可得有限 Fourier 变换域中的降深函数:

$$\tilde{s}_{kmn} = \frac{Q \xi_k \theta_{mn}}{\beta_{kmn}^2}, \quad (13)$$

式中, \tilde{s}_{kmn} 为三维有限 Fourier 变换域中的降深函数, $\theta_{mn} = \varphi_m(\alpha_m x_w) \psi_n(\beta_n y_w)$, $\beta_{kmn}^2 = K_z \lambda_k^2 + K_x \alpha_m^2 + K_y \beta_n^2 + K'_z/(MM')$ 。

2.2 实际空间域降深解析解

实际空间中的降深解析解通过对 \tilde{s}_{kmn} 进行 z, x, y 方向的有限 Fourier 逆变换确定, 实际空间域中的降深 $s(x, y, z)$ 为

$$s(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_k(\lambda_k z) \varphi_m(\alpha_m x) \psi_n(\beta_n y)}{K(\lambda_k) M(\alpha_m) N(\beta_n)} \tilde{s}_{kmn}, \quad (14)$$

式中, $K(\lambda_k), M(\alpha_m), N(\beta_n)$ 分别为空间变量 z, x, y 方向特征函数的范数, 范数与边界条件有关, 根据特征函数确定, 参见附录 B。

将特征函数、特征值、范数、 \tilde{s}_{kmn} 代入式(14), 得到定水头边界条件下越流承压含水层非完整井稳定流降深解析解:

$$s = \frac{4Q}{MLB} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{kmn}^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right], \quad (15)$$

式中

$$\theta_{mn} = \sin(m\pi x_w/L) \sin(n\pi y_w/B), \beta_{mn}^2 = K_x(m\pi/L)^2 + K_y(n\pi/B)^2 + K'_z/(MM'),$$

$$\beta_{kmn}^2 = K_z(k\pi/M)^2 + K_x(m\pi/L)^2 + K_y(n\pi/B)^2 + K'_z/(MM').$$

式(15)中右侧第一项表示完整井抽水的降深分布, 第二项表示非完整井抽水对降深分布的贡献。采用叠加原理, 式(15)可推广至多抽注水井问题的求解。

越流承压含水层矩形边界条件具有多样性, 不同类型边界条件下越流承压含水层非完整井稳定流数学模型的解析解可参考本小节内容和附录 B 的推导, 相应数学模型的降深解析解见附录 C。

3 验证与讨论

3.1 解析解退化验证

为了验证矩形边界越流承压含水层中非完整井稳定流降深解析解的正确性, 我们在完整井抽水、无越流条件下, $\xi_k = 0, K'_z = 0$, 式(15)可转化为定水头边界条件下水平正交各向异性承压含水层完整井稳定流降深解:

$$s = \frac{4Q}{MLB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x_w/L) \sin(n\pi y_w/B)}{K_x(m\pi/L)^2 + K_y(n\pi/B)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right). \quad (16)$$

式(16)与文献[11]给出的水平正交各向异性承压含水层完整井稳定流降深解析解完全一致。式(16)的

各向同性 ($K_x = K_y$) 解析解也与文献[12-13]提出的各向同性承压含水层完整井非稳定流降深长期 ($t \rightarrow \infty$) 解析解相一致。

上述分析表明,本文提出的矩形边界越流承压含水层非完整井稳定流降深解析解,不仅可退化为考虑正交各向异性、完整井等因素的诸多已有解答,而且还能全面考虑承压含水层的越流、非完整井、任意位置布井等复杂因素。

3.2 解析解对比验证

为了验证不同坐标系下降深解析解的差异,求解越流和非完整井问题的正确性,我们利用有限元数值解和极坐标系下相关解析解^[2,5,9]等进行对比验证。

直角坐标系下,定水头边界越流承压含水层非完整井抽水计算模型为 $L = B = 500$ m, $M = 20$ m, $M' = 10$ m, $K_x = K_y = K_z = 5$ m/d, $K'_z = 0.02$ m/d, $d = 5$ m, $l_w = 10$ m, $Q = 1\ 000$ m³/d, 抽水井位置 $(x_w, y_w) = (250$ m, 250 m)。极坐标系下计算区域半径 $R = 250$ m, 抽水井位于圆心。

图 2 给出了计算模型的降深。Thiem 解^[2] 和 Hantush 解^[5] 分别是极坐标系下各向同性含水层完整井和各向同性越流含水层完整井的降深解。对比分析表明,两种坐标系下降深计算结果具有良好的一致性,当含水层有越流补给时,其降深较无越流时小。极坐标系下降深较直角坐标系下降深略小,其原因是圆形边界条件下地下水容易得到补给所致,而本文解析解与相同计算模型降深数值解的一致性较好,说明了两种坐标系下计算区域形状均会对地下水流动产生影响。

由图 3 给出的含水层顶面处的降深分布可知,降深解析解式(15)能较好地反映非完整井抽水时的降深分布,体现了抽水井完整性对含水层中地下水流动的影响。在距离抽水井一倍含水层厚度范围内,完整井和非完整井抽水时降深存在明显差异。对比分析发现,降深分布不仅与非完整井滤管长度有关,还与滤管位置 d 有关。在相同抽水量条件下,滤管越长,降深愈小;滤管越靠近含水层顶板,降深愈大。因此在矩形边界承压含水层地下水流动计算中,有必要考虑抽水井的完整性和滤管设置位置对地下水流动的影响。

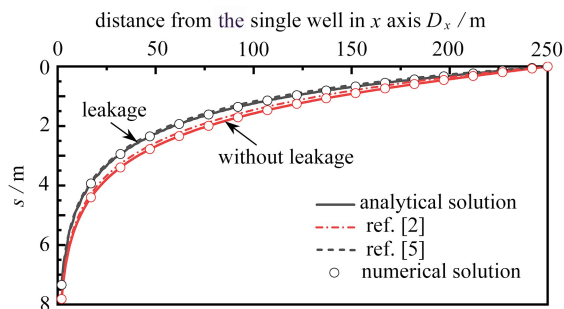


图 2 降深分布曲线(越流与无越流)

Fig. 2 Drawdown distribution curves(leakage and non-leakage)

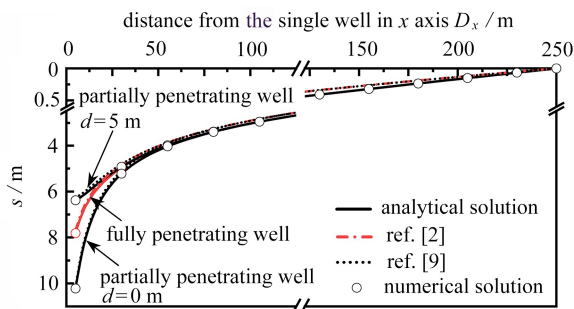


图 3 降深分布曲线(完整井与非完整井)

Fig. 3 Drawdown distribution curves (fully penetrating well and partially penetrating well)

3.3 降深解析解计算项数取值

由于式(15)降深解析解采用级数表示,计算项数直接影响降深的计算精度。为了分析 m, n 取值对降深计算精度的影响,定义降深的相对误差 Δ 为

$$\Delta = \frac{s_{SN} - s_{300}}{s_{300}} \times 100\%, \quad (17)$$

式中, s_{SN} 和 s_{300} 分别是计算项数 $m = n = T_{SN}$ 和计算项数 $m = n = 300$ 时的降深值, m 。

图 4、图 5 分别给出了完整井、非完整井的降深和相对误差与计算项数 T_{SN} 的关系。随着计算项数的增加,不同位置处的降深均渐趋稳定,相对误差呈现周期性减小趋势。计算结果显示,相同精度条件下,完整井降深的收敛速度比非完整井降深的收敛速度要快,离抽水井距离越近,降深的收敛速度越慢。从地下水的流动特征来看,由于抽水井附近降深大,地下水三维流动明显。由此可见,在计算这些区域降深时,需要更多的计算项数才能满足精度要求。若以相对误差 $\pm 2\%$ 的精度确定计算项数,对于完整井,计算点位于一倍含水层厚度以外取 100 项,一倍含水层厚度以内取 200 项,对于非完整井,需通过增加计算项数以满足计算精度要

求,计算项数可分别取150项和250项.

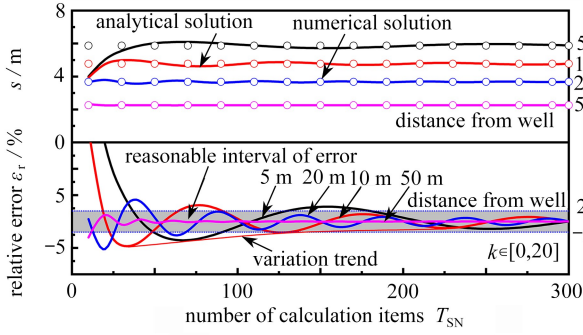


图4 降深及相对误差随计算项数的变化(完整井)

Fig. 4 Variations of drawdowns and relative errors with the number of calculation items (fully penetrating well)

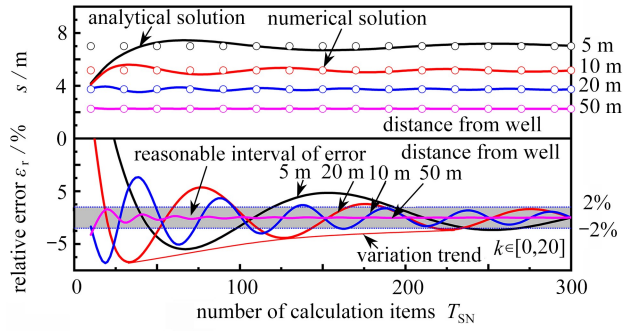


图5 降深及相对误差随计算项数的变化(非完整井)

Fig. 5 Variations of drawdowns and relative errors with the number of calculation items (partially penetrating well)

3.4 边界条件对降深的影响

图6给出了四周定水头边界(附录C中 case 1)、定水头边界与隔水边界对称组合条件(附录C中 case 3)下的降深分布曲线.两种情况下 x 方向均为定水头边界,降深分布基本一致,如图6中右侧降深曲线所示.受 y 方向边界条件影响(图6中左侧降深曲线显示),在隔水边界上产生降深,隔水边界条件下的降深较定水头边界条件下的降深要大,其正确性在文献[10]中得到验证.地下水降深的分布特征反映了含水层边界条件对地下水流动的影响,计算结果与有限元数值解的一致性良好,也进一步说明了降深解析解的正确性.

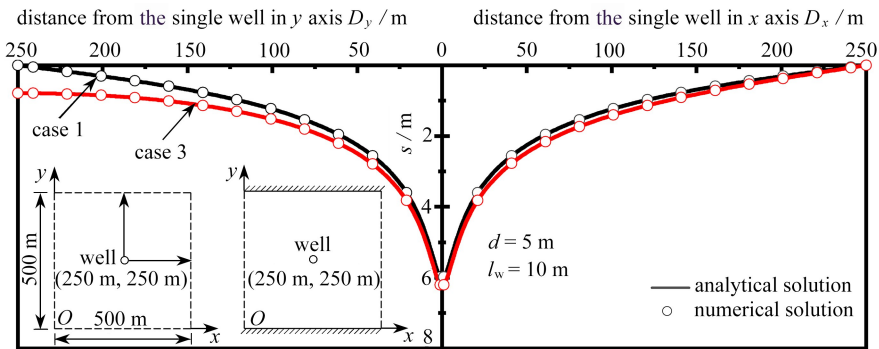


图6 降深分布曲线

Fig. 6 Drawdown distribution curves

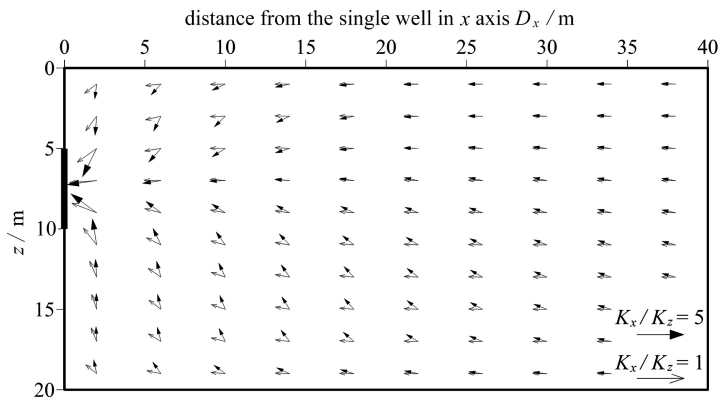


图7 承压含水层非完整井水力梯度(剖面)

Fig. 7 Gradients of the partially penetrating well in a confined aquifer(profile)

3.5 非完整井及含水层正交各向异性对地下水渗流场的影响

承压含水层完整井抽水时,地下水呈平面二维流动.非完整井抽水造成地下水的三维流动,尤其是在非完整井附近的三维流动更为明显.由图 7 给出的承压含水层非完整井抽水的水力梯度可知,非完整井附近的地下水竖向流动造成流线偏转并加长,使地下水呈现三维流动.此外,含水层的正交各向异性进一步加剧了地下水的三维流动特征.非完整井引起的地下水三维流动的影响范围大约为 $(1.5 \sim 2.0) \cdot \sqrt{K_x/K_z}$ 倍含水层厚度^[7].

3.6 抽水井位置对地下水渗流场的影响

图 8 为矩形边界越流承压含水层完整井抽水的降深等值线及水力梯度.与极坐标系下抽水井只能布置在模型中心、地下水呈现轴对称流动相比,直角坐标系下抽水井的布置更加灵活,能够充分反映抽水井位置、含水层的定水头边界和隔水边界对地下水流动的影响,降深解析解式 (15) 提高了工程实践的适用性.

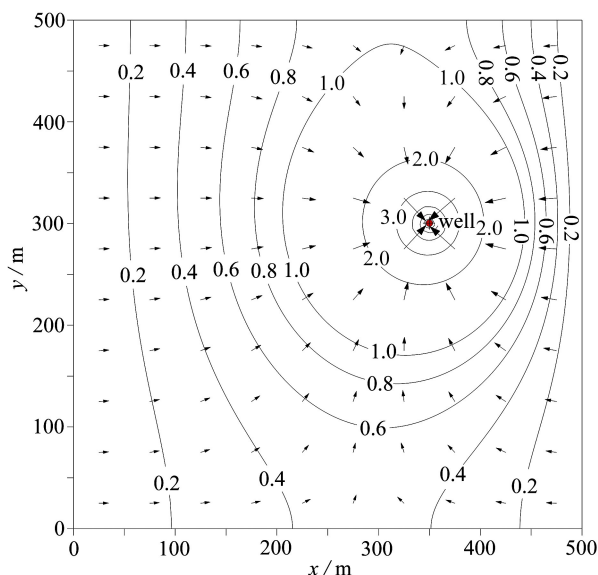


图 8 降深等值线及水力梯度(平面)

Fig. 8 Drawdown contours and gradients(plane)

4 工程案例分析

4.1 工程概况

天津某地铁车站场地进行了抽水试验^[26-27], 抽水目标承压含水层厚度 M 为 11 m, 渗透系数 K 为 0.59 m/d;上部弱透水层厚度 M'_I 为 7.2 m,下部弱透水层厚度 M'_{II} 为 3.9 m,上、下弱透水层的渗透系数 $K'_{zI} = K'_{zII} = 0.001$ m/d,非完整井滤管长度 l_w 为 10 m,抽水量 Q 为 24 m³/d.根据抽水试验确定的影响半径,地下水流动计算模型平面尺寸取为 200 m×200 m,模型外边界为定水头边界,非完整抽水井位于模型中心.抽水井和观测井的平面布置如图 9 所示,概化后的越流承压含水层非完整井稳定流计算模型如图 10 所示.

4.2 降深对比分析

根据线性偏微分方程叠加原理,当承压含水层上、下均为弱透水层时,定水头边界条件下越流承压含水层非完整井稳定流降深解析解为

$$s = \frac{4Q}{MLB} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{mn}}{\beta'^2_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_k \theta_{kmn}}{\beta'^2_{kmn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right], \quad (18)$$

式中

$$\theta_{mn} = \sin(m\pi x_w/L) \sin(n\pi y_w/B),$$

$$\beta_{mn}^2 = K_x(m\pi/L)^2 + K_y(n\pi/B)^2 + K'_{z1}/(MM'_I) + K'_{zII}/(MM'_{II}),$$

$$\beta_{kmn}^2 = K_z(k\pi/M)^2 + K_x(m\pi/L)^2 + K_y(n\pi/B)^2 + K'_{z1}/(MM'_I) + K'_{zII}/(MM'_{II}).$$

利用降深解析解式(18)对抽水试验进行了降深计算,计算结果如图11所示,降深计算值与实测值^[26-27]在数值大小和分布规律上都吻合良好,计算精度能够满足工程设计要求,也表明了矩形边界越流承压含水层非完整井计算模型在工程实践中的适用性。

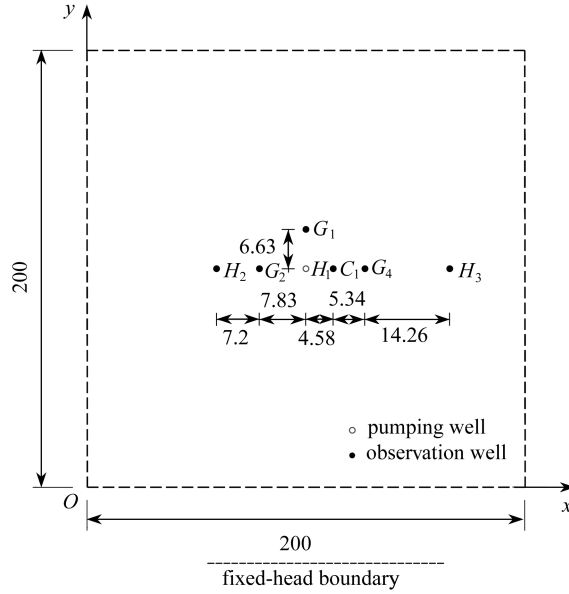


图9 抽水井和观测井布置(单位: m)

Fig. 9 The pumping well and the observation well layout(unit: m)

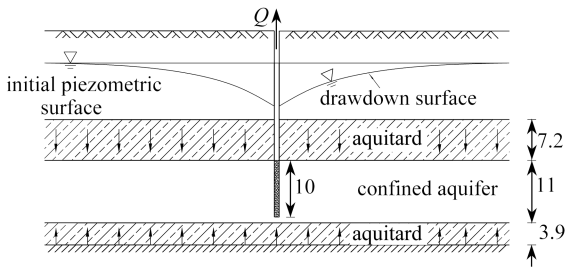


图10 地下水计算模型(单位: m)

Fig. 10 The groundwater calculation model(unit: m)

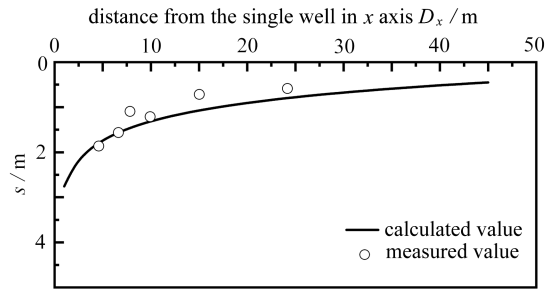


图11 降深计算值与实测值对比

Fig. 11 Comparison of calculated and measured values of the drawdown

5 结 论

1) 本文考虑了矩形边界越流承压含水层的正交各向异性、越流、非完整井、边界条件等因素对地下水流动的影响,利用有限 Fourier 变换和有限复合 Fourier 变换,提出了矩形边界越流承压含水层中非完整井稳定流降深求解方法,给出了不同类型边界条件下越流承压含水层中非完整井稳定流降深解析解。

2) 通过降深解析解的退化验证,与极坐标系下降深解析解的对比验证,阐明了本文降深解析解的正确性.为保证降深解析解的计算精度,根据抽水井的完整性、地下水流动特征以及计算点的位置,给出了降深解析解计算项数的合理取值。

3) 矩形边界越流承压含水层中非完整井稳定流降深解析解能够考虑正交各向异性、越流、非完整井、任意井位等因素,展现了良好的工程适用性,可以为工程实践中合理开展承压含水层非完整井减压降水设计提供计算方法,并能推广至抽注水多井问题的地下水流动问题分析中。

致谢 本文作者衷心感谢上海隧道工程有限公司科研项目(2021-SK-21)对本文的资助。

附录 A 地下水流动控制方程的有限 Fourier 变换

根据有限 Fourier 余弦变换公式(6),对地下水流动控制方程(1)的每一项进行变换,由于 z 方向的两端为隔水边界,特征函数为 $\cos(k\pi z/M)$,有限 Fourier 余弦变换的结果为

$$\int_0^M K_x \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = K_x \frac{\partial^2 \bar{s}_k}{\partial x^2}, \tag{A1}$$

$$\int_0^M K_y \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = K_y \frac{\partial^2 \bar{s}_k}{\partial y^2}, \tag{A2}$$

$$\int_0^M K_z \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = -K_z \left(\frac{k\pi}{M}\right)^2 \bar{s}_k = -K_z \lambda_k^2 \bar{s}_k, \tag{A3}$$

$$\int_0^M -\frac{K'_z}{MM'} s \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = -\frac{K'_z}{MM'} \bar{s}_k, \tag{A4}$$

$$\int_0^M Q(z) \delta(x - x_w) \delta(y - y_w) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = Q \delta(x - x_w) \delta(y - y_w) \int_d^{d+l_w} \frac{1}{l_w} \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = Q \delta(x - x_w) \delta(y - y_w) \xi_k, \tag{A5}$$

式中

$$\xi_k = \int_d^{d+l_w} \frac{1}{l_w} \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) dz = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{M}{l_w k \pi} \left[\sin\left(\frac{k\pi(d+l_w)}{M}\right) - \sin\left(\frac{k\pi d}{M}\right) \right], & k \geq 1. \end{cases}$$

将每一项的变换式(A1)–(A5)代入原地下水流动控制方程(1),即可得到有限 Fourier 余弦变换后的地下水流动控制方程(7)。

附录 B 特征函数、特征值、范数以及变换参数

特征函数、特征值、范数与数学模型边界条件有关,不同类型边界条件下特征函数、特征值、范数、变换参数的取值见表 B1。

表 B1 不同类型边界条件下的特征函数、特征值、范数以及变换参数

Table B1 Characteristic functions, eigenvalues, norms and transformation parameters under different boundary conditions

coordinate axis	boundary condition	eigenvalue	characteristic function	norm	transformation parameter
x	$s _{x=0} = s _{x=L} = 0$	$\alpha_m = \frac{m\pi}{L}$	$\varphi_m(\alpha_m x) = \sin(\alpha_m x)$	$M(\alpha_m) = \frac{L}{2} (m \geq 1)$	$m \in [1, \infty)$
	$\frac{\partial s}{\partial x} \Big _{x=0} = s _{x=L} = 0$	$\alpha_m = \frac{(2m+1)\pi}{2L}$	$\varphi_m(\alpha_m x) = \cos(\alpha_m x)$	$M(\alpha_m) = \frac{L}{2} (m \geq 0)$	$m \in [0, \infty)$
y	$s _{y=0} = s _{y=B} = 0$	$\beta_n = \frac{n\pi}{B}$	$\psi_n(\beta_n y) = \sin(\beta_n y)$	$N(\beta_n) = \frac{B}{2} (n \geq 1)$	$n \in [1, \infty)$
	$\frac{\partial s}{\partial y} \Big _{y=0} = \frac{\partial s}{\partial y} \Big _{y=B} = 0$	$\beta_n = \frac{n\pi}{B}$	$\psi_n(\beta_n y) = \cos(\beta_n y)$	$N(\beta_n) = \begin{cases} B (n = 0) \\ B/2 (n \geq 1) \end{cases}$	$n \in [0, \infty)$
	$\frac{\partial s}{\partial y} \Big _{y=0} = s _{y=B} = 0$	$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2B}$	$\psi_n(\beta_n y) = \cos(\beta_n y)$	$N(\beta_n) = \frac{B}{2} (n \geq 0)$	$n \in [0, \infty)$
z	$\frac{\partial s}{\partial z} \Big _{z=0} = \frac{\partial s}{\partial z} \Big _{z=M} = 0$	$\lambda_k = \frac{k\pi}{M}$	$X_k(\lambda_k z) = \cos(\lambda_k z)$	$K(\lambda_k) = \begin{cases} M (k = 0) \\ M/2 (k \geq 1) \end{cases}$	$k \in [0, \infty)$

附录 C 不同类型边界条件下降深解析解

表 C1 降深解析解(case 1~3)

Table C1 Analytic solutions of the drawdown(case 1~3)

case	boundary condition	schematic plan	$s(x, y, z)$
1	4 fixed-head boundary		$s = \frac{4Q}{BLM} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{mnk}^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right]$ $\theta_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x_w}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_w}{B}\right)$
2	4 impermeable boundary		$s = \frac{Q}{BLM} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{mn} \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{mn} \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{mnk}^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right]$ $\theta_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi x_w}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_w}{B}\right)$ $\varepsilon_{mn} = \begin{cases} 1, & m = 0, n = 0, \\ 2, & m = 0, n \geq 1 \text{ or } m \geq 1, n = 0, \\ 4, & m \geq 1, n \geq 1 \end{cases}$
3	2 fixed-head boundary (parallel) 2 impermeable boundary		$s = \frac{2Q}{BLM} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{mnk}^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right]$ $\theta_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x_w}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_w}{B}\right)$ $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1 \end{cases}$

$$\beta_{mnk}^2 = K_x \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + K_y \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 + K_z \left(\frac{k\pi}{M}\right)^2 + \frac{K'_z}{MM'}, \beta_{mn}^2 = K_x \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + K_y \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 + \frac{K'_z}{MM'}$$

表 C2 降深解析解(case 4)

Table C2 Analytic solutions of the drawdown(case 4)

case	boundary condition	schematic plan	$s(x, y, z)$
4	2 fixed-head boundary 2 impermeable boundary		$s = \frac{4Q}{BLM} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2B}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{mnk}^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right]$ $\theta_{mn} = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x_w}{2L}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y_w}{2B}\right)$

$$\beta_{mnk}^2 = K_x \left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}\right)^2 + K_y \left(\frac{(2n+1)\pi}{2B}\right)^2 + K_z \left(\frac{k\pi}{M}\right)^2 + \frac{K'_z}{MM'}, \beta_{mn}^2 = K_x \left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}\right)^2 + K_y \left(\frac{(2n+1)\pi}{2B}\right)^2 + \frac{K'_z}{MM'}$$

表 C3 降深解析解 (case 5,6)

Table C3 Analytic solutions of the drawdown (case 5,6)

case	boundary condition	schematic plan	$s(x, y, z)$
5	1 fixed-head boundary 3 impermeable boundary		$s = \frac{2Q}{BLM} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + \right.$ $\left. 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{mnk}^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right]$ $\theta_{mn} = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x_w}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_w}{B}\right)$ $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1 \end{cases}$
6	3 fixed-head boundary 1 impermeable boundary		$s = \frac{4Q}{BLM} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta_{mn}}{\beta_{mn}^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) + \right.$ $\left. 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi_k \theta_{mn}}{\beta_{mnk}^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{M}\right) \right]$ $\theta_{mn} = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x_w}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_w}{B}\right)$
$\beta_{mnk}^2 = K_x \left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}\right)^2 + K_y \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 + K_z \left(\frac{k\pi}{M}\right)^2 + \frac{K'_z}{MM}, \beta_{mn}^2 = K_x \left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}\right)^2 + K_y \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 + \frac{K'_z}{MM'}$			

参考文献 (References):

[1] DUPUIT P J. *Études Théoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux Dans les Canaux Découverts et à Travers les Terrains Perméables; Avec des Considérations Relatives au Régime des Grandes Eaux, au Débouché à Leur Donner, et à la Marche des Alluvions Dans les Rivières à Fond Mobile*[M]. Paris: Dunod éditeur, 1863.

[2] THIEM A. Die ergiebigkeit artesischer bohrlöcher, schachtbrunnen und filtergalerien[J]. *Journal fur Gasbeleuchtung und Wasserversorgung*, 1870, **13**: 450-467.

[3] HANTUSH M S, JACOB C E. Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer[J]. *Eos Transactions American Geophysical Union*, 1955, **36**(1): 95-100.

[4] JACOB C E. Radial flow in a leaky artesian aquifer[J]. *Eos Transactions American Geophysical Union*, 1946, **27**(2): 198-208.

[5] HANTUSH M S, JACOB C E. Steady three-dimensional flow to a well in a two-layered aquifer[J]. *Eos Transactions American Geophysical Union*, 1958, **36**(2): 286-292.

[6] HANTUSH M S. Drawdown around a partially penetrating well[J]. *Journal of the Hydraulics Division*, 1961, **127**(1): 83-98.

[7] HANTUSH M S. *Hydraulics of wells*[M]//*Advances in Hydroscience*. New York: Academic Press, 1964: 281-432.

[8] JAVANDEL I. Analytical solutions in subsurface fluid flow[J]. *Geological Society of America*, 1982, **189**: 223-235.

[9] CHEN J S, WU C L, LIU C W. Analysis of contaminant transport towards a partially penetrating extraction well in an anisotropic aquifer[J]. *Hydrological Processes*, 2010, **24**(15): 2125-2136.

[10] DALY C J, MOREL-SEYTOUX H J. An integral transform method for the linearized Boussinesq groundwater flow equation[J]. *Water Resources Research*, 1981, **17**(4): 875-884.

[11] YEO I W, LEE K K. Analytical solution for arbitrarily located multiwells in an anisotropic homogeneous confined aquifer[J]. *Water Resources Research*, 2003, **39**(5): 1133.

- [12] 王旭东, 殷宗泽, 宰金珉. 有限区域地下水非稳定流解析解[J]. 南京工业大学学报, 2008, **30**(2): 45-50. (WANG Xudong, YIN Zongze, ZAI Jinmin. Analytical solution of unsteady groundwater flow in limited areas [J]. *Journal of Nanjing Tech University*, 2008, **30**(2): 45-50. (in Chinese))
- [13] CHAN Y K, MULLINEUX N, REED J R. Analytic solutions for drawdowns in rectangular artesian aquifers[J]. *Journal of Hydrology*, 1976, **31**(1/2): 151-160.
- [14] CHAN Y K. Improved image-well technique for aquifer analysis[J]. *Journal of Hydrology*, 1976, **29**(1/2): 149-164.
- [15] YANG L Z, HE F, LI Y, et al. Three-dimensional steady-state closed form solution for multilayered fluid-saturated anisotropic finite media due to surface/internal point source[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2021, **42**(1): 17-38.
- [16] 姬安召, 王玉风, 张光生. 不对称裂缝单井渗流模型的 Green 函数构造方法[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(4): 424-434. (JI Anzhao, WANG Yufeng, ZHANG Guangsheng. A Green's function construction method of the single well seepage model for asymmetric fractures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(4): 424-434. (in Chinese))
- [17] 黄飞, 马永斌. 移动热源作用下基于分数阶应变的三维弹性体热-机响应[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(4): 373-384. (HUANG Fei, MA Yongbin. Thermomechanical responses of 3D media under moving heat sources based on fractional-order strains[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(4): 373-384. (in Chinese))
- [18] 孔祥言. 高等渗流力学[M]. 3版. 合肥: 中国科技大学出版社, 2020. (KONG Xiangyan. *Advanced Seepage Mechanics*[M]. 3rd ed. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2020. (in Chinese))
- [19] 段汕. 有限 Fourier 变换在偏微分方程中的应用[J]. 中南民族学院学报, 1999, **18**(4): 62-67. (DUAN Shan. Application of finite Fourier transform in partial differential equation[J]. *Journal of South Central College for Nationalities*, 1999, **18**(4): 62-67. (in Chinese))
- [20] 姬安召. Newton-非 Newton 幂律流双区复合水平井压力动态特征分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(5): 562-573. (JI Anzhao. Transient pressure analysis of bi-zone composite horizontal wells with non-Newtonian and Newtonian power-law fluid flow[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(5): 562-573. (in Chinese))
- [21] DAVIS H F. *Fourier Series and Orthogonal Functions*[M]. New York: Dover Publications, 1989.
- [22] SNEDDON I N. *The Use of Integral Transforms*[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [23] CHURCHILL R V. *Operational Mathematics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [24] 杨天行, 付泽周, 刘金山, 等. 地下水流向井的非稳定运动的原理及计算方法[M]. 北京: 地质出版社, 1980. (YANG Tianxing, FU Zezhou, LIU Jinshan, et al. *Principles and Calculation Methods of Unsteady Groundwater Flow to Wells*[M]. Beijing: Geological Publishing House, 1980. (in Chinese))
- [25] DALY C J, MOREL-SEYTOUX H J. An integral transform method for the linearized Bossinesq groundwater flow equation[J]. *Water Resources Research*, 1981, **17**(4): 875-884.
- [26] 郑刚, 曹剑然, 程雪松, 等. 天津第二粉土粉砂微承压含水层回灌试验研究[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(4): 592-601. (ZHENG Gang, CAO Jianran, CHENG Xuesong, et al. Experimental study on artificial recharge of second Tianjin silt and silty sand micro-confined aquifer[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, **40**(4): 592-601. (in Chinese))
- [27] 曹剑然. 天津地区基坑工程中承压层回灌控沉理论与技术研究[D]. 博士学位论文. 天津: 天津大学, 2018. (CAO Jianran. Study on the theory and technology of recharge and subsidence control of confined layer in excavation engineering in Tianjin area[D]. PhD Thesis. Tianjin: Tianjin University, 2018. (in Chinese))