

基于广义超椭球模型的结构非概率可靠性指标*

乔心州, 赵悦童, 方秀荣, 刘鹏

(西安科技大学 机械工程学院, 西安 710054)

摘要: 非概率凸集合模型仅需获知结构不确定性的范围或界限来度量结构可靠性, 因而适用于小样本不确定性结构工程问题. 针对广义超椭球模型, 对其非概率可靠性度量问题进行了研究. 首先, 提出了基于广义超椭球模型的简单非概率可靠性指标, 定义为结构功能函数的均值与离差之比, 并讨论了该可靠性指标的不一致性问题. 其次, 为克服上述不一致性问题, 提出了一种比例因子非概率可靠性指标, 定义为不确定域向外扩大或向内收缩时, 失效面与不确定域接触的最小比例因子. 最后, 通过 3 个工程算例分析验证了所提非概率可靠性指标的有效性和可行性.

关键词: 广义超椭球模型; 非概率可靠性; 简单非概率可靠性指标; 比例因子非概率可靠性指标

中图分类号: O213.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440061

Non-Probabilistic Reliability Indexes Based on the Generalized Super Ellipsoid Model

QIAO Xinzhou, ZHAO Yuetong, FANG Xiurong, LIU Peng

(College of Mechanical Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, P.R.China)

Abstract: The non-probabilistic convex model only requires the bounds or domains of structural uncertain parameters to measure structural reliability, and therefore is more appropriate for engineering structures with limited experimental data. The problem of non-probabilistic reliability measurement of the generalized super ellipsoid model was studied. A simple non-probabilistic reliability index was first proposed to evaluate the safety degree of a structure, which was defined as the ratio of the mean value of the performance function to its deviation. The inconsistency problem in the simple non-probabilistic reliability index was further discussed. To overcome the above inconsistency problem, a ratio factor reliability index was then presented, which was defined as the minimum ratio factor at which the failure surface is in contact with the uncertainty domain contracting inward or expanding outward. Three numerical examples demonstrate the validity and feasibility of the proposed non-probabilistic reliability indexes.

Key words: generalized super ellipsoid model; non-probabilistic reliability; simple non-probabilistic reliability index; ratio factor non-probabilistic reliability index

0 引 言

可靠性与工程结构中广泛存在的不确定性密切相关. 根据描述不确定性的数学模型不同, 结构可靠性理

* 收稿日期: 2023-03-07; 修订日期: 2023-09-17

基金项目: 国家自然科学基金(51775427)

作者简介: 乔心州(1974—), 男, 副教授, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: qiaoxinzhou@xust.edu.cn).

引用格式: 乔心州, 赵悦童, 方秀荣, 刘鹏. 基于广义超椭球模型的结构非概率可靠性指标[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(4): 458-469.

论可粗略的分为概率可靠性理论、模糊可靠性理论和非概率可靠性理论。非概率可靠性理论采用一系列凸集合模型来描述工程结构常见的,未知而有界的不确定性,仅需获知不确定信息的边界或界限即可对结构进行可靠性评估,受到了学者们的广泛关注^[1-3]。

结构非概率可靠性分析的核心是结构可靠性的科学度量问题。现有的非概率可靠性度量可粗略地分为可靠性指标和可靠度两类。在可靠性指标方面:郭书祥等^[4]将结构的不确定参数描述为区间变量,采用标准化变量空间内原点到失效面的最短距离(无穷范数形式)作为非概率可靠性度量。基于类似的思想,曹鸿钧和段宝岩^[5]提出椭球模型非概率可靠性指标,定义为标准化变量空间内原点到失效面的最短距离(Euclid 范数形式)。Jiang 等^[6]提出了一种多维平行六面体模型非概率可靠性指标,同样将标准化变量空间内原点到失效面的最短距离(无穷范数形式)作为非概率可靠性度量。Meng 等^[7]提出了超椭球模型非概率可靠性指标,定义为标准化变量空间内,原点到失效面的最短距离(p 范数形式)。Qiao 等^[8]研究了椭球模型非概率可靠性指标的不一致性问题,并揭示了不一致性问题对中心点法和设计点法两种非概率一阶可靠性分析方法的影响。Wang 等^[9]结合凸集合理论和首次穿越理论,提出了一种基于区间过程的非概率时变可靠性指标,该可靠性指标可视为区间模型可靠性指标的时变版本。Zhan 等^[10]采用非概率有界场模型描述材料属性,采用凸模型来描述不确定载荷,提出了多椭球模型与有界场混合模型的非概率可靠性指标。在可靠度方面:Wang 等^[11]基于区间模型,将不确定域落入安全域的体积与不确定域总体积之比作为非概率可靠性度量。Jiang 等^[12]建立了椭球模型非概率可靠度模型,同样将不确定域落入安全域的体积与不确定域总体积之比作为非概率可靠性度量,并提出了一阶、二阶近似可靠性分析方法来求解非概率可靠度。Hong 等^[13]采用多超椭球模型来描述不确定变量,分别基于范数和体积比两种思想给出了相应的非概率可靠性度量。其中,基于范数的非概率可靠性度量,采用 p 范数来定义;基于体积比的非概率可靠性度量,采用不确定域落入安全域的体积与不确定域总体积之比来定义。Jiang 等^[14]将凸模型理论和首次穿越机制相结合,提出了结构动力可靠性的非概率可靠度模型,并采用 Monte-Carlo 法对该模型进行求解。Qiao 等^[15]针对串联结构系统提出了非概率可靠性界限法来估计系统的非概率失效度,其基本思想为通过单失效模式非概率失效度和两失效模式联合非概率失效度的代数组合形式,进而给出系统非概率失效度的上下界。

上述研究主要基于规则凸集合模型。相较于规则凸集合模型,不规则凸集合模型由于特有的不规则边界,能够更为紧凑地包络所有不确定样本,进而更加精确地表征结构不确定性^[16]。Cao 等^[16]提出了一种传统区间模型与基于主成分分析的区间模型相结合的多边凸集模型。Ni 等^[17]在超椭球模型的基础上,提出了广义超椭球模型。正如超椭球模型是区间模型和椭球模型的推广形式一样,广义超椭球模型是超椭球模型的推广形式。该模型不需要满足各项幂相等这一条件,因而比超椭球模型具有更大的灵活性,有可能给出样本点的更小更精确包络集。Ayyasamy 等^[18]提出了一种凸包模型,该模型可通过 MATLAB 中的 convexhull 函数给出,理论上可得到样本点的最小凸包络集。Elishakoff 等^[19]对区间、椭球、平行六面体、超椭球和凸包等几种凸集模型在模型体积和结构响应两个方面进行了比较。对于不规则凸集合模型,如何度量结构非概率可靠性自然也是重点关注的问题。解决上述问题可能存在两种不同的思路:一是考虑规则凸集合模型与不规则凸集合模型的相似性,将现有的规则凸集合模型可靠性度量方法通过适当改进引入到不规则凸集合模型中;二是根据不规则凸集合模型的固有特征,发展其特有的可靠性度量模型。

本文从第一种研究思路出发,研究了基于广义超椭球模型的结构非概率可靠性度量问题。剩余部分安排如下:第 1 节对广义超椭球模型进行了概述;第 2 节提出了广义超椭球的简单可靠性指标及其计算方法,讨论了所提方法的优缺点;第 3 节将比例因子可靠性指标引入到广义超椭球模型,并对此方法进行改进;第 4 节通过算例对本文所提方法进行了验证;第 5 节对本文的内容进行了总结。

1 广义超椭球模型

广义超椭球模型采用如下表示来描述结构不确定域的边界:

$$\left| \frac{X_1 - X_1^c}{a_1} \right|^{N_1} + \left| \frac{X_2 - X_2^c}{a_2} \right|^{N_2} + \dots + \left| \frac{X_n - X_n^c}{a_n} \right|^{N_n} = 1, \quad (1)$$

式中,幂 N_1, N_2, \dots, N_n 通常均大于零且互不相等.上述方程的解集构成一个位于 n 维超长方体 $|X_1 - X_1^c| \leq a_1, |X_2 - X_2^c| \leq a_2, \dots, |X_n - X_n^c| \leq a_n$ 以内的封闭曲面, $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $X_i^c (i = 1, 2, \dots, n)$ 分别为曲面的半轴和中点. $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 所有取值范围构成一个区间 $X_i^l = [X_i^l, X_i^u]$, X_i^l 和 X_i^u 分别表示区间的下界和上界.本文仅考虑 $N_1, N_2, \dots, N_n \geq 1$ 的情形,原因在于当 $0 < N_i < 1$ 时,广义超椭球模型将不再是凸集合模型;当 N_1, N_2, \dots, N_n 的范围为 $[1, 2)$ 时,广义超椭球为一个形似表面为凸的 n 维菱形;当 $N_1 = N_2 = \dots = N_n = 2$ 时,广义超椭球简化为一个 n 维椭球;当 N_1, N_2, \dots, N_n 均大于 2 时,广义超椭球为一个看似带有圆角的 n 维超长方体;当 N_1, N_2, \dots, N_n 逐渐增大,广义超椭球越来越趋近于 n 维超长方体 $|X_1 - X_1^c| \leq a_1, |X_2 - X_2^c| \leq a_2, \dots, |X_n - X_n^c| \leq a_n$.一般情况下, N_1, N_2, \dots, N_n 互不相等使得广义超椭球模型相比超椭球模型具有更大的灵活性^[17],也就是说广义超椭球模型有可能以更小的体积包络所有不确定样本点.图 1 分别给出了二维情况下,当中点为原点、 $a_1 = 3$ 和 $a_2 = 2$ 时, N_1 和 N_2 的不同取值对应的广义超椭圆.

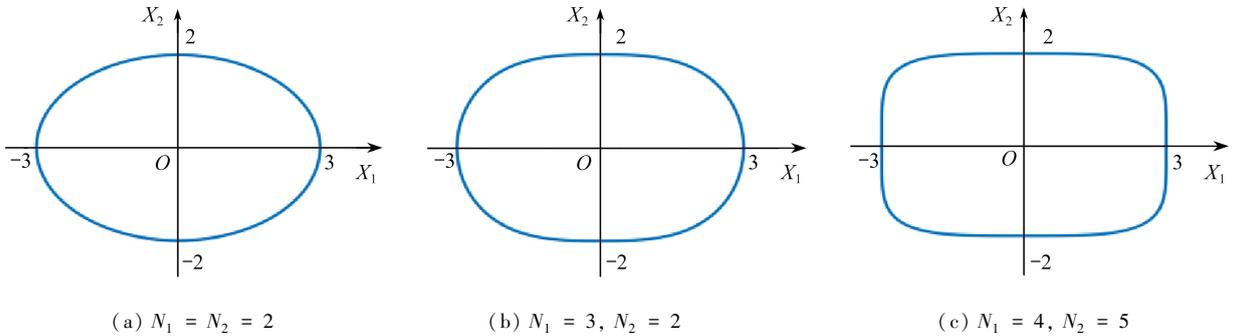


图 1 三种情况下的广义超椭圆

Fig. 1 Three cases of generalized super ellipses

式(1)仅给出所有半轴均平行于相应坐标轴的广义超椭球的表达式.对于更一般的广义超椭球,以二维情况为例(图 2),其表达式构建过程如下:首先,将不确定参数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ 通过旋转矩阵转化为 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$, \mathbf{Y} 空间中所有半轴均平行于相应坐标轴.该变换可表示为

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 为旋转矩阵, θ 表示 \mathbf{Y} 空间坐标轴与直角坐标之间的夹角.可得到二维情况下不确定参数 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的对应关系为

$$\begin{cases} Y_1 = \cos(\theta X_1) - \sin(\theta X_2), \\ Y_2 = \sin(\theta X_1) + \cos(\theta X_2). \end{cases} \quad (3)$$

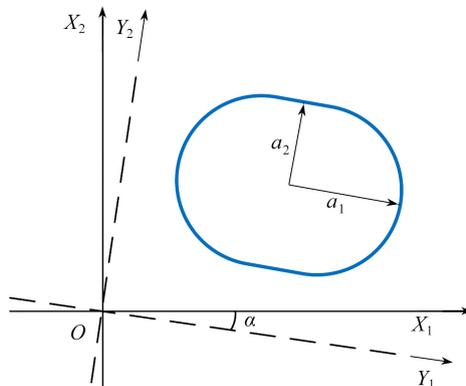


图 2 二维情况下的坐标系旋转

Fig. 2 Rotation of the coordinate system (2D case)

对于 n 维情况, 旋转矩阵 T_n 可定义为

$$T_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n], \tag{4}$$

式中, $\theta_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$ 为坐标轴的旋转角度, $\mathbf{u}_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}]^T$ 为一 n 维列向量, T_n 的详细表达式可参考文献[1].

可得到不确定参数 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的对应关系为

$$\begin{cases} Y_1 = u_{11}X_1 + u_{21}X_2 + \dots + u_{n1}X_n, \\ Y_2 = u_{12}X_1 + u_{22}X_2 + \dots + u_{n2}X_n, \\ \vdots \\ Y_n = u_{1n}X_1 + u_{2n}X_2 + \dots + u_{nn}X_n. \end{cases} \tag{5}$$

在 \mathbf{Y} 空间很容易依据样本点构建广义超椭球, 不妨设其表达式为

$$\left| \frac{Y_1 - Y_1^c}{a_1} \right|^{N_1} + \left| \frac{Y_2 - Y_2^c}{a_2} \right|^{N_2} + \dots + \left| \frac{Y_n - Y_n^c}{a_n} \right|^{N_n} = 1. \tag{6}$$

进一步根据 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的对应关系, 即可给出广义超椭球在 \mathbf{X} 空间的表达式.

2 广义超椭球模型的简单非概率可靠性指标

2.1 简单非概率可靠性指标的定义

对于结构功能函数 $g(\mathbf{X}), X_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 根据结构可靠性理论, 失效面 $g(\mathbf{X}) = 0$ 将结构的基本参量空间分为安全域 $g(\mathbf{X}) > 0$ 和失效域 $g(\mathbf{X}) < 0$. 类似概率可靠性指标和规则凸集模型非概率可靠性指标, 这里同样将广义超椭球模型简单非概率可靠指标 β 定义为结构功能函数的均值和离差之比:

$$\beta = \frac{g^c(\mathbf{X})}{g^r(\mathbf{X})} = \frac{g^U(\mathbf{X}) + g^L(\mathbf{X})}{g^U(\mathbf{X}) - g^L(\mathbf{X})}, \tag{7}$$

其中, $g^c(\mathbf{X}) = [g^U(\mathbf{X}) + g^L(\mathbf{X})]/2, g^r(\mathbf{X}) = [g^U(\mathbf{X}) - g^L(\mathbf{X})]/2$ 分别表示结构功能函数的均值和离差. $g^U(\mathbf{X})$ 和 $g^L(\mathbf{X})$ 分别代表结构功能函数在不确定域范围内取值的上界和下界, 可通过下式求得:

$$\begin{cases} \min(\max) g(\mathbf{X}), \\ \text{s.t.} \quad \left| \frac{X_1 - X_1^c}{a_1} \right|^{N_1} + \left| \frac{X_2 - X_2^c}{a_2} \right|^{N_2} + \dots + \left| \frac{X_n - X_n^c}{a_n} \right|^{N_n} \leq 1. \end{cases} \tag{8}$$

非概率可靠性指标的不同取值意味着结构的不同状态. 如图 3 所示, 当 $\beta > 1$ 时(图 3(a)), 结构处于完全安全状态; 当 $-1 \leq \beta \leq 1$ 时(图 3(b)), 结构处于可能安全也可能失效状态, 进一步由图 4 可以看出, β 值越大, 结构处于安全状态的可能性越大(图中红色线段); 当 $\beta < -1$ 时(图 3(c)), 结构处于完全失效状态. 因此, 上述可靠性指标能够较好地度量广义超椭球模型的结构可靠性.

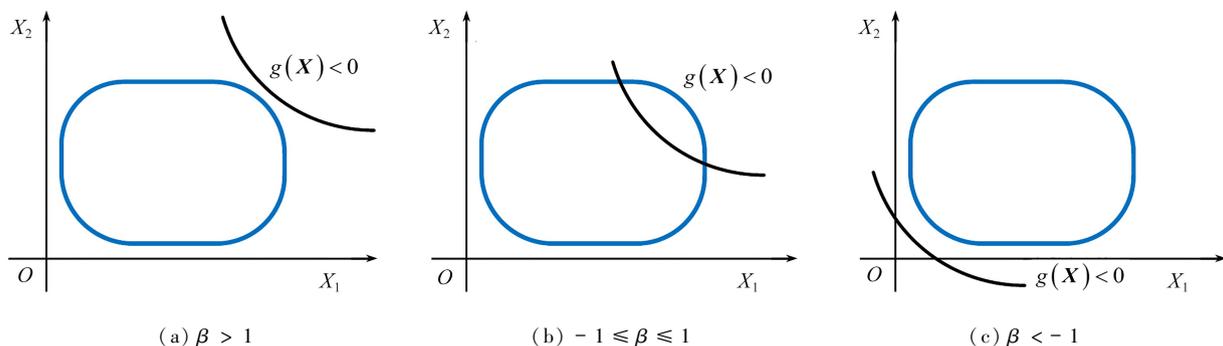


图 3 简单非概率可靠性指标的三种情况

Fig. 3 Three cases of simple non-probabilistic reliability indexes

2.2 简单非概率可靠性指标的不一致性问题

上述简单非概率可靠性指标与传统的结构可靠性指标定义类似, 均是对结构功能函数进行分析, 具备较

强的工程实用性.然而,最近作者的相关工作指出了椭圆模型非概率可靠性指标不可避免的遭遇不一致性问题^[8],即可靠性指标的取值依赖于结构功能函数的表达形式.显然,该问题可对结构可靠性分析结果产生较大的影响.类似地,简单非概率可靠性指标是否存在相同的问题,也是应予以考虑的问题.

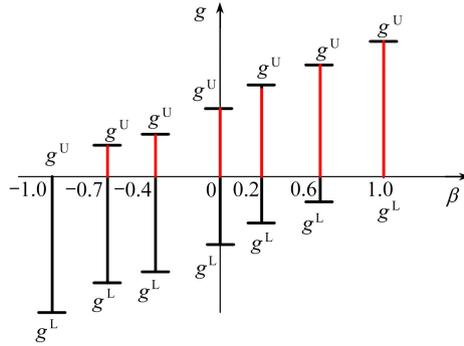


图4 简单非概率可靠性指标

Fig. 4 Simple non-probabilistic reliability indexes

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

考虑以下两个力学意义相同,但数学表达形式不同的结构功能函数:

$$g_1(R, S) = R - S, \quad (9)$$

$$g_2(R, S) = \frac{R}{S} - 1, \quad (10)$$

式中, R 和 S 分别表示强度和应力且均为正值.假设两者的不确定域采用如下广义超椭圆模型描述:

$$\left| \frac{R - R^c}{R^r} \right| + \left| \frac{S - S^c}{S^r} \right|^2 \leq 1, \quad (11)$$

式中, R^c 和 S^c 表示其取值区间的中心, R^r 和 S^r 为其取值区间的半径.

式(9)所示的结构功能函数的极值可通过对如下 Lagrange 函数求极值获得:

$$L(R, S, \lambda) = R - S + \lambda \left(\left| \frac{R - R^c}{R^r} \right| + \left| \frac{S - S^c}{S^r} \right|^2 - 1 \right), \quad (12)$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子.根据结构优化理论,上述函数取极值的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial L(R, S, \lambda)}{\partial R} = 1 \pm \frac{\lambda}{R^r} = 0, \\ \frac{\partial L(R, S, \lambda)}{\partial S} = \frac{\lambda(2S - 2S^c)}{(S^r)^2} - 1 = 0, \\ \frac{\partial L(R, S, \lambda)}{\partial \lambda} = \left| \frac{R - R^c}{R^r} \right| + \left| \frac{S - S^c}{S^r} \right|^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

对式(13)求解可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = R^r, \\ R_1 = \frac{4(R^r)^2 + 4R^c R^r - (S^r)^2}{4R^r}, \\ S_1 = \frac{(S^r)^2 + 2R^r S^c}{2R^r}, \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 = R^r, \\ R_2 = \frac{-4(R^r)^2 + 4R^c R^r + (S^r)^2}{4R^r}, \\ S_1 = \frac{(S^r)^2 + 2R^r S^c}{2R^r}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = -R^r, \\ R_1 = \frac{4(R^r)^2 + 4R^c R^r - (S^r)^2}{4R^r}, \\ S_2 = \frac{-(S^r)^2 + 2R^r S^c}{2R^r}, \end{cases} \begin{cases} \lambda_2 = -R^r, \\ R_2 = \frac{-4(R^r)^2 + 4R^c R^r + (S^r)^2}{4R^r}, \\ S_2 = \frac{-(S^r)^2 + 2R^r S^c}{2R^r}. \end{cases}$$

将式(14)代入式(9),考虑该结构功能函数在不确定域上为有界函数,可通过比较4个函数值大小得到式(9)所示结构功能函数的上下界为

$$\begin{cases} g_1^U(R, S) = R_1 - S_1 = R^c - S^c + \left[R^r + \frac{(S^r)^2}{4R^r} \right], \\ g_1^L(R, S) = R_2 - S_2 = R^c - S^c - \left[R^r + \frac{(S^r)^2}{4R^r} \right]. \end{cases} \quad (15)$$

同理,可得式(10)所示结构功能函数的上下界为

$$\begin{cases} g_2^U(R, S) = \frac{-2R^c(S^r)^2 + \{2R^r(S^r)^2 - 2R^c(S^r)^2 - 2R^rS^c\sqrt{[R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 + R^c(S^r)^2]/R^r}\}}{(S^r)^2\sqrt{[R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 + R^c(S^r)^2]/R^r}} - 1, \\ g_2^L(R, S) = \frac{-2R^c(S^r)^2 - \{2R^r(S^r)^2 - 2R^c(S^r)^2 - 2R^rS^c\sqrt{[R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 - R^c(S^r)^2]/R^r}\}}{(S^r)^2\sqrt{[R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 - R^c(S^r)^2]/R^r}} - 1. \end{cases} \quad (16)$$

则两个功能函数的简单非概率可靠性指标分别为

$$\beta_{g_1} = \frac{4R^cR^r - 4R^rS^c}{4(R^r)^2 + (S^r)^2}, \quad (17)$$

$$\beta_{g_2} = \frac{2\left[\frac{R^c(S^r)^2 + R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 + R^rS^cA}{(S^r)^2A} + \frac{R^c(S^r)^2 - R^r(S^c)^2 + R^r(S^r)^2 - R^rS^cB}{(S^r)^2B} + 1\right]}{\frac{R^c(S^r)^2 + R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 + R^rS^cA}{(S^r)^2A} - \frac{R^c(S^r)^2 - R^r(S^c)^2 + R^r(S^r)^2 - R^rS^cB}{(S^r)^2B}}, \quad (18)$$

式中, A, B 分别为

$$\begin{cases} A = \sqrt{[R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 + R^c(S^r)^2]/R^r}, \\ B = \sqrt{[R^r(S^c)^2 - R^r(S^r)^2 - R^c(S^r)^2]/R^r}. \end{cases} \quad (19)$$

对比式(17)和(18),显然有 $\beta_{g_1} \neq \beta_{g_2}$.由此可知,广义超椭球模型的简单非概率可靠性指标仍存在不一致性问题.

3 比例因子非概率可靠性指标

对于规则凸集合模型来说,基于范数的几何非概率可靠性指标可有效避免不一致性问题.然而,广义超椭球模型由于具有不规则的边界形状,因而是一种不规则凸集合模型.此时,基于范数的几何非概率可靠性指标不再适用.以下将文献[20]的非概率可靠性指标引入到广义超椭球模型.需要指出的是,文献[20]主要针对部分变量采用区间模型描述和部分变量采用椭球模型描述的情况.由于该指标实际上采用最小比例因子确定非概率可靠性指标,本文将其称为比例因子非概率可靠性指标.该指标为一个无量纲的数值,便于不同结构系统的安全程度的比较.

比例因子非概率可靠性指标 η 的几何意义为不确定域向外扩大或向内收缩时,失效面与不确定域接触的最小倍数.则非概率可靠性指标 η 可表示为

$$\eta = \inf\{\lambda \geq 0: X(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{X}^c) \cap D_f \neq \emptyset\}, \quad (20)$$

式中, $X(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{X}^c)$ 是不确定域缩放 λ 倍后的凸集合, D_f 为失效域 $g(\mathbf{X}) < 0$ 内所有点所构成的集合.

依据非概率可靠性指标的定义,其可由如下优化问题进行求解:

$$\begin{cases} \eta = \min(\lambda), \\ \text{s.t. } g(\mathbf{X}) = 0, \\ \left| \frac{X_1 - X_1^c}{\lambda a_1} \right|^{N_1} + \left| \frac{X_2 - X_2^c}{\lambda a_2} \right|^{N_2} + \dots + \left| \frac{X_n - X_n^c}{\lambda a_n} \right|^{N_n} - 1 = 0, \end{cases} \quad (21)$$

式中, λ 为缩放因子.此外,注意到缩放因子的非负性(图 5),显然上式定义的 η 均为正值,不足以反映图 6 所示 η 为负值的情况.考虑到两种情况分别对应 $g(\mathbf{X}^c) > 0$ 和 $g(\mathbf{X}^c) < 0$, 因此,可将比例因子可靠性指标重新定义为

$$\begin{cases} \eta = \text{sgn}(g(\mathbf{X}^c)) \cdot \min(\lambda), \\ \text{s.t. } g(\mathbf{X}) = 0, \\ \left| \frac{X_1 - X_1^c}{\lambda a_1} \right|^{N_1} + \left| \frac{X_2 - X_2^c}{\lambda a_2} \right|^{N_2} + \dots + \left| \frac{X_n - X_n^c}{\lambda a_n} \right|^{N_n} - 1 = 0, \end{cases} \quad (22)$$

式中, $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数.

图 7 给出结构失效面在不同位置情况下比例因子非概率可靠性指标的取值范围.当 $\eta > 1$ 时,结构处于完全安全状态;当 $-1 < \eta < 1$ 时,结构可能安全也可能失效,结构的安全可能性显然随着可靠指标的增大而增大;当 $\eta < -1$ 时,不确定域完全处于失效域,结构完全失效.显然,比例因子非概率可靠性指标也能够较好度量结构的安全程度.此外,比例因子非概率可靠性指标与结构失效面相关,而非结构功能函数.而力学意义相同,但数学表达形式不同的结构功能函数显然对应同一个失效面.因此,其可有效避免不一致性问题.

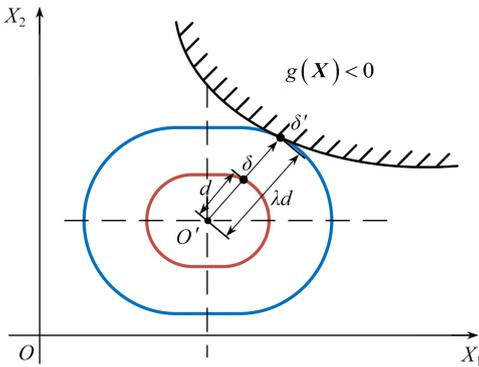


图 5 比例因子非概率可靠性指标 ($\eta > 0$)

Fig. 5 Ratio factor non-probabilistic reliability indexes ($\eta > 0$)

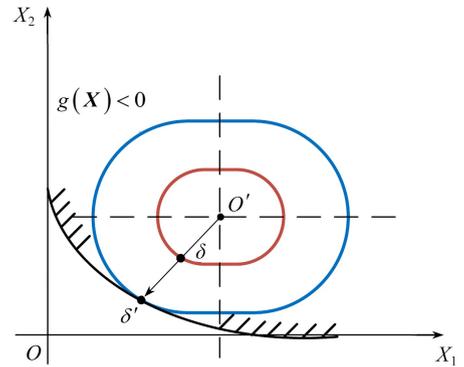


图 6 比例因子非概率可靠性指标 ($\eta < 0$)

Fig. 6 Ratio factor non-probabilistic reliability indexes ($\eta < 0$)

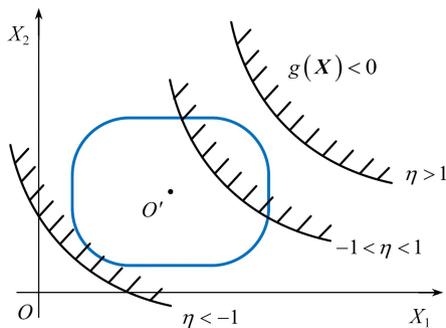


图 7 三种不同情况下的比例因子非概率可靠性指标

Fig. 7 Ratio factor non-probabilistic reliability indexes under 3 different cases

4 算例分析

以下通过 3 个算例对所提非概率可靠性指标进行讨论.算例 1 涉及线性结构功能函数,主要比较两种非概率可靠性指标.算例 2 和 3 均为非线性结构功能函数,通过与 Monte-Carlo 模拟(MCS)法的对比分析说明所提指标的有效性,算例 2 同时讨论了两种可靠性指标的不一致性问题.所有算例所涉及的优化问题均采用

序列二次规划法求解,求解精度均为 $\| \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k \| \leq 10^{-10}$.MCS 法均假设变量在广义超椭球内服从均匀分布,模拟次数由 $100/f$ 确定.非概率失效度 f 为广义超椭球落入失效域体积与整个广义超椭球的体积之比.

4.1 工程算例 1

考虑图 8 所示的悬臂梁.悬臂梁在距固定端为 $b_1 = 2 \text{ m}$, $b_2 = 5 \text{ m}$ 处分别受到两集中载荷 p_1 和 p_2 作用, p_1 和 p_2 为不确定变量,其取值区间分别为 $p_1^l = [4.4, 5.6] \text{ kN}$, $p_2^l = [1.7, 2.3] \text{ kN}$.当梁所受弯矩的最大值 m_{\max} 大于临界极限弯矩 m_{cr} 时结构失效,则结构的功能函数为

$$g(\mathbf{X}) = m_{\text{cr}} - p_1 b_1 - p_2 b_2. \tag{23}$$

不确定变量的中点分别为 $p_1^c = 5$, $p_2^c = 2$, 半径分别为 $p_1^r = 0.6$, $p_2^r = 0.3$, 则不确定域可用广义超椭球模型描述为

$$\left| \frac{p_1 - 5}{0.6} \right|^4 + \left| \frac{p_2 - 2}{0.3} \right|^6 \leq 1. \tag{24}$$

图 9 给出了简单可靠性指标 β 和比例因子可靠性指标 η 随 m_{cr} 从 $16 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 到 $24 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 的变化.可以看出,简单非概率可靠性指标与比例因子非概率可靠性指标都随着 m_{cr} 的增大而增大,且对于该线性结构功能函数而言,两种可靠性指标几乎一致.

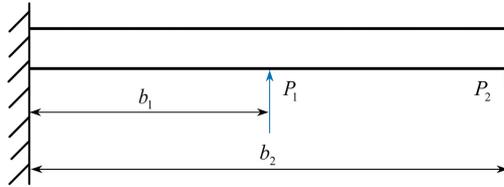


图 8 悬臂梁

Fig. 8 A cantilever beam

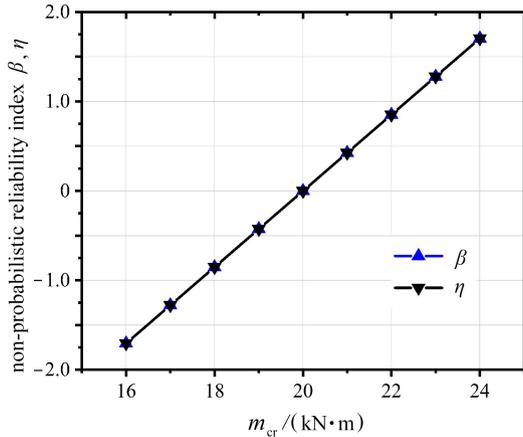


图 9 不同 m_{cr} 下的两种非概率可靠性指标

Fig. 9 Two non-probabilistic reliability indexes under different m_{cr} values

4.2 工程算例 2

考虑图 10 所示的悬臂梁.悬臂梁固定端最大应力应小于屈服强度 S , 由此可建立结构功能函数:

$$g(\mathbf{X}) = S - \frac{6P_x L}{b^2 h} - \frac{6P_y L}{bh^2}. \tag{25}$$

为讨论不一致性问题,这里同时考虑上述结构功能函数的另一种等价形式:

$$f(\mathbf{X}) = Sb^2 h^2 - 6P_x Lh - 6P_y Lb, \tag{26}$$

式中, $P_x = 50\,000 \text{ N}$ 和 $P_y = 25\,000 \text{ N}$ 分别为施加在梁上的水平力和垂直力. L 为梁的长度, b, h 为横截面的宽和高,均为不确定变量.其区间分别为 $L^l = [900, 1\,100] \text{ mm}$, $b^l = [90, 110] \text{ mm}$ 和 $h^l = [180, 220] \text{ mm}$.

不确定变量的中点分别为 $b^c = 100 \text{ mm}$, $h^c = 200 \text{ mm}$, $L^c = 1\,000 \text{ mm}$, 半径分别为 $b^r = 10 \text{ mm}$, $h^r = 20$

mm, $L^r = 100$ mm, 则不确定域可表示为

$$\left| \frac{b - 100}{10} \right|^8 + \left| \frac{h - 200}{20} \right|^{25} + \left| \frac{L - 1000}{100} \right|^6 \leq 1. \quad (27)$$

图 11 给出了 S 从 187.6 MPa 变化到 300 MPa 时, 两种非概率可靠性指标及非概率可靠度的变化曲线。其中非概率可靠度为 MCS 法得到, MCS 法的模拟次数由 $100/f$ 预估, 当非概率失效度不同时, 模拟次数也不同。例如当 $S = 240$ MPa 时, 非概率失效度 $f = 0.0344$, 模拟次数 $N \geq 100/f = 2.907 \times 10^3$ 。当 $S = 260$ MPa 时, 非概率失效度 $f = 0.0028$, 模拟次数 $N \geq 100/f = 3.5714 \times 10^4$ 。

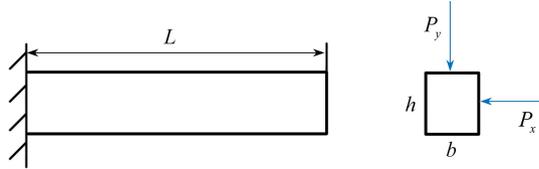


图 10 悬臂梁

Fig. 10 A cantilever beam

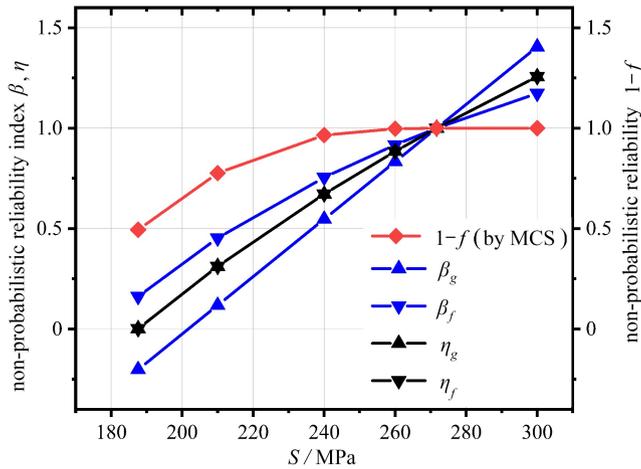


图 11 随屈服强度 S 变化的非概率可靠性分析结果 ($S = 187.6 \sim 300$ MPa)

Fig. 11 Non-probabilistic reliability analysis results under the variation of yield strength S ($S = 187.6 \sim 300$ MPa)

由图 11 可以看出: 随着屈服强度 S 的增加, 简单非概率可靠性指标 β_g 和 β_f 均呈上升趋势; 且两者之间的差异先减小为零, 而后逐步增大, 表明不一致性问题对简单可靠指标影响较大; 而比例因子非概率可靠性指标 η_g 和 η_f 两者一致且逐渐增大, 表明其可以消除不一致性问题。对于上述两个非线性结构功能函数, 简单非概率可靠性指标和比例因子非概率可靠性指标均存在较大差异。 β_g, β_f, η_g 及 η_f 均与 MCS 法得到的非概率可靠度 $1 - f$ 的变化趋势相同, 这也验证了本文所提两种非概率可靠性指标的有效性。

4.3 工程算例 3

考虑图 12 所示的, 型号为《矿用高强度强环链》(GB/T 12718—2009)^[21] 给出的刮板输送机中的链轮。其在链窝处受到 120 kN 的切向力, 在链轮配合孔处施加 X, Y, Z 方向的位移约束。齿弧半径 R_1 , 齿根圆弧半径 R_2 , 链窝部的平面圆弧半径 R_3 , 短齿根部的圆弧半径 R_4 以及平环中面至链轮中心距离 H 为不确定变量, 其区间分别为 $R_1^l = [33, 37]$ mm, $R_2^l = [8, 10]$ mm, $R_3^l = [28, 32]$ mm, $R_4^l = [8.5, 9.5]$ mm 以及 $H^l = [136, 140]$ mm。屈服强度为 S 。

采用不含二次交叉项的二次响应面构造最大应力, 响应面采用 40 个有限元分析样本点。图 13 给出了链轮的有限元分析模型, 模型包括 18 514 个节点和 11 112 个单元。链轮的主要失效模式是齿根处的强度失效。通过响应面法可以建立以下的结构功能函数:

$$g(\mathbf{X}) = S - 598.35546 \times R_1 - 612.51156 \times R_2 - 409.78715 \times R_3 - 206.05396 \times R_4 - 5421.68312 \times H + 7.92106 \times R_1^2 + 33.30885 \times R_2^2 +$$

$$7.066\ 16 \times R_3^2 + 11.416\ 9 \times R_4^2 + 19.544\ 86 \times H^2 + 395\ 837.7. \quad (28)$$

不确定变量的中点分别为 $R_1^c = 35\ \text{mm}$, $R_2^c = 9\ \text{mm}$, $R_3^c = 30\ \text{mm}$, $R_4^c = 9\ \text{mm}$, $H^c = 138\ \text{mm}$, 半径分别为 $R_1^r = 2\ \text{mm}$, $R_2^r = 1\ \text{mm}$, $R_3^r = 2\ \text{mm}$, $R_4^r = 0.5\ \text{mm}$, $H^r = 2\ \text{mm}$, 则不确定域可表示为

$$\left| \frac{R_1 - 35}{2} \right|^3 + |R_2 - 9|^8 + \left| \frac{R_3 - 30}{2} \right|^6 + \left| \frac{R_4 - 9}{0.5} \right|^4 + \left| \frac{H - 138}{2} \right|^2 \leq 1. \quad (29)$$

图 14 给出了当 S 从 835 MPa 到 1 135 MPa 时,简单非概率可靠性指标和比例因子非概率可靠性指标以及非概率可靠度的变化曲线,其中非概率可靠度为 MCS 法得到,MCS 法的模拟次数由 $100/f$ 预估,当非概率失效度不同时,模拟次数也不同.例如当 $S = 1\ 125\ \text{MPa}$ 时,非概率失效度 $f = 0.001\ 7$,模拟次数 $N \geq 100/f = 5.882\ 4 \times 10^4$.当 $S = 1\ 132\ \text{MPa}$ 时,非概率失效度 $f = 5.84 \times 10^{-6}$,模拟次数 $N \geq 100/f = 1.712\ 3 \times 10^7$.

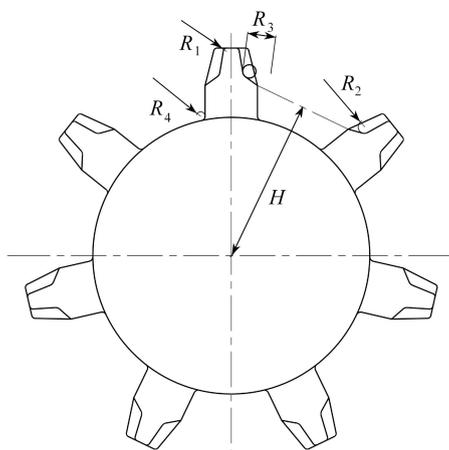


图 12 刮板输送机链轮

Fig. 12 The sprocket wheel of the scraper conveyor

static structure
normal stress
type: normal stress (X axis)
unit: MPa
global coordinate system
time: 1 s

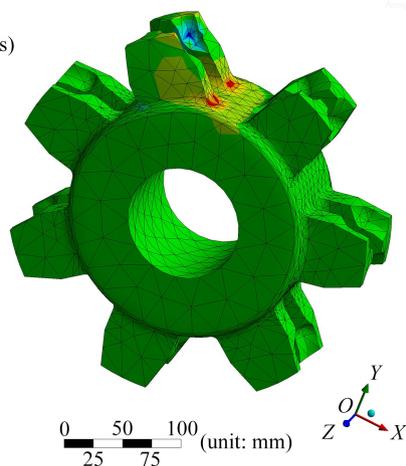
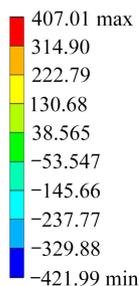


图 13 链轮有限元分析图

Fig. 13 The finite element analysis diagram of the sprocket wheel

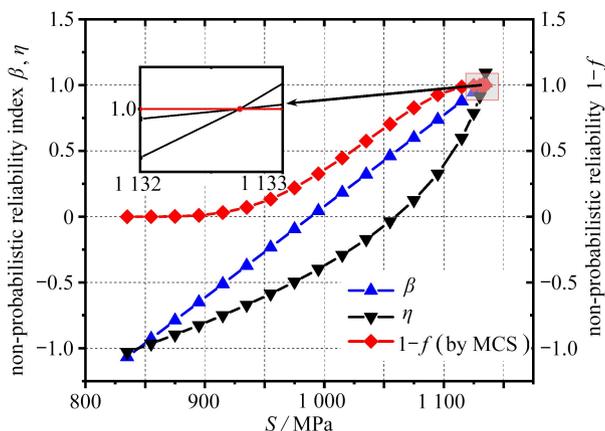


图 14 随屈服强度 S 变化的非概率可靠性分析结果 ($S = 835 \sim 1\ 135\ \text{MPa}$)

Fig. 14 Non-probabilistic reliability analysis results under the variation of yield strength S ($S = 835 \sim 1\ 135\ \text{MPa}$)

由图 14 可以看出,简单非概率可靠性指标和比例因子非概率可靠性指标均随着结构屈服强度的增大而增长,且与 MCS 法得到的非概率可靠度变化趋势相同,表明对于该非线性结构功能函数而言,两种非概率可靠性指标均能较好地反映结构的安全程度.但简单非概率可靠性指标和比例因子非概率可靠性指标仍存在较大差异.

广义超椭球模型可看作现有的规则凸集模型(区间模型、椭球模型和超椭球模型)的推广形式,其边界形式则由规则凸集变化为不规则凸集.因此,如何合理有效地度量其非概率可靠性成为进一步可靠性分析和设计的前提.本文提出简单非概率可靠性指标,将非概率可靠性度量与结构功能函数联系起来,符合可靠性

工作者的习惯.然而,正如算例2所示,其不可避免地会遭遇不一致性问题.而比例因子非概率可靠性指标将非概率可靠性度量与结构失效面联系起来,克服了不一致性问题.同时不难证明,区间模型非概率可靠性指标和椭球模型非概率可靠性指标是比例因子非概率可靠性指标的特殊情况.这也客观的验证了比例因子非概率可靠性指标的合理性.

5 结 论

本文借鉴规则凸集合模型与不规则凸集合模型的相似性,提出了广义超椭球模型简单非概率可靠性指标和比例因子非概率可靠性指标,并讨论了简单非概率可靠性指标的不一致性问题.通过3个算例验证了本文所提两种非概率可靠性指标的有效性.本文所提出的非概率可靠指标也为其他不规则凸模型的可靠性度量提供了有益参考.值得指出的是,考虑广义超椭球模型的特殊边界形状,理论上也应存在着针对该特定模型的非概率可靠性度量方法,这也是本研究潜在的后续工作之一.

参考文献(References):

- [1] YAN Y H, WANG X J, LI Y L. Structural reliability with credibility based on the non-probabilistic set-theoretic analysis[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2022, **127**: 107730.
- [2] CHANG Q, ZHOU C C, WEI P F, et al. A new non-probabilistic time-dependent reliability model for mechanisms with interval uncertainties[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, **215**: 107771.
- [3] FANG P Y, LI S H, GUO X L, et al. Response surface method based on uniform design and weighted least squares for non-probabilistic reliability analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, **121**(18): 4050-4069.
- [4] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, **18**(1): 56-60. (GUO Shuxiang, LÜ Zhenzhou, FENG Yuansheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, **18**(1): 56-60. (in Chinese))
- [5] 曹鸿钧, 段宝岩. 基于凸集合模型的非概率可靠性研究[J]. 计算力学学报, 2005, **22**(5): 546-549. (CAO Hongjun, DUAN Baoyan. An approach on the non-probabilistic reliability of structures based on uncertainty convex models[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(5): 546-549. (in Chinese))
- [6] JIANG C, ZHANG Q F, HAN X, et al. A non-probabilistic structural reliability analysis method based on a multidimensional parallelepiped convex model[J]. *Acta Mechanica*, 2013, **225**(2): 383-395.
- [7] MENG Z, HU H, ZHOU H L. Super parametric convex model and its application for non-probabilistic reliability-based design optimization[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **55**(5): 354-370.
- [8] QIAO X Z, SONG L F, LIU P, et al. Invariance problem in structural non-probabilistic reliability index[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2021, **35**(11): 4953-4961.
- [9] WANG L, WANG X J, CHEN X, et al. Time-variant reliability model and its measure index of structures based on a non-probabilistic interval process[J]. *Acta Mechanica*, 2015, **226**: 3221-3241.
- [10] ZHAN J J, LUO Y J, ZHANG X P, et al. A general assessment index for non-probabilistic reliability of structures with bounded field and parametric uncertainties[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **366**(12): 113046.
- [11] WANG X J, QIU Z P, ELISHAKOFF I. Non-probabilistic set-theoretic model for structural safety measure[J]. *Acta Mechanica*, 2008, **198**: 51-64.
- [12] JIANG C, BI R G, LU G Y, et al. Structural reliability analysis using non-probabilistic convex model[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, **254**: 83-98.
- [13] HONG L X, LI H C, FU J F, et al. Hybrid active learning method for non-probabilistic reliability analysis with multi super ellipsoidal model[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2022, **222**: 108414.
- [14] JIANG C, NI B Y, HAN X, et al. Non-probabilistic convex model process: a new method of time-variant un-

- certainty analysis and its application to structural dynamic reliability problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2014, **268**: 656-676.
- [15] QIAO X Z, WANG B, FANG X R, et al. Non-probabilistic reliability bounds for series structural systems[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2021, **18**(9): 2150038.
- [16] CAO L X, LIU J, XIE L, et al. Non-probabilistic polygonal convex set model for structural uncertainty quantification[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, **89**(1): 504-518.
- [17] NI B Y, ELISHAKOFF I, JIANG C, et al. Generalization of the super ellipsoid concept and its application in mechanics[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, **40**(21/22): 9427-9444.
- [18] AYYASAMY S, RAMU P, ELISHAKOFF I. Chebyshev inequality-based inflated convex hull for uncertainty quantification and optimization with scarce samples[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, **64**(4): 2267-2285.
- [19] ELISHAKOFF I, FANG T, SARLIN N, et al. Uncertainty quantification and propagation based on hybrid experimental, theoretical, and computational treatment[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, **147**(1): 107058.
- [20] 刘成立, 吕震宙, 罗志清, 等. 一种通用的稳健可靠性指标[J]. 机械工程学报, 2011, **47**(10): 192-198. (LIU Chengli, LÜ Zhenzhou, LUO Zhiqing, et al. A general robust reliability index[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, **47**(10): 192-198. (in Chinese))
- [21] 矿用高强度圆环链: GB/T 12718—2009[S]. 北京: 中国标准出版社, 2009. (High-tensile steel chains (round link) for mining: GB/T 12718—2009[S]. Beijing: Standards Press of China, 2009. (in Chinese))