

# 一种迭代正则化方法求解一类同时带有 两个扰动数据的反向问题\*

袁小雨, 冯晓莉, 张云

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126)

**摘要:** 该文考虑了一类带有扰动扩散系数和扰动终值数据的空间分数阶扩散方程反向问题, 从终值时刻的测量数据来反演初始时刻数据, 该问题是严重不适定的, 因此该文提出了一种迭代正则化方法来处理该反向问题, 并利用先验正则化参数选取规则得到了正则化解和精确解之间的误差估计, 最后进行了一些数值模拟, 验证了方法的有效性.

**关键词:** 空间分数阶扩散方程; 反向问题; 不适定性; 迭代正则化

**中图分类号:** O175.26      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.440066

## An Iterative Regularization Method for Solving Backward Problems With 2 Perturbation Data

YUAN Xiaoyu, FENG Xiaoli, ZHANG Yun

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, P.R.China)

**Abstract:** The backward problem of space-fractional diffusion equations with perturbed diffusion coefficients and perturbed final data was considered. The initial data were recovered from the measured data at the final time. Given the severe ill-posedness of this problem, an iterative regularization method was proposed to tackle it. The convergence error estimate between the exact and approximate solutions was obtained under the assumption of an a-priori bound on the exact solution. Finally, several numerical simulations were conducted to verify the effectiveness of this method.

**Key words:** space-fractional diffusion equation; backward problem; ill-posedness; iterative regularization method

## 0 引 言

近年来, 分数阶微积分引起了学者们的关注, 且被广泛应用于物理学领域<sup>[1]</sup>、生物医学领域<sup>[2]</sup>及其他科

\* 收稿日期: 2023-03-14; 修订日期: 2023-05-05

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(61877046); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2023-JC-YB-054); 中央高校基本科研业务费(XJS220702)

**作者简介:** 袁小雨(1998—), 女, 硕士(E-mail: xiaoyuyuan@stu.xidian.edu.cn);  
冯晓莉(1981—), 女, 博士(通讯作者. E-mail: xiaolifeng@xidian.edu.cn);  
张云(1991—), 男, 博士(E-mail: zhangyun@xidian.edu.cn).

**引用格式:** 袁小雨, 冯晓莉, 张云. 一种迭代正则化方法求解一类同时带有两个扰动数据的反向问题[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(10): 1260-1271.

学工程领域等<sup>[3-4]</sup>.分数阶导数的定义中存在微分-积分卷积算子,具有非局部性,因此可以描述不同物质的记忆和遗传性质.

一个完整的模型需要输入数据,如初始数据、与系统的物理性质相关的边界数据、系数和源项等.然而在某些实际情况下,我们可能无法直接获得初始数据,因此需要额外的测量数据来恢复它,这类问题被称为反向问题.其中反向扩散问题因其在各种专业领域的应用,如图像去模糊<sup>[5]</sup>和水文反演<sup>[6]</sup>,而备受研究者们的关注.在图像去模糊过程中,该方程可以应用于图像恢复过程中的去模糊过程.在水文反演中,该方程可以被用于通过重建污染羽历史来确定污染源.众所周知,该类问题是不适定的.通常数值解对测量数据不具有连续依赖性,即测量数据中的一个小的扰动可能导致数值解与精确解之间产生一个大的误差.为了克服其不稳定性,人们不断提出和研究各种正则化方法.常用的正则化方法有 Tikhonov 正则化方法<sup>[7-8]</sup>、Landweber 迭代正则化方法<sup>[9]</sup>、拟边界值正则化方法<sup>[10]</sup>、截断正则化方法<sup>[11]</sup>、卷积正则化方法<sup>[12]</sup>、滤波正则化方法<sup>[13]</sup>和变分型正则化方法<sup>[14]</sup>等.

本文研究了如下—类带有变扩散系数的空间分数阶扩散方程反向问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + q(t)(-\Delta)^\alpha u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,T) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $q(t)$  为扩散系数,其存在正的上界和下界.分数阶 Laplace 算子定义为<sup>[15]</sup>

$$(-\Delta)^\alpha h(x) = C_\alpha y_{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x) - h(y)}{|x-y|^{1+2\alpha}} dy, \quad (2)$$

这里系数  $C_\alpha = \frac{\alpha 2^{2\alpha} \Gamma(0.5 + \alpha)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \alpha)}$ ,  $\alpha \in (1/2, 1]$ ,  $y_{PV}$  代表 Cauchy 主值.

问题(1)被称为空间分数阶扩散方程反向问题,这类问题已经得到了广泛的研究.当  $q(t) = 1$  且  $f = 0$  时,Zheng 和 Wei<sup>[16]</sup>提出了一种卷积正则化方法和谱正则化方法,并分别给出了相应的收敛性分析;Zheng 和 Zhang<sup>[17]</sup>提出了一种负指数正则化方法,同时给出了后验假设下的收敛性分析;Zhao 和 Liu 等<sup>[18]</sup>提出了一种简化的 Tikhonov 正则化方法,且得到了正则近似解与精确解之间的误差估计.当  $f = f(x,t)$  时,Luan 和 Khanh<sup>[19]</sup>提出了一种滤波正则化方法,同时研究了该问题在不同源项时的 Hölder 型误差估计.当  $f = f(x,t, u)$  时,Tuan 等在文献[20]中提出了两种修正的正则化方法以解决  $q(t) = 1$  时的反向问题;Khieu 和 Vo<sup>[8]</sup>使用了一个修正的 Tikhonov 方法来求解扩散系数  $q(t)$  无扰动时的情形.

在现实问题中,扩散系数是从统计模型或实验中建立起来的,因此扩散系数并不是确切知道的,而是一个近似值.据笔者所知,关于带有扰动变扩散系数的反向问题的研究结果相对较少.目前,Tuan 等<sup>[21]</sup>利用一种卷积正则化方法来解决(1),并给出了误差估计;Dien 和 Trong<sup>[22]</sup>通过一种截断正则化方法来解决带有扰动变扩散系数的空间分数阶非线性方程,得到了正则近似解与精确解之间的误差估计.本文将采用如下迭代正则化方法来求解问题(1)中终值数据  $g(x)$  与变扩散系数  $q(t)$  同时带有扰动的情形:

$$\begin{cases} u_i^{k,\delta}(x,t) + q^{\delta_1}(t)(-\Delta)^\alpha u_i^{k,\delta}(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u_i^{k,\delta}(x,0) = u^{k-1,\delta}(x,0) - \beta(u^{k-1,\delta}(x,T) - g^{\delta_2}(x)), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $k$  为迭代次数,也是正则化参数, $\beta$  为一个松弛因子,且满足  $0 < \beta < 1$ .初始迭代数据  $u^{0,\delta}(x,t)$  取为 0,扰动数据  $q^{\delta_1}(t)$  和  $g^{\delta_2}(x)$  满足

$$\|q^{\delta_1} - q\|_{L^2[0,T]} \leq \delta_1, \quad \|g^{\delta_2} - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta_2, \quad (4)$$

类似地,下文中的  $\|\cdot\|$  均表示对应区域上的  $L^2$  范数.

该迭代方法已被用于求解变系数时间分数阶扩散方程的反向问题<sup>[23]</sup>和横向抛物方程<sup>[24-25]</sup>,该方法可以通过较少的迭代步数得到较优的误差估计.然而这些问题是通过 Fourier 变换来解决无界区域上的问题,正则化问题在频域上很容易求解.本文采用的迭代正则化方法在数值上是通过有限差分法,利用更新的初始数据反复解决正问题,同时通过较少的迭代步数得到精确解的正则化近似解.我们将使用该方法求解问题(1),给定初始迭代数据  $u^{0,\delta}(x,t)$ ,通过迭代格式(3)得到的  $u^{k,\delta}(x,t)$  作为正则化近似解,其与正则化参数  $k$  密切

相关.如何选取  $k$  是该迭代方法的关键问题.本文将通过一个先验规则来选择正则化参数  $k$ , 并给出精确解和正则化解之间的误差估计,以及数值仿真结果.本文想法来源于文献[26],该文献通过迭代正则化方法解决一类无扰动扩散系数的时间分数阶扩散方程的反向问题.

本文主要结构具体为:第1节给出了一些辅助知识和基本引理;第2节给出了迭代正则近似解,并在先验假设下给出了精确解和正则化解之间的误差估计以及正则化参数选取规则;第3节给出了数值例子来验证所提方法的有效性;第4节对本文进行了总结.

## 1 预备知识

本文的理论分析是基于 Fourier 变换后的频域空间进行研究的,对于函数  $v(x) \in L^2(\mathbb{R})$  的 Fourier 变换和逆 Fourier 变换的定义分别为

$$\hat{v}(\xi) = \mathcal{F}\{v(x); \xi\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx,$$

$$v(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{v}(\xi); x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

通过 Fourier 变换,可得到反向问题(1)的 Fourier 形式解  $\hat{u}(\xi, t)$  为

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{\int_t^T q(z) |z| \xi^{1-2\alpha}} - \int_t^T e^{\int_t^s q(z) |z| \xi^{1-2\alpha}} \hat{f}(\xi, s) ds, \quad (5)$$

相应的精确解为

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi.$$

为了获得精确解与正则化近似解之间的误差估计,往往需要给定一个先验界.本文所需要的先验条件为

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, T])} \leq E_1 \quad (6)$$

和

$$\|u(\cdot, 0)\|_p \leq E_2, \quad p \geq 0, \quad (7)$$

其中  $\|u(\cdot, 0)\|_p$  的定义如下:

$$\|u(\cdot, 0)\|_p := \left( \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^p |\hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

为了便于后面的理论分析,这里先给出两个相关引理.

**引理 1**<sup>[25-26]</sup> 定义  $B_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^i$  和  $R_k(\lambda) = 1 - \lambda B_k(\lambda) = (1-\lambda)^k$ , 如果  $0 < \lambda < 1$ , 则有

$$B_k(\lambda) \lambda^\mu \leq k^{1-\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

$$R_k(\lambda) \lambda^\vartheta \leq \theta_\vartheta (k+1)^{-\vartheta}, \quad \vartheta \geq 0,$$

其中

$$\theta_\vartheta = \begin{cases} 1, & 0 \leq \vartheta \leq 1, \\ \vartheta^\vartheta, & \vartheta > 1. \end{cases}$$

**引理 2** 如果  $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1$ , 则有

$$|B_k(\lambda_1) - B_k(\lambda_2)| \leq k^2 |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

**证明** 因为  $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1$ , 结合  $n$  次方差公式可得

$$\lambda_1^k - \lambda_2^k = (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-1-i} \leq k |\lambda_1 - \lambda_2|,$$

所以有

$$|B_k(\lambda_1) - B_k(\lambda_2)| = \sum_{i=0}^{k-1} [(1-\lambda_1)^i - (1-\lambda_2)^i] \leq \sum_{i=0}^{k-1} i |\lambda_1 - \lambda_2| \leq k^2 |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

证毕.

## 2 迭代正则化解与精确解之间的误差估计

本节将通过迭代正则化方法解决带有扰动的变扩散系数  $q^{\delta_1}(t)$  和终值数据  $g^{\delta_2}(x)$  的空间分数阶扩散方程反向问题,并在精确解的先验假设下给出精确解和正则化解之间的误差估计以及正则化参数选取规则.

对迭代正则化方法(3)关于空间  $x$  做 Fourier 变换,得到

$$\begin{cases} \hat{u}_t^{k,\delta}(\xi, t) + q^{\delta_1}(t) |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^{k,\delta}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), & (\xi, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \hat{u}^{k,\delta}(\xi, 0) = \hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, 0) - \beta(\hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, T) - \hat{g}^{\delta_2}(\xi)), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8)$$

对问题(8)进行求解,可得

$$\hat{u}^{k,\delta}(\xi, t) = e^{-\int_0^t q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^{k,\delta}(\xi, 0) + \int_0^t \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^t q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds.$$

当  $t = T$  时,有

$$\hat{u}^k(\xi, T) = e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^{k,\delta}(\xi, 0) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds.$$

将上式代入  $\hat{u}^{k,\delta}(\xi, 0) = \hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, 0) - \beta(\hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, T) - \hat{g}^{\delta_2}(\xi))$ , 得

$$\begin{aligned} \hat{u}^{k,\delta}(\xi, 0) &= \hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, 0) - \\ &\beta \left( e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, 0) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds - \hat{g}^{\delta_2}(\xi) \right) = \\ &(1 - \beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha}) \hat{u}^{k-1,\delta}(\xi, 0) + \beta \left( \hat{g}^{\delta_2}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds \right) = \\ &(1 - \beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha})^k \hat{u}^{0,\delta}(\xi, 0) + \\ &\beta \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha})^i \left( \hat{g}^{\delta_2}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds \right). \end{aligned}$$

因为  $u^{0,\delta}(x, 0) = 0$ , 所以

$$\hat{u}^{k,\delta}(\xi, 0) = \beta B_k \left( \beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} \right) \left( \hat{g}^{\delta_2}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds \right),$$

其中  $B_k(\lambda)$  的定义见引理 1.

下面,我们利用正则化参数的先验选择规则给出精确解  $u(x, 0)$  与正则化解  $u^{k,\delta}(x, 0)$  之间的误差估计.

**定理 1** 设  $u(x, t) \in C(L^2(\mathbb{R}), [0, T])$  为问题(1)的精确解,  $u^{k,\delta}(x, t) \in C(L^2(\mathbb{R}), [0, T])$  是由问题(3)给出的正则化近似解.假设存在先验界(6)和(7),同时有式(4)成立.通过选取正则化参数  $k \sim \lfloor 1/(\beta\delta^{1/4}) \rfloor$ ,可以得到如下误差估计:

$$\| u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \| \leq 3C(T) E \delta^{3/4} + 2 \left( \frac{\ln(\beta + \delta^{-1/4})}{4 \int_0^T q(z) dz} \right)^{-p/(2\alpha)} E,$$

其中

$$\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}, E = \max\{TE_1, E_2\}, C(T) = \sqrt{T} \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-1}.$$

**证明** 由三角不等式有

$$\| u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \| \leq \| u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u^k(\cdot, 0) \| + \| u^k(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \|, \quad (9)$$

其中

$$\hat{u}^k(\xi, 0) = \beta B_k \left( \beta e^{-\int_0^T q(z) dz} |\xi|^{2\alpha} \right) \left( \hat{g}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds \right).$$

引入中间变量

$$\hat{u}^{k,\delta_1}(\xi, 0) = \beta B_k \left( \beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} \right) \left( \hat{g}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_s^T q^{\delta_1}(z) dz} |\xi|^{2\alpha} ds \right).$$

同样由三角不等式可得

$$\| u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u^k(\cdot, 0) \| \leq \| u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u^{k,\delta_1}(\cdot, 0) \| + \| u^{k,\delta_1}(\cdot, 0) - u^k(\cdot, 0) \| . \quad (10)$$

下面估计式(10)右端的第一项.通过引理1和条件(4),有

$$\|u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u^{k,\delta_1}(\cdot, 0)\| \leq \beta \sup_{\xi \in \mathbb{R}} B_k(e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \|g^{\delta_2} - g\| \leq \beta k \delta_2. \quad (11)$$

接下来估计式(10)右端的第二项.通过计算,可得

$$\begin{aligned} & |\hat{u}^{k,\delta_1}(\xi, 0) - \hat{u}^k(\xi, 0)| = \left| \beta B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \left( \hat{g}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right) - \right. \\ & \quad \left. \beta B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \left( \hat{g}(\xi) - \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right) \right|^2 \leq \\ & \quad \beta \left| (B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) - B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha})) \hat{g}(\xi) \right| + \\ & \quad \beta \left| B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \int_0^T \hat{f}(\xi, s) (e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} - e^{\int_0^s q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) ds \right| + \\ & \quad \beta \left| (B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) - B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha})) \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right| \leq \\ & \quad \beta \left| (B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) - B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha})) \left( \hat{g}(\xi) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right) \right| + \\ & \quad \beta \left| B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \left( \int_0^T \hat{f}(\xi, s) (e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} - e^{\int_0^s q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) ds \right) \right|. \end{aligned}$$

因为  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , 可得

$$\begin{aligned} & |\hat{u}^{k,\delta_1}(\xi, 0) - \hat{u}^k(\xi, 0)|^2 \leq \\ & \quad 2\beta^2 \left| (B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) - B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha})) \left( \hat{g}(\xi) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right) \right|^2 + \\ & \quad 2\beta^2 \left| B_k(\beta e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \left( \int_0^T \hat{f}(\xi, s) (e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} - e^{\int_0^s q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) ds \right) \right|^2 = \\ & \quad 2\beta^2 I_1 + 2\beta^2 I_2. \end{aligned}$$

下面我们分别估计  $I_1$  和  $I_2$ , 通过引理2和微分中值定理,有

$$\begin{aligned} I_1 & \leq k^4 \beta^2 \left| e^{-\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha} - e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} \right|^2 \cdot \left| \hat{g}(\xi) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right|^2 \leq \\ & \quad k^4 \beta^2 \left( e^{-[\int_0^T q^{\delta_1}(z) dz] \wedge [\int_0^T q(z) dz]} |\xi|^{1-2\alpha} \left| \xi \right|^{2\alpha} \int_0^T (q^{\delta_1}(z) - q(z)) dz \right)^2 \times \\ & \quad \left| \hat{g}(\xi) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right|^2. \end{aligned}$$

因为

$$e^{-ax} \leq e^{-1} a^{-1} \leq a^{-1}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

所以可得

$$\begin{aligned} I_1 & \leq k^4 \beta^2 \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \left( \int_0^T (q^{\delta_1}(z) - q(z)) dz \right)^2 \times \\ & \quad \left| \hat{g}(\xi) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right|^2 \leq \\ & \quad k^4 \beta^2 \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} T \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz \times \\ & \quad \left| \hat{g}(\xi) + \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} ds \right|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

由精确解(5)可得

$$\hat{g}(\xi) = e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} \left( \hat{u}(\xi, 0) + \int_0^T e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} \hat{f}(\xi, s) ds \right). \quad (14)$$

结合式(13)和(14)可得

$$I_1 \leq k^4 \beta^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \times$$

$$\int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz \left( \hat{u}(\xi, 0) + 2 \int_0^T \hat{f}(\xi, s) ds \right)^2.$$

通过引理 1 和微分中值定理,可得

$$I_2 \leq k^2 \left| \int_0^T \hat{f}(\xi, s) \left( e^{\int_0^s q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} - e^{\int_0^s q^{\delta_1}(z) dz} \xi^{1-2\alpha} \right) ds \right|^2 \leq k^2 \left| \int_0^T \hat{f}(\xi, s) e^{\left[ \int_0^s q^{\delta_1}(z) dz \right] \vee \left[ \int_0^s q(z) dz \right]} |\xi|^{1-2\alpha} |\xi|^{2\alpha} \int_s^T (q^{\delta_1}(z) - q(z)) dz ds \right|^2.$$

通过式(12)和 Hölder 不等式,有

$$I_2 \leq k^2 \left| \int_0^T \hat{f}(\xi, s) \left| \left[ \int_s^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_s^T q(z) dz \right] \right|^{-1} \int_s^T (q^{\delta_1}(z) - q(z)) dz ds \right|^2 \leq k^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \left( \int_0^T \hat{f}(\xi, s) ds \right)^2 \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz.$$

通过 Parseval 等式和 Hölder 不等式以及先验条件(7),可以得到

$$\begin{aligned} & \|u^{k, \delta_1}(\cdot, 0) - u^k(\cdot, 0)\|^2 = \|\hat{u}^{k, \delta_1}(\cdot, 0) - \hat{u}^k(\cdot, 0)\|^2 = \\ & \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}^{k, \delta_1}(\xi, 0) - \hat{u}^k(\xi, 0)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} (2\beta^2 I_1 + 2\beta^2 I_2) d\xi \leq \\ & 2\beta^2 \int_{\mathbb{R}} \left[ k^4 \beta^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \times \right. \\ & \left. \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz \left( \hat{u}(\xi, 0) + 2 \int_0^T \hat{f}(\xi, s) ds \right)^2 + \right. \\ & \left. k^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \left( \int_0^T \hat{f}(\xi, s) ds \right)^2 \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz \right] d\xi = \\ & 2\beta^2 k^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz \times \\ & \int_{\mathbb{R}} \left[ k^2 \beta^2 \left( \hat{u}(\xi, 0) + 2 \int_0^T \hat{f}(\xi, s) ds \right)^2 + \left( \int_0^T \hat{f}(\xi, s) ds \right)^2 \right] d\xi \leq \\ & 2\beta^2 k^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz \times \\ & \left[ 2k^2 \beta^2 \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^2(\xi, 0) d\xi + (8k^2 \beta^2 + 1) T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \hat{f}^2(\xi, s) ds d\xi \right] \leq \\ & 2\beta^2 k^2 T \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-2} \int_0^T |q^{\delta_1}(z) - q(z)|^2 dz (8k^2 \beta^2 + 1) E^2, \end{aligned}$$

$$E = \max \{ TE_1, E_2 \}.$$

令  $C(T) = \sqrt{T} \left| \left[ \int_0^T q^{\delta_1}(z) dz \right] \wedge \left[ \int_0^T q(z) dz \right] \right|^{-1}$ , 则

$$\|\hat{u}^{k, \delta_1}(\cdot, 0) - \hat{u}^k(\cdot, 0)\|^2 \leq 2\beta^2 k^2 (8k^2 \beta^2 + 1) C^2(T) E^2 \delta_1^2. \tag{15}$$

结合式(10)、(11)和(15)可得

$$\|\hat{u}^{k, \delta}(\cdot, 0) - \hat{u}^k(\cdot, 0)\|^2 \leq \beta k \delta_2 + \sqrt{2\beta^2 k^2 (8k^2 \beta^2 + 1)} C(T) E \delta_1. \tag{16}$$

下面估计式(9)右端第二项.通过 Parseval 等式可得

$$\begin{aligned} \|u^k(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}^k(\xi, 0) - \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}} |\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) \hat{u}(\xi, 0) - \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}} |(1 - \beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha} B_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha})) \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}} |R_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz} \xi^{1-2\alpha}) (1 + |\xi|^2)^{-p/2} (1 + |\xi|^2)^{p/2} \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi = \end{aligned}$$

$$\int_{|\xi| \leq |\xi_0|} |R_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz |\xi|^{2\alpha}}) (1 + |\xi|^2)^{-\rho/2} (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi +$$

$$\int_{|\xi| > |\xi_0|} |R_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz |\xi|^{2\alpha}}) (1 + |\xi|^2)^{-\rho/2} (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi = J_1 + J_2.$$

通过引理 1, 可以得到

$$J_1 \leq \int_{|\xi| \leq |\xi_0|} \left| \frac{R_k(\beta e^{-\int_0^T q(z) dz |\xi|^{2\alpha}}) \beta e^{-\int_0^T q(z) dz |\xi|^{2\alpha}} (1 + |\xi|^2)^{-\rho/2} (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \hat{u}(\xi, 0)}{\beta e^{-\int_0^T q(z) dz |\xi|^{2\alpha}}} \right|^2 d\xi \leq$$

$$\int_{|\xi| \leq |\xi_0|} \left| (1 + k)^{-1} \frac{(1 + |\xi|^2)^{-\rho/2} (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \hat{u}(\xi, 0)}{\beta e^{-\int_0^T q(z) dz |\xi|^{2\alpha}}} \right|^2 d\xi \leq$$

$$(1 + k)^{-2} \beta^{-2} e^{2\int_0^T q(z) dz |\xi_0|^{2\alpha}} \int_{|\xi| \leq |\xi_0|} (1 + |\xi|^2)^{\rho} \hat{u}^2(\xi, 0) d\xi \leq$$

$$(1 + k)^{-2} \beta^{-2} e^{2\int_0^T q(z) dz |\xi_0|^{2\alpha}} E_2^2,$$

以及

$$J_2 \leq \int_{|\xi| > |\xi_0|} (1 + |\xi|^2)^{-\rho} (1 + |\xi|^2)^{\rho} \hat{u}^2(\xi, 0) d\xi \leq (1 + |\xi_0|^2)^{-\rho} E_2^2,$$

所以

$$\|u^k(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\|^2 \leq [(1 + k)^{-2} \beta^{-2} e^{2\int_0^T q(z) dz |\xi_0|^{2\alpha}} + (1 + |\xi_0|^2)^{-\rho}] E_2^2.$$

取  $|\xi_0|^{2\alpha} = \frac{\ln[(1 + k)\beta]}{2\int_0^T q(z) dz}$ , 有

$$\|u^k(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\|^2 \leq \left( \frac{1}{(k + 1)\beta} + \left[ 1 + \left( \frac{\ln[(1 + k)\beta]}{2\int_0^T q(z) dz} \right)^{1/\alpha} \right]^{-\rho} \right) E_2^2 \leq$$

$$\left( \frac{1}{(k + 1)\beta} + \left( \frac{\ln[(1 + k)\beta]}{2\int_0^T q(z) dz} \right)^{-\rho/\alpha} \right) E^2.$$

由于迭代步数  $k$  为正整数, 因此选取正则化参数  $k$  为  $\lfloor 1/(\beta\delta^{1/4}) \rfloor$ , 记为  $k \sim \lfloor 1/(\beta\delta^{1/4}) \rfloor$ ,  $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ .

综上所述, 我们有

$$\|u^{k,\delta}(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\| \leq \beta k \delta + \sqrt{2\beta^2 k^2 (8k^2 \beta^2 + 1)} C(T) E \delta +$$

$$E \sqrt{\frac{1}{(k + 1)\beta} + \left( \frac{\ln[(1 + k)\beta]}{2\int_0^T q(z) dz} \right)^{-\rho/\alpha}} \leq$$

$$3C(T) E \delta^{3/4} + 2 \left( \frac{\ln(\beta + \delta^{-1/4})}{2\int_0^T q(z) dz} \right)^{-\rho/(2\alpha)} E.$$

证毕.

**注 1** 通过理论结果可以看出,  $k$  的选取与  $\beta$  的取值关系如下:  $\beta$  越大, 迭代步数  $k$  越少. 同时我们将在数值算例中对其进行验证.

### 3 数值算例

本节将通过数值算例验证我们所使用的迭代正则化方法对处理空间分数阶扩散方程反向问题的有效性. 首先利用离散 Fourier 变换给出以下正问题的数值解来构造终值数据:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + q(t) (-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

根据正问题解的表达式:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi, \tag{17}$$

其中

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) e^{|\xi|^{2\alpha} \int_0^t q(z) dz} + \int_0^t e^{|\xi|^{2\alpha} \int_0^s q(z) dz} \hat{f}(\xi, s) ds,$$

对  $x, t$  进行离散, 假设  $t_n = n\tau$  ( $n = 0, 1, \dots, N_t$ ), 其中  $\tau = T/N_t$  为时间方向的离散步长;  $x_m = mh$  ( $m = 0, \pm 1, \dots, \pm N_x$ ), 其中  $h$  为空间方向的离散步长. 将  $u(x_m, t_n), u^k(x_m, t_n)$  的近似解分别记为  $\{u\}_m^n, \{u^k\}_m^n$ . 然后通过离散 Fourier 变换计算式 (17), 从而得到终值数据  $g$ , 给其添加随机扰动得到扰动数据  $g^{\delta_2}$ . 实际上, 变量扩散系数  $q$  也为测量数据, 因此对其也添加随机扰动来表示扰动数据  $q^{\delta_1}$ . 本文采用的扰动方式如下:

$$q^{\delta_1} = q + \epsilon_1 q (2 \cdot \text{rand}(\text{size}(q)) - 1),$$

$$g^{\delta_2} = g + \epsilon_2 g (2 \cdot \text{rand}(\text{size}(g)) - 1),$$

其中函数  $\text{rand}(\cdot)$  生成随机数数组, 其元素的均值为 0, 方差为 1.

为了避免“反演过失”, 反向问题采用方法应该与正问题不同, 因此本文采用的是结合有限差分法的迭代正则化方法. 接下来将描述如何应用迭代正则化方法解决问题 (1).

一维分数阶 Laplace 算子  $(-\Delta)^\alpha$  等价于  $\alpha$  阶 Riesz 导<sup>[27-28]</sup>, 分数阶 Laplace 算子在网格点  $(x_m, t_n)$  的中心差分离散格式为

$$(-\Delta)^\alpha u(x_m, t_n) = h^{-2\alpha} \sum_{l=m-N_x}^{m+N_x} \{u^k\}_{m-l}^n + O(h^2),$$

其中  $\mu_l^{2\alpha} = \frac{(-1)^l \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - l + 1) \Gamma(\alpha + l + 1)}$ . 从而可得迭代正则化方法 (3) 的 Crank-Nicolson 离散格式<sup>[29]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\{u^k\}_m^{n+1} - \{u^k\}_m^n}{\tau} = -\frac{1}{2} q_{n+1} h^{-2\alpha} \sum_{l=m-N_x}^{m+N_x} \mu_l^{2\alpha} \{u^k\}_{m-l}^{n+1} - \\ \frac{1}{2} q_{n+1} h^{-2\alpha} \sum_{l=m-N_x}^{m+N_x} \mu_l^{2\alpha} \{u^k\}_{m-l}^n + f(x_m, t_n) + O(\tau^2 + h^2), \\ \{u^k\}_m^0 = \{u^{k-1}\}_m^0 + \beta (\{u^{k-1}\}_m^{N_t} - g_m^{\delta_2}). \end{cases} \tag{18}$$

其矩阵形式为

$$\left( \frac{1}{2} \tau q_{n+1} h^{-2\alpha} \mathbf{A} + \mathbf{I} \right) \mathbf{U}^{n+1} = \left( -\frac{1}{2} \tau q_{n+1} h^{-2\alpha} \mathbf{A} + \mathbf{I} \right) \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{F}^n,$$

其中

$$\mathbf{U}^n = (\{u^k\}_{-N_x}^n, \dots, \{u^k\}_{N_x}^n)^T, \mathbf{F}^n = (\{f\}_{-N_x}^n, \dots, \{f\}_{N_x}^n)^T, q_n = q(t_n),$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu_0^{2\alpha} & \mu_{-1}^{2\alpha} & \cdots & \mu_{-2m}^{2\alpha} \\ \mu_1^{2\alpha} & \mu_0^{2\alpha} & \cdots & \mu_{-2m+1}^{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{2m}^{2\alpha} & \mu_{2m-1}^{2\alpha} & \cdots & \mu_0^{2\alpha} \end{pmatrix}_{2N_x+1}.$$

给定初始迭代数据  $u^{0,\delta}(x, t) = 0$ , 将其代入迭代格式 (18), 选取停止条件  $\|u^k(\cdot, T) - g^{\delta_2}(\cdot)\|_{L_h^2} \leq \eta$ , 这里取  $\eta = 10^{-2}$ , 最终得到  $u^{k,\delta}(x, t)$ , 具体步骤如下:

- 步骤 1 给出初始值  $u^0(x, 0) = 0$ ;
- 步骤 2 将  $u^k(x, 0)$  代入差分格式 (18), 得到  $u^k(x, T)$ ;
- 步骤 3 如果  $\|u^k(\cdot, T) - g^{\delta_2}(\cdot)\|_{L_h^2} \leq \eta$ , 结束循环, 进入步骤 6, 否则进入步骤 4;
- 步骤 4 更新  $u^k(x, 0)$ , 这里  $u^k(x, 0) = u^{k-1}(x, 0) + \beta(u^{k-1}(x, T) - g^{\delta_2}(x))$ ;
- 步骤 5 置  $k = k + 1$ , 进入步骤 2, 循环步骤 2—4;



步骤6 最后得到  $u^k(x, t)$  为迭代正则化解.

为了验证数值的精确性,定义绝对误差和相对误差分别为

$$e_a(t) = \| u^k(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \|_{L_h^2},$$

$$e_r(t) = \frac{\| u^k(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \|_{L_h^2}}{\| u(\cdot, 0) \|_{L_h^2}},$$

其中  $\| g \|_{L_h^2}^2 = h \sum_m g^2(x_m)$ , 且  $h$  代表步长.

接下来,将给出数值算例来验证方法的有效性,取  $q(t) = t^2 + 1, T = 1, N_x = 30$  和  $N_t = 100$ .

例1 考虑

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \in [-L, L], \\ 0, & x \notin [-L, L], \end{cases}$$

$$f(x, t) = \begin{cases} e^{-x^2} e^{-\mu t}, & x \in [-L, L], \\ 0, & x \notin [-L, L]. \end{cases}$$

取  $L = 10, \alpha = 0.6, \beta = 0.9$ , 图1给出了例1的精确解  $u(x, t)$  和不同误差水平下的正则化解  $u^k(x, t)$ . 取误差水平  $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ , 分别为  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ , 对应的正则化参数分别为  $k = 11, 35, 95$ . 从图1中可以直观地看出, 误差水平  $\epsilon$  越小, 正则化解近似精确解的结果越好. 同时发现随着  $t$  的增大, 正则化解近似精确解的结果也越好. 因此在图2中, 我们给出了在不同时刻下的精确解和正则化解. 从图2中可以看出, 时间  $t$  越大, 近似结果越好, 这与图1的结果一致.

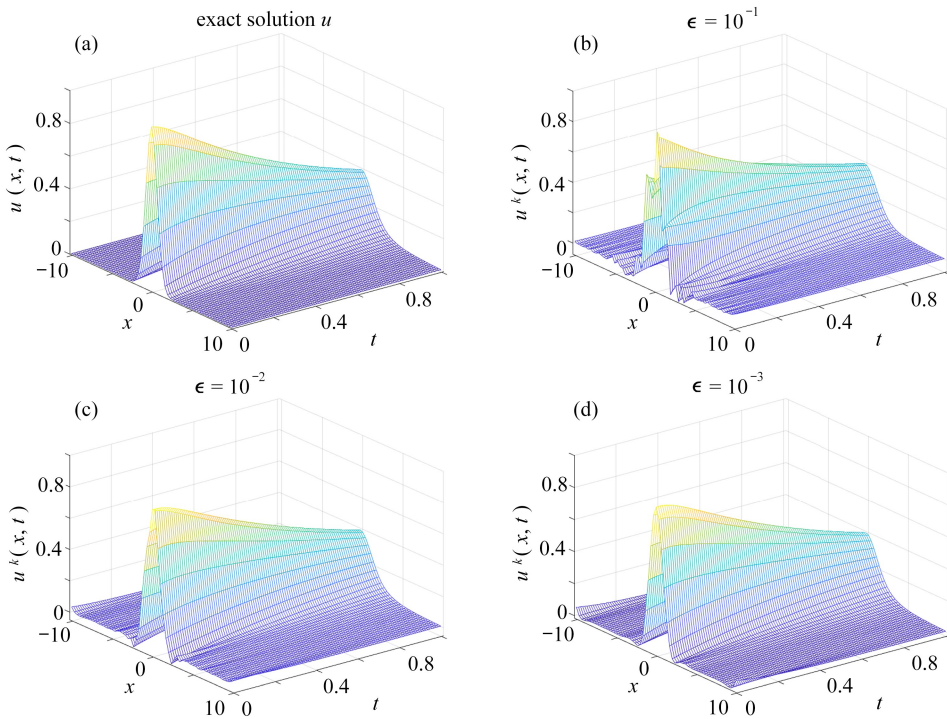


图1 精确解和在不同误差水平下的正则化解

Fig. 1 Exact solutions and regularized solutions with different noise levels

在表1中,我们给出了不同误差水平下  $u(x, t)$  的相对误差和绝对误差.从表1中可以明显地看出,扩散系数  $q(t)$  和数据  $g(x)$  的误差都影响问题的反演结果.误差水平  $\epsilon_1, \epsilon_2$  越小,绝对误差  $e_a(t)$  越小.这与理论结果是一致的.表2给出了  $t = 0.9$  时松弛因子  $\beta$ 、扰动数据  $\epsilon$  与迭代步数  $k$  之间的关系.通过表2可以看出,迭代步数  $k$  与松弛因子  $\beta$  和误差水平  $\epsilon$  的取值有关,即松弛因子  $\beta$  越大,相对应的迭代步数  $k$  越少;扰动误差  $\epsilon$  越大,迭代步数  $k$  越少.这与我们的理论结果一致.在表3中,对文献[8]中式(10)提到的经典 Tikhonov 正则化方法(TRM)和本文给出的迭代正则化方法(IRM)在扰动水平  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}$  下进行比较.TRM 选取正则化参

数  $\beta(\epsilon) = \epsilon$ , IRM 选取正则化参数  $k = 9, 45$ . 通过表 3 可以得到:IRM 在  $t$  接近  $T$  时刻下, 误差相对低于 TRM; 当  $t$  远离  $T$  时, IRM 误差相对高于 TRM. 实际上误差与正则化参数选取有着紧密的联系, 两个方法在不同时刻发挥着各自的优势.

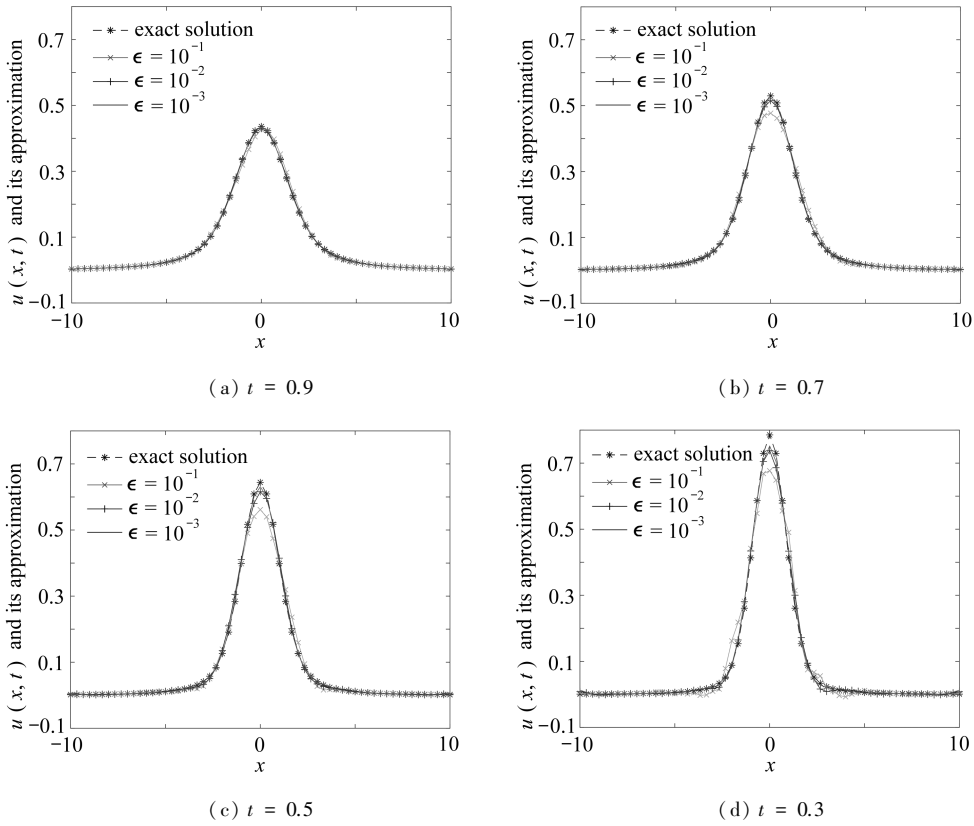


图 2 不同时刻下的精确解和正则化解

Fig. 2 Comparison of exact solutions and regularized solutions at different moments

表 1 不同误差水平下  $u(x, t)$  的相对误差和绝对误差 ( $\alpha = 0.6$ )

Table 1 Relative and absolute errors corresponding to different noise levels ( $\alpha = 0.6$ )

$t$	$\epsilon_1 = 10^{-1}$	$\epsilon_2 = 0$	$\epsilon_1 = 0$	$\epsilon_2 = 10^{-1}$	$\epsilon_1 = 10^{-1}$	$\epsilon_2 = 10^{-1}$
	$e_a(t)$	$e_r(t)$	$e_a(t)$	$e_r(t)$	$e_a(t)$	$e_r(t)$
0.9	0.017 0	0.032 5	0.023 8	0.045 4	0.024 8	0.047 4
0.5	0.076 9	0.062 8	0.074 3	0.068 8	0.093 5	0.076 4
0.3	0.114 0	0.087 3	0.109 8	0.084 6	0.137 3	0.096 0
$t$	$\epsilon_1 = 10^{-2}$	$\epsilon_2 = 0$	$\epsilon_1 = 0$	$\epsilon_2 = 10^{-2}$	$\epsilon_1 = 10^{-2}$	$\epsilon_2 = 10^{-2}$
	$e_a(t)$	$e_r(t)$	$e_a(t)$	$e_r(t)$	$e_a(t)$	$e_r(t)$
0.9	0.007 5	0.014 3	0.007 3	0.014 0	0.007 8	0.015 0
0.5	0.041 6	0.034 0	0.035 5	0.029 0	0.044 8	0.036 6
0.3	0.078 9	0.051 4	0.068 7	0.044 7	0.083 1	0.054 2

表 2  $t = 0.9$  时刻下  $\beta, \epsilon$  与迭代步数  $k$  之间的关系

Table 2 Relationships between  $\beta, \epsilon$  and iterative step number  $k$  at time  $t = 0.9$

	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$
$k(\epsilon = 10^{-1})$	68	15	7
$k(\epsilon = 10^{-2})$	418	126	18
$k(\epsilon = 10^{-3})$	549	193	56

表3 Tikhonov 正则化方法(TRM)和迭代正则化方法(IRM)下  $u(x,t)$  的相对误差和绝对误差 ( $\alpha = 0.6$ )Table 3 Relative and absolute errors of  $u(x,t)$  under the TRM and IRM ( $\alpha = 0.6$ )

		$t = 0.8$		$t = 0.5$		$t = 0.3$	
		$\epsilon_2 = 10^{-1}$	$\epsilon_1 = 10^{-2}$	$\epsilon_2 = 10^{-1}$	$\epsilon_1 = 10^{-2}$	$\epsilon_2 = 10^{-1}$	$\epsilon_1 = 10^{-2}$
TRM	$e_a(t)$	0.079 6	0.018 5	0.097 2	0.028 8	0.260 9	0.048 0
	$e_r(t)$	0.108 4	0.025 1	0.115 8	0.027 3	0.168 9	0.031 0
IRM	$e_a(t)$	0.033 0	0.003 4	0.060 9	0.011 6	0.137 3	0.060 4
	$e_r(t)$	0.045 3	0.004 6	0.049 7	0.009 1	0.096 0	0.035 7

## 4 结 论

本文讨论了一类带有扰动变扩散系数和扰动终值数据的空间分数阶扩散方程反向问题.由于该问题具有不适定性,因此本文提出了一种迭代正则化方法对其进行了求解,并利用正则化参数的先验选择规则,通过较少的迭代步数给出正则化解和精确解之间的误差估计.数值实验部分验证了正则化方法的有效性,并且得出了时间  $t$  越大,结果越好;变量扩散系数  $q(t)$  和终值数据  $g(x)$  的误差都影响问题的反演结果,即误差水平越小,反演效果越好,这与本文的理论结果一致.在数值反演过程中发现与时间  $t$  有关,即时间  $t$  越大,正则近似解的逼近效果也越好,但是理论得到的误差估计目前并没有考虑到与  $t$  的关系,接下来仍需进一步估计时间  $t$  对反演结果的影响.同时本文仅考虑了先验估计,关于后验正则化参数选择规则更实用,这也是后继工作要解决的问题.最后该方法还可以推广到非线性情形,目前数值有着不错的结果,但是理论仍需进一步研究.

## 参考文献(References):

- [1] METZLER R, KLAFTER J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2004, **37**(37): 161-208.
- [2] HALL M G, BARRICK T R. From diffusion-weighted MRI to anomalous diffusion imaging[J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2008, **59**(3): 447-455.
- [3] BENSON D A, WHEATCRAFT S W, MEERSCHAERT M M. Application of a fractional advection-dispersion equation[J]. *Water Resources Research*, 2000, **36**(6): 1403-1412.
- [4] 余钊圣, 林建忠. 粘弹性二阶流体混合层流场拟序结构的数值研究[J]. *应用数学和力学*, 1998, **19**(8): 671-677. (YU Zhaosheng, LIN Jianzhong. Numerical research on the coherent structure in the viscoelastic second-order mixing layers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, **19**(8): 671-677. (in Chinese))
- [5] KOENDERINK J J. The structure of images[J]. *Biological Cybernetics*, 1984, **50**(5): 363-370.
- [6] ATMADJA J, BAGTZOGLOU A C. Pollution source identification in heterogeneous porous media[J]. *Water Resources Research*, 2001, **37**(8): 2113-2125.
- [7] FENG X L, ZHAO M X, QIAN Z. A Tikhonov regularization method for solving a backward time-space fractional diffusion problem[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, **411**: 114236.
- [8] KHIEU T T, VO H H. Recovering the historical distribution for nonlinear space-fractional diffusion equation with temporally dependent thermal conductivity in higher dimensional space[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, **345**: 114-126.
- [9] YANG F, PU Q, LI X X. The fractional Landweber method for identifying the space source term problem for time-space fractional diffusion equation[J]. *Numerical Algorithms*, 2021, **87**(3): 1229-1255.
- [10] YANG F, WANG N, LI X X. A quasi-boundary regularization method for identifying the initial value of time-fractional diffusion equation on spherically symmetric domain[J]. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2019, **27**(5): 609-621.
- [11] 赵丽志, 冯晓莉. 一类随机对流扩散方程的反源问题[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(12): 1392-1401. (ZHAO Lizhi, FENG Xiaoli. The inverse source problem for a class of stochastic convection-diffusion equations[J].

- Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(12): 1392-1401.(in Chinese))
- [12] SHI C, WANG C, ZHENG G, et al. A new a posteriori parameter choice strategy for the convolution regularization of the space-fractional backward diffusion problem[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, **279**: 233-248.
- [13] TUAN N H, KIRANE M, BIN M B, et al. Filter regularization for final value fractional diffusion problem with deterministic and random noise[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2017, **74**(6): 1340-1361.
- [14] 柳冕,程浩,石成鑫. 一类非线性时间分数阶扩散方程反问题的变分型正则化[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(3): 341-352. (LIU Mian, CHENG Hao, SHI Chengxin. Variational regularization of the inverse problem of a class of nonlinear time-fractional diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(3): 341-352.(in Chinese))
- [15] NEZZA E D, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces[J]. *Bulletin Des Sciences Mathematiques*, 2012, **136**(5): 521-573.
- [16] ZHENG G H, WEI T. Two regularization methods for solving a Riesz-Feller space-fractional backward diffusion problem[J]. *Inverse Problems*, 2010, **26**(11): 115017.
- [17] ZHENG G H, ZHANG Q G. Determining the initial distribution in space-fractional diffusion by a negative exponential regularization method[J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2017, **25**(7): 965-977.
- [18] ZHAO J, LIU S, LIU T. An inverse problem for space-fractional backward diffusion problem[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, **37**(8): 1147-1158.
- [19] LUAN T N, KHANH T Q. Determination of initial distribution for a space-fractional diffusion equation with time-dependent diffusivity[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2021, **44**(5): 3461-3487.
- [20] TUAN N H, HAI D N D, KIRANE M. On a Riesz-Feller space fractional backward diffusion problem with a nonlinear source[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, **312**: 103-126.
- [21] TUAN N H, TRONG D D, HAI D N D, et al. A Riesz-Feller space-fractional backward diffusion problem with a time-dependent coefficient: regularization and error estimates[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, **40**(11): 4040-4064.
- [22] DIEN N M, TRONG D D. The backward problem for nonlinear fractional diffusion equation with time-dependent order[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2021, **44**(5): 3345-3359.
- [23] CHENG H, FU C L. An iteration regularization for a time-fractional inverse diffusion problem[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, **36**(11): 5642-5649.
- [24] DENG Y, LIU Z. Iteration methods on sideways parabolic equations[J]. *Inverse Problems*, 2009, **25**(9): 095004.
- [25] DENG Y, LIU Z. New fast iteration for determining surface temperature and heat flux of general sideways parabolic equation[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, **12**(1): 156-166.
- [26] WANG J G, WEI T. An iterative method for backward time-fractional diffusion problem[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2014, **30**(6): 2029-2041.
- [27] 孙志忠,高广花. 分数阶微分方程的有限差分法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.(SUN Zhizhong, GAO Guanghua. *Finite Difference Method for Fractional Differential Equations*[M]. Beijing: Science Press, 2015.(in Chinese))
- [28] SAICHEV A I, ZASLAVAKY G M. Fractional kinetic equations: solutions and applications[J]. *Chaos*, 1997, **7**(4): 753-764.
- [29] ÇELİK C, DUMAN M. Crank-Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, **231**(4): 1743-1750.