

无摩擦弹性接触问题的自适应交替方向乘子法*

袁 欣, 张守贵

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 对一类无摩擦的弹性接触问题,得到了求其数值解的自适应交替方向乘子法.由该问题导出相应的变分问题,引入辅助变量将原问题转化为一个基于增广 Lagrange 函数表示的鞍点问题,并采用交替方向乘子法求解;为了提高算法性能,提出了利用边界迭代函数自动选取合适罚参数的自适应法则.该算法的优点是每次迭代只需计算一个线性变分问题,同时显式计算了辅助变量和 Lagrange 乘子.对算法的收敛性进行了理论分析,最后用数值结果验证了该算法的可行性和有效性.

关键词: 弹性接触问题; 交替方向乘子法; 自适应法则; 增广 Lagrange

中图分类号: O221.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440079

A Self-Adaptive Alternating Direction Multiplier Method for Frictionless Elastic Contact Problems

YUAN Xin, ZHANG Shougui

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, P.R.China)

Abstract: A self-adaptive alternating direction multiplier method was designed for frictionless elastic contact problems. An augmented Lagrange function was introduced for the variational formulation of the problem with an auxiliary variable, to deduce a minimization problem and an equivalent saddle-point problem. Then the alternating direction multiplier method was used to solve the problem. To enhance the performance of the algorithm, a self-adaptive rule based on the iterative function on the boundary was proposed to automatically select the proper penalty parameter. The advantage of this algorithm is that, each iteration only needs to solve a linear variational problem and explicitly calculate the auxiliary variable and the Lagrange multiplier. The convergence of the algorithm was analyzed theoretically. The numerical results illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: elastic contact problem; alternating direction multiplier method; self-adaptive rule; augmented Lagrange function

0 引 言

弹性接触问题广泛存在于机械工程、土木工程等领域,比如堤坝的结合^[1-3]等.弹性接触问题最大的特点

* 收稿日期: 2023-03-24; 修订日期: 2023-04-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971085);重庆市自然科学基金项目(cstc2020jcyj-msxmX0066);重庆市研究生教育教学改革研究项目(yjg213071)

作者简介: 袁欣(1997—),女,硕士生(E-mail: 1577279037@qq.com);

张守贵(1973—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: shgzhnag@cqu.edu.cn).

引用格式: 袁欣,张守贵.无摩擦弹性接触问题的自适应交替方向乘子法[J].应用数学和力学,2023,44(8):989-998.

就是具有很强的非线性性,这就使得理论分析和数值计算难以进行,一般只能通过一些适当的数值方法求得近似解,如常用的 Uzawa 算法^[4-5]、交替方向乘子法^[6-8]、增广 Lagrange 法^[9-10]和投影算法^[11-12]等.这些方法利用变分不等式理论,将非线性弹性接触问题转化为一个对应的线性变分形式进行迭代求解.本文研究的是一个由区域 Ω 代表的线性弹性体和一个刚性基础支撑的弹性接触问题,其中 $\Omega \in R^2$. 区域 Ω 的边界 $\Gamma(\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C)$ 是光滑的.假设弹性体固定在 Γ_D 上,且 $\text{mean}(\Gamma_D) > 0$.边界 Γ_C 是 Γ 的一部分,它也是 Ω 和基础支撑的接触面. Γ_C 和刚性基础支撑之间的障碍函数用 g 表示.在本文中考虑很小的形变,应变张量为 $\epsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$,其中 $\mathbf{u} = (u_1(x), \dots, u_d(x))$ 为位移场.根据 Hooke 定律可知,应力张量和位移场的线性关系为

$$\sigma(\mathbf{u}) = C\epsilon(\mathbf{u}),$$

其中 $C = (C_{ijkl})$ 是(四阶)弹性模张量,它是对称正定的.设 \mathbf{n} 表示 Ω 在 Γ 上的单位外法向量, \mathbf{t} 表示 Ω 在 Γ 上的单位切向量,则

$$\begin{aligned} u_n &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}, \\ \sigma_n(\mathbf{u}) &= (\sigma_n(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma_t(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} - \sigma_n(\mathbf{u})\mathbf{n}. \end{aligned}$$

考虑弹性接触问题^[7-8],即寻找位移场 \mathbf{u} 满足以下条件:

$$\begin{cases} -\text{div } \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{on } \Gamma_D, \\ \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}, & \text{on } \Gamma_N, \\ u_n - g \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad (u_n - g) \cdot \sigma_n(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{0}, & \text{on } \Gamma_C, \end{cases} \quad (1)$$

其中 \mathbf{f} 是已知的体积力, $\hat{\mathbf{t}}$ 是已知的表面牵引力.对这个问题,本文将在已有交替方向乘子法的基础之上,提出计算效果更好的自适应交替方向乘子法^[13-18].

1 增广 Lagrange 乘子法

为了方便后面叙述,先引入以下记号:

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ on } \Gamma_D \}, \\ K &= \{ \mathbf{v} \in V, v_n - g \leq 0, \text{ on } \Gamma_C \}, \\ (x)^+ &= \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & \text{others,} \end{cases} \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \\ J(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

双线性形式为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx.$$

根据文献[7]可知,弹性接触问题(1)可以转化为限制性极小值问题,寻找 $\mathbf{u} \in K$ 满足不等式:

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (2)$$

由文献[1,9]可引入 Lagrange 乘子 $\lambda \in L^2(\Omega)$, 得问题(1)的变分形式:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - (\lambda, v_n), \quad (3)$$

其中双线性形式在 $V \times V$ 上满足以下条件:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_V^2,$$

α 的选取不依赖于 \mathbf{u} 的选取,且均大于零.

为了通过交替方向乘子法解决问题(2),需要构造一个用增广 Lagrange 函数表示的鞍点问题.根据文献[13],定义集合

$$\hat{K} = \{ q \in L^2(\Gamma_C), q - g \leq 0, \text{ on } \Gamma_C \}$$

和特征函数 $I_{\hat{K}}: L^2(\Gamma_C) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$I_{\hat{K}} = \begin{cases} 0, & p \in \hat{K}, \\ +\infty, & \text{others.} \end{cases}$$

所以问题(2)就等价于下面的限制性极小值问题,寻找 $(\mathbf{u}, p) \in V \times L^2(\Gamma_C)$ 满足

$$J(\mathbf{u}) + I_{\hat{K}}(p) \leq J(\mathbf{v}) + I_{\hat{K}}(q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times L^2(\Gamma_C), \quad (4)$$

$$u_n - p = 0. \quad (5)$$

根据式(4)和(5)可以得到增广 Lagrange 函数:

$$L_\rho(\mathbf{v}, q; \lambda) = J(\mathbf{v}) + I_{\hat{K}}(q) + (v_n - q, \lambda)_{\Gamma_C} + \frac{\rho}{2} \|v_n - q\|_{\Gamma_C}^2, \quad (6)$$

其中 $\rho > 0$ 为罚参数.考虑由式(6)表示如下鞍点问题:

$$L_\rho(\mathbf{u}, p; \mu) \leq L_\rho(\mathbf{u}, p; \lambda) \leq L_\rho(\mathbf{v}, q; \lambda), \quad \forall \{\mathbf{v}, q; \lambda\} \in V \times L^2(\Gamma_C) \times L^2(\Gamma_C), \quad (7)$$

然后可以求解问题(2)和(7).

引理 1^[6-8] 设 $\{\mathbf{u}, p; \lambda\}$ 是 L_ρ 在 $V \times \hat{K} \times L(\Gamma_C)$ 上的鞍点,则 \mathbf{u} 是问题(2)的解,且 $p = u_n$.

由引理 1 和文献[6-8]中的交替方向乘子法(ADMM1)可知,要要求解问题(2),只需要求解增广 Lagrange 函数 L_ρ 的鞍点 $\{\mathbf{u}, p; \lambda\}$.即先由给定的初始值和迭代公式计算位移,再计算辅助变量,最后更新 Lagrange 乘子,以此顺序迭代直至达到终止条件.

由文献[13-14]知,可以通过改变辅助变量和位移场的计算顺序对算法进行优化,并采用交替方向乘子法计算该鞍点问题.算法过程如下:

第 1 步 给定初始值 $\{\mathbf{u}^0, \lambda^0\} \in V \times L^2(\Gamma_C)$, $\rho > 0$, 置 $k = 0$.

第 2 步 求辅助变量 $p^{k+1} \in L^2(\Gamma_C)$:

$$L_\rho(\mathbf{u}^k, p^{k+1}; \lambda^k) \leq L_\rho(\mathbf{u}^k, q; \lambda^k), \quad \forall q \in L^2(\Gamma_C). \quad (8)$$

第 3 步 求解位移 $\mathbf{u}^{k+1} \in V$:

$$L_\rho(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}; \lambda^k) \leq L_\rho(\mathbf{v}, p^{k+1}; \lambda^k), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (9)$$

第 4 步 更新 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(u_n^{k+1} - p^{k+1}). \quad (10)$$

第 5 步 给定某种判定条件,若满足则停止迭代得到数值解 u_n^{k+1} ; 否则,置 $k = k + 1$, 返回第 2 步.

在上面的算法中,已经由迭代过程求得 u_n^k 和 λ^k (其中 $u_n^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n}$), 再根据极小值问题(8)就可以求得辅助变量 p^{k+1} .由已求得的 λ^k, p^{k+1} 和给定的 $\rho > 0$, 代入极小值问题(9)就可以求得唯一解 u_n^{k+1} ^[7].根据这个求解思路设计了下面的算法 1(ADMM2).

算法 1 交替方向乘子法(ADMM2)

第 1 步 给定初始值 $\lambda^0, \mathbf{u}^0, \rho > 0$, 置 $k = 0$.

第 2 步 计算辅助变量 $p^{k+1} \in L^2(\Gamma_C)$:

$$p^{k+1} = u_n^k + \frac{1}{\rho} [\lambda^k - (\lambda^k + \rho(u_n^k - g))^+]. \quad (11)$$

第 3 步 计算位移 $\mathbf{u}^{k+1} \in V$:

$$a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + \rho(u_n^{k+1}, v_n)_{\Gamma_C} = l(\mathbf{v}) + (\rho p^{k+1} - \lambda^k, v_n)_{\Gamma_C}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (12)$$

第 4 步 计算 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(u_n^{k+1} - p^{k+1}). \quad (13)$$

第 5 步 给定某种判定条件,若满足则停止迭代得到数值解 \mathbf{u}^{k+1} ; 否则,置 $k = k + 1$, 返回第 2 步.

2 自适应交替方向乘子法

我们注意到算法 1 对任何固定的罚参数 $\rho > 0$ 都是无条件收敛的^[14].但是,如果罚参数过大或者过小,都会影响算法的收敛速度.为了改善算法的性能,我们对罚参数应用了自适应法,则得到可变罚参数 ρ_k .接下

来我们假设一个非负序列 $\{s_k\}$, 满足

$$\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty.$$

在算法 1 中让罚参数在迭代过程中自动选取, 可以得到如下罚参数自适应交替方向乘法 (SADMM), 由此得到变参数序列 $\{\rho_k\}$, 以此序列代替固定参数 ρ .

算法 2 自适应交替方向乘法 (SADMM)

第 1 步 给定初始值 $\lambda^0, \mathbf{u}^0, \rho > 0$, 罚参数 $\rho_0 = \rho$, 置 $k = 0$.

第 2 步 计算辅助变量 $p^{k+1} \in L^2(\Gamma_C)$:

$$p^{k+1} = u_n^k + \frac{1}{\rho_k} [\lambda^k - (\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+]. \quad (14)$$

第 3 步 计算位移 $\mathbf{u}^{k+1} \in V$:

$$a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + \rho_k(u_n^{k+1}, v_n)_{\Gamma_C} = l(\mathbf{v}) + (\rho_k p^{k+1} - \lambda^k, v_n)_{\Gamma_C}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (15)$$

第 4 步 计算 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho_k(u_n^{k+1} - p^{k+1}). \quad (16)$$

第 5 步 选取罚参数 ρ_{k+1} , 使得

$$\frac{1}{1+s_k} \rho_k \leq \rho_{k+1} \leq (1+s_k) \rho_k. \quad (17)$$

第 6 步 给定某种判定条件, 若满足则停止迭代得到数值解 \mathbf{u}^{k+1} ; 否则, 置 $k = k + 1$, 返回第 2 步.

为了证明算法 2 的收敛性, 先给出以下引理和定理.

引理 2^[14,18] 如果序列 $\{s_k\}$ 满足 $s_k \geq 0$, 并且 $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty$, 则 $\prod_{k=0}^{+\infty} (1+s_k) < +\infty$.

定义以下符号:

$$C_s := \prod_{k=0}^{+\infty} (1+s_k).$$

由算法 2 的第 5 步可知, 罚参数 $\rho_k \in [\rho_0/C_s, C_s \rho_0]$ 是有界的, 设

$$\rho_L := \inf \{\rho_k\}_{k=0}^{+\infty} > 0, \quad \rho_U := \sup \{\rho_k\}_{k=0}^{+\infty} < +\infty,$$

根据算法的原理和问题的性质, 可得算法 2 的收敛结果.

定理 1 设 $\{(\mathbf{u}^k, p^k), \lambda^k\}$ 是由算法 2 产生的序列, 则有

$$\begin{aligned} \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 - 2\rho_k^2 (\delta\lambda^{k+1}, \delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C} \leq \\ \| \delta\lambda^k \|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k^2 \| \delta u_n^k \|_{\Gamma_C}^2 - (\| \delta\lambda^{k+1} \|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k^2 \| \delta u_n^{k+1} \|_{\Gamma_C}^2), \end{aligned}$$

其中 $\{\mathbf{u}, \lambda\}$ 是问题(3)的解.

证明 令 $\delta\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}, \delta p^k = p^k - p, \delta\lambda^k = \lambda^k - \lambda$, 根据式(3)和(15)可得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - (\lambda, v_n)_{\Gamma_C}, & \forall \mathbf{v} \in V, \\ a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + \rho_k(u_n^{k+1}, v_n)_{\Gamma_C} = l(\mathbf{v}) + (\rho_k p^{k+1} - \lambda^k, v_n)_{\Gamma_C}, & \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases}$$

两式相减可得

$$a(\delta\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + \rho_k(u_n^{k+1}, v_n)_{\Gamma_C} = (\rho_k p^{k+1} - \lambda^k + \lambda, v_n)_{\Gamma_C},$$

即

$$a(\delta\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = (\rho_k(p^{k+1} - u_n^{k+1}) - \delta\lambda^k, v_n)_{\Gamma_C}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (18)$$

在式(18)中取 $\mathbf{v} = \delta\mathbf{u}^{k+1}$, 则

$$a(\delta\mathbf{u}^{k+1}, \delta\mathbf{u}^{k+1}) = (\rho_k(p^{k+1} - u_n^{k+1}) - \delta\lambda^k, \delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (19)$$

由于 $p = u_n$ 在 Γ_C 上成立, 则代入式(19)得到

$$a(\delta\mathbf{u}^{k+1}, \delta\mathbf{u}^{k+1}) = (\rho_k(\delta p^{k+1} - \delta u_n^{k+1}) - \delta\lambda^k, \delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (20)$$

而且由式(16)有

$$\delta\lambda^{k+1} = \delta\lambda^k + \rho_k(\delta u_n^{k+1} - \delta p^{k+1}),$$

因此由以上两式,并根据双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 的性质可知

$$a(\delta \mathbf{u}^{k+1}, \delta \mathbf{u}^{k+1}) = -(\delta \lambda^{k+1}, \delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C} \geq \alpha \|\delta \mathbf{u}^{k+1}\|_V \geq 0. \quad (21)$$

因为在边界 Γ_C 上有 $\lambda \geq 0, u_n - g \leq 0, (u_n - g, \lambda)_{\Gamma_C} = 0$ 成立,由此可得到以下两个不等式:

$$\rho_k(u_n - g, (\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+ - \lambda)_{\Gamma_C} \leq 0, \quad (22)$$

$$(\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g) - (\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+, (\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+ - \lambda)_{\Gamma_C} \geq 0. \quad (23)$$

由式(22)、(23)可得

$$(\lambda^k + \rho_k \delta u_n^k - (\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+, (\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+ - \lambda)_{\Gamma_C} \geq 0. \quad (24)$$

由式(14)有

$$(\lambda^k + \rho_k(u_n^k - g))^+ = \lambda^k - \rho_k(p^{k+1} - u_n^k),$$

代入式(24)可以得到

$$(\lambda^k + \rho_k \delta u_n^k - \lambda^k + \rho_k(p^{k+1} - u_n^k), \lambda^k - \rho_k(p^{k+1} - u_n^k) - \lambda)_{\Gamma_C} \geq 0,$$

化简可得

$$(\rho_k \delta u_n^k + \rho_k(p^{k+1} - u_n^k), -\rho_k(p^{k+1} - u_n^k) + \delta \lambda^k)_{\Gamma_C} \geq 0,$$

变换化简得到

$$\rho_k(\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k, u_n^k - p^{k+1})_{\Gamma_C} \leq -\rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k(\delta u_n^k, \delta \lambda^k)_{\Gamma_C}. \quad (25)$$

由式(16)和 $p = u_n$ 在 Γ_C 上成立,可得

$$\lambda^{k+1} - \lambda = \lambda^k - \lambda + \rho_k(u_n^{k+1} - u_n + u_n - u_n^k + u_n^k - p^{k+1}),$$

即

$$\delta \lambda^{k+1} = \delta \lambda^k + \rho_k(\delta u_n^{k+1} - \delta u_n^k + u_n^k - p^{k+1}),$$

整理等式两边后得到

$$\delta \lambda^{k+1} - \rho_k \delta u_n^{k+1} = \delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k + \rho_k(u_n^k - p^{k+1}),$$

两边同时取范数并由式(25)可得

$$\begin{aligned} \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_k \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 &= \\ \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k + \rho_k(u_n^k - p^{k+1})\|_{\Gamma_C}^2 &= \\ \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + 2\rho_k(\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k, u_n^k - p^{k+1})_{\Gamma_C} &\leq \\ \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + 2\rho_k(\delta u_n^k, \delta \lambda^k)_{\Gamma_C} - 2\rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 &= \\ \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + 2\rho_k(\delta u_n^k, \delta \lambda^k)_{\Gamma_C}, \end{aligned}$$

即定理得证.

定理 2 设 $\{\mathbf{u}^k, p^k, \lambda^k\}$ 是算法 2 产生的序列,则在 V 上 $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}$, 在 $L^2(\Gamma_C)$ 上 $p^k \rightarrow p$, 在 $L^2(\Gamma_C)$ 上 $\lambda^k \rightarrow \lambda$.

证明 由于 $s_k \geq 0, 0 < \rho_{k+1} \leq (1 + s_k)\rho_k$, 可得

$$\begin{aligned} \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 &= \\ \|\delta \lambda^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + \rho_{k+1}^2 \|\delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + 2\rho_{k+1}(\delta \lambda^{k+1}, -\delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C} &\leq \\ (1 + s_k)^2 \|\delta \lambda^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + (1 + s_k)^2 \rho_k^2 \|\delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + \\ 2(1 + s_k)^2 \rho_k(\delta \lambda^{k+1}, -\delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C} &= \\ (1 + s_k)^2 \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_k \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

由定理 1 可知

$$\begin{aligned} \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_k \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 &\leq \\ \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 - 2\rho_k(\delta \lambda^k, -\delta u_n^k)_{\Gamma_C}. \end{aligned}$$

从而由式(26)有

$$\begin{aligned} \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 &\leq \\ (1 + s_k)^2 \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_k \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 &\leq \\ (1 + s_k)^2 \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - (1 + s_k)^2 \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 - \end{aligned}$$

$$2(1+s_k)^2 \rho_k (\delta \lambda^k, -\delta u_n^k)_{\Gamma_C} \leq (1+s_k)^2 \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 - 2\rho_k (\delta \lambda^k, -\delta u_n^k)_{\Gamma_C}. \quad (27)$$

令 $\xi_k = 2s_k + s_k^2$, 由罚参数的选取规则和 $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty$, 可得 $\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k < +\infty$ 和 $\prod_{k=0}^{+\infty} (1+\xi_k) < +\infty$. 定义以下符号:

$$C_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k, \quad C_p = \prod_{k=0}^{+\infty} (1+\xi_k).$$

由式(21)和(27)可得

$$\begin{aligned} & \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & (1+s_k)^2 \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 = \\ & (1+\xi_k) \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & \prod_{i=0}^k (1+\xi_i) \|\delta \lambda^0 - \rho_0 \delta u_n^0\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & C_p \cdot \|\delta \lambda^0 - \rho_0 \delta u_n^0\|_{\Gamma_C}^2, \quad \forall k \geq 1, \end{aligned} \quad (28)$$

即存在一个常数 $C > 0$ 使得下面不等式成立:

$$\|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 \leq C, \quad C > 0. \quad (29)$$

根据式(27)可得

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k (\delta \lambda^k, -\delta u_n^k)_{\Gamma_C} + \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 = \\ & \sum_{k=0}^{+\infty} [2\rho_k (\delta \lambda^k, -\delta u_n^k)_{\Gamma_C} + \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2] \leq \\ & \sum_{k=0}^{+\infty} [(1+s_k)^2 \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2] = \\ & \sum_{k=0}^{+\infty} [(1+\xi_k) \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2] = \\ & \sum_{k=0}^{+\infty} (\|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 - \|\delta \lambda^{k+1} - \rho_{k+1} \delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2) + \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & \|\delta \lambda^0 - \rho_0 \delta u_n^0\|_{\Gamma_C}^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

由式(21)、(27)和(30), 结合式(21), 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} 2\alpha \rho_L \|\delta \mathbf{u}^k\|_V^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_L \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k (\delta \lambda^k, -\delta u_n^k)_{\Gamma_C} + \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k^2 \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & \|\delta \lambda^0 - \rho_0 \delta u_n^0\|_{\Gamma_C}^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \|\delta \lambda^k - \rho_k \delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2 \leq \\ & C + C \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \leq (1+C_0) \cdot C. \end{aligned} \quad (31)$$

由级数收敛的必要条件可知

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}^k\|_V &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_n^k - p^{k+1}\|_{\Gamma_C} &= 0. \end{aligned}$$

所以在 V 上, $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}$. 因为在边界 Γ_C 上有 $p = u_n$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|p^{k+1} - p\|_{\Gamma_C} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|p^{k+1} - u_n^k\|_{\Gamma_C} + \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_n^k - p\|_{\Gamma_C} = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|p^{k+1} - u_n^k\|_{\Gamma_C} + \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_n^k - u_n\|_{\Gamma_C} &= 0, \end{aligned}$$

所以在 $L^2(\Gamma_C)$ 上有 $p^{k+1} \rightarrow p$.

对于任意 $k \geq 1$, 由于

$$\|\delta\lambda^{k+1} - \rho_{k+1}\delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 \leq C_p \cdot \|\delta\lambda^0 - \rho_0\delta u_n^0\|_{\Gamma_C}^2,$$

所以可以得到

$$\|\delta\lambda^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + \|\rho_{k+1}u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + 2\rho_{k+1}(\delta\lambda^{k+1}, -\delta u_n^{k+1})_{\Gamma_C} \leq C_p \cdot \|\delta\lambda^0 - \rho_0\delta u_n^0\|_{\Gamma_C}^2,$$

结合式(21)可得序列 $\{\lambda^k\}$ 是有界序列,可证 $\lambda^k \rightharpoonup \lambda^{[14]}$.从而定理得证.

综上,算法 2 的收敛性得证.

注 1 若在算法 2 的第 5 步中令 $s_k = 0$, 则 $\rho_k = \rho_0$. 因此算法 2 为固定罚参数情形,即为算法 1,故同理可证算法 1 也是收敛的.

3 罚参数的自适应法则

利用自适应交替方向乘子法求解无摩擦单侧弹性接触问题,迭代过程中通过迭代函数自动调整罚参数,用变参数 ρ_k 代替固定参数 $\rho^{[10-11,14-15]}$,从而达到提高算法效率的目的.下面具体考虑算法 2 中选取罚参数 ρ_k 的自适应法则.由定理 1 的结论可知序列 $\{u^k, p^k, \lambda^k\}$ 满足以下不等式:

$$\|\delta\lambda^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k^2 \|\delta u_n^{k+1}\|_{\Gamma_C}^2 \leq \|\delta\lambda^k\|_{\Gamma_C}^2 + \rho_k^2 \|\delta u_n^k\|_{\Gamma_C}^2.$$

为了提高算法的收敛速度,利用如下平衡原理:

$$\|\delta\lambda^k\|_{\Gamma_C} \approx \rho_k \|\delta u_n^k\|_{\Gamma_C},$$

分别用 λ^{k+1} 和 u_n^{k+1} 替换 λ 和 u_n 可以得到

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{\Gamma_C} \approx \rho_k \|u_n^{k+1} - u_n^k\|_{\Gamma_C}.$$

上面的分析给本文提供了一个选择罚参数 ρ_k 的基本思路.给定一个正常数 τ , 如果 $\rho_k \|u_n^{k+1} - u_n^k\|_{\Gamma_C} > (1 + \tau) \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{\Gamma_C}$, 就在下一次迭代中减小罚参数 ρ_k ; 如果 $\rho_k \|u_n^{k+1} - u_n^k\|_{\Gamma_C} < (1/(1 + \tau)) \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{\Gamma_C}$, 就在下一次迭代中增加罚参数 ρ_k .从而得到以下选取罚参数 ρ_{k+1} 的自适应法则:

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{1 + s_k} \rho_k, & w_k < \frac{1}{1 + \tau}, \\ (1 + s_k) \rho_k, & w_k > 1 + \tau, \\ \rho_k, & \text{others,} \end{cases}$$

其中

$$w_k = \frac{\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{\Gamma_C}}{\rho_k \|u_n^{k+1} - u_n^k\|_{\Gamma_C}}.$$

即序列 ρ_k 满足

$$\frac{1}{1 + s_k} \rho_k \leq \rho_{k+1} \leq (1 + s_k) \rho_k,$$

序列 $\{s_k\}$ 按照如下方式得到:

$$s_k = \begin{cases} \tau, & c_k < c_{k+1}, c_{k+1} \leq c_{\max}, \\ \frac{1}{(c_{k+1} - c_{\max})^2}, & c_k < c_{k+1}, c_{k+1} > c_{\max}, \\ 0, & \text{others,} \end{cases}$$

其中 c_{\max} 是一个正常数, c_k 表示 ρ_k 改变的次数,即

$$c_0 = 0, c_{k+1} = \begin{cases} c_k, & \frac{1}{1 + \tau} \leq w_k \leq 1 + \tau, \\ c_k + 1, & \text{others.} \end{cases}$$

对于给定的整数 $c_{\max} > 0$, 显然序列 $\{s_k\}$ 满足 $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty$.

4 算例分析

本文使用 FreeFEM++ 软件求解算例的位移场、迭代次数和 CPU 运行时间.该软件可以对二维和三维偏微分问题自动建立有限元模型,我们只需要在此基础上定义网格和问题即可进行求解.

为了验证算法的有效性,我们给出两个数值算例.在数值算例中,我们取 $\tau = 2$ 和 $c_{\max} = 100$.对所有数值结算都采用迭代终止条件 $\| \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \| \leq 10^{-5} \| \mathbf{u}^{k+1} \|$.

算例 1 设 $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$ 是一个矩形的弹性体,边界由 $\Gamma_D = \{0\} \times (0, 1)$, $\Gamma_{N_1} = (0, 2) \times \{1\}$, $\Gamma_{N_2} = \{2\} \times (0, 1)$ 和 $\Gamma_C = (0, 2) \times \{0\}$ 四部分组成.弹性体在 Γ_D 上固定不动,即 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,在 Γ_{N_1} 上满足 Riemann 边界条件 $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = (0, -10)^T$,在 Γ_{N_2} 上满足 $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$.在 Γ_C 上,弹性体 Ω 和刚性基础支撑之间的障碍函数 $g(x) = 0.01$.材料常数即弹性模量和 Poisson 比分别为 2 000 和 0.3.

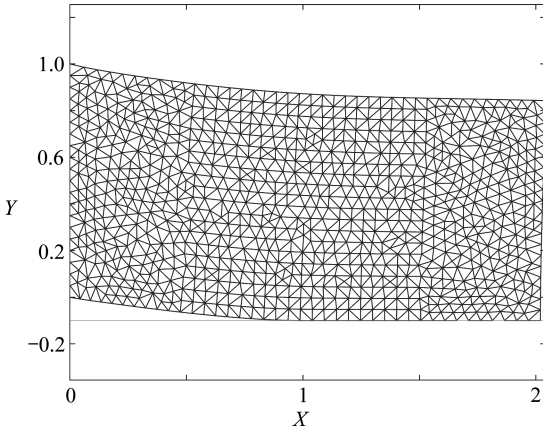


图 1 形变后的弹性体及障碍函数(算例 1)

Fig. 1 The deformed configuration and the obstacle function (example 1)

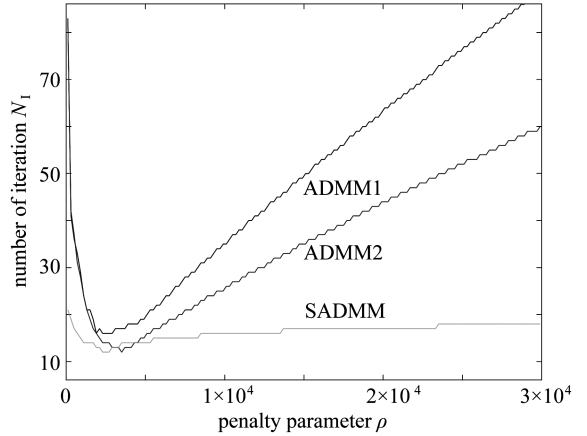


图 2 $g = 0.01$ 时的算法迭代次数

Fig. 2 The number of iterations for each method with $g = 0.01$

表 1 $g = 0.01$ 时 3 种算法的 CPU 运行时间

Table 1 CPU time for 3 methods with $g = 0.01$

| ρ | ADMM1 | | | | ADMM2 | | | | SADMM | | | |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | $h = \frac{1}{10}$ | $h = \frac{1}{20}$ | $h = \frac{1}{30}$ | $h = \frac{1}{40}$ | $h = \frac{1}{10}$ | $h = \frac{1}{20}$ | $h = \frac{1}{30}$ | $h = \frac{1}{40}$ | $h = \frac{1}{10}$ | $h = \frac{1}{20}$ | $h = \frac{1}{30}$ | $h = \frac{1}{40}$ |
| 1 | 3.080 | 9.305 | 29.344 | 37.788 | 5.213 | 12.865 | 24.283 | 41.639 | 0.562 | 1.171 | 2.617 | 4.214 |
| 10 | 2.670 | 8.665 | 34.726 | 37.629 | 5.137 | 12.331 | 23.814 | 40.909 | 0.454 | 1.135 | 2.342 | 3.891 |
| 10^2 | 0.611 | 2.890 | 6.224 | 10.178 | 1.474 | 4.169 | 7.156 | 11.393 | 0.610 | 0.984 | 2.145 | 3.632 |
| 10^3 | 0.229 | 0.896 | 1.842 | 3.765 | 0.577 | 1.223 | 1.978 | 3.943 | 0.425 | 0.650 | 1.321 | 2.516 |
| 10^4 | 0.306 | 1.223 | 2.905 | 5.742 | 0.502 | 1.228 | 2.479 | 4.286 | 0.409 | 0.743 | 1.496 | 2.699 |

用算法 2 求解此算例得到弹性体形变图,如图 1 所示(数据扩大为原来的 10 倍).为了展示算法的性能,对 3 种算法(ADMM1(文献[8]中的算法 1),ADMM2(本文中的算法 1),SADMM(本文中的算法 2))取相同的初始罚参数和步长 $h = 20$,考察了迭代收敛速度,如图 2 所示.显然,固定罚参数的交替方向乘子法(ADMM1、ADMM2)对参数的取值非常敏感,数值过大或过小都会减缓算法的收敛速度.而 SADMM 的罚参数自动选取,在很大程度上解决了算法对参数取值的依赖性.

取不同的初始罚参数 ρ 和步长 h ,采用 3 种算法对问题进行数值计算,所需的 CPU 运行时间如表 1 所示.图 1 和表 1 中数值结果均表明,自适应交替方向乘子法收敛速度及运行速度明显优于固定罚参数交替方向乘子法,并且对所有的罚参数具有较好的稳定性.

算例 2 设 $\Omega = (0, 3) \times (0, 1)$ 是弹性体,在边界 $\Gamma_D = \{0\} \times (0, 1)$ 上固定(即 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$);边界 $\Gamma_C = (0, 3) \times \{0\}$;边界 $\{3\} \times (0, 1)$ 上已知 Riemann 边界条件为 $\hat{\mathbf{t}} = (0, -2)^T$,并且在剩下的边界 Γ_N 上 $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$.给

定障碍函数为 $g(x_1) = 0.003(x_1 - 1.5)^2 + 0.001$, 弹性模量和 Poisson 比分别为 5 000 和 0.49.

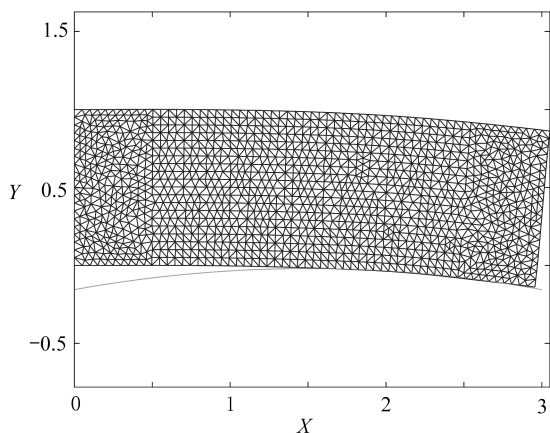


图 3 形变后的弹性体及障碍函数(算例 2)

Fig. 3 The deformed configuration and the obstacle function (example 2)

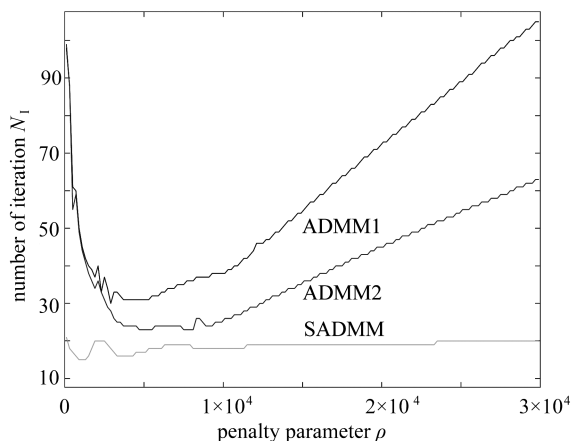


图 4 各算法的迭代次数

Fig. 4 The number of iterations for each method

表 2 3 种算法的 CPU 运行时间

Table 2 CPU time for 3 methods

| ρ | ADMM1 | | | | ADMM2 | | | | SADMM | | | |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | $h = \frac{1}{10}$ | $h = \frac{1}{20}$ | $h = \frac{1}{30}$ | $h = \frac{1}{40}$ | $h = \frac{1}{10}$ | $h = \frac{1}{20}$ | $h = \frac{1}{30}$ | $h = \frac{1}{40}$ | $h = \frac{1}{10}$ | $h = \frac{1}{20}$ | $h = \frac{1}{30}$ | $h = \frac{1}{40}$ |
| 1 | 4.114 | 13.733 | 35.051 | 54.791 | 4.008 | 13.227 | 30.753 | 53.383 | 0.378 | 1.313 | 3.129 | 7.029 |
| 10 | 3.827 | 13.505 | 39.201 | 65.841 | 3.792 | 12.91 | 29.465 | 52.564 | 0.381 | 1.227 | 2.982 | 6.649 |
| 10^2 | 1.565 | 5.294 | 16.247 | 26.196 | 1.256 | 5.132 | 12.322 | 22.394 | 0.314 | 1.116 | 2.645 | 5.985 |
| 10^3 | 0.933 | 2.552 | 7.530 | 12.051 | 0.872 | 2.386 | 5.276 | 8.389 | 0.238 | 0.786 | 1.932 | 5.017 |
| 10^4 | 0.699 | 2.059 | 6.003 | 10.109 | 0.384 | 1.306 | 3.059 | 5.449 | 0.315 | 0.948 | 2.313 | 3.849 |

对此算例应用算法 2 得到形变后的弹性体,如图 3 所示(数据扩大为原来的 20 倍).对 3 种算法(ADMM1、ADMM2、SADMM)取不同的初始罚参数 ρ 和步长 $h = 20$,考察算法收敛速度,数值结果如图 4 所示.从数值结果可以看出,ADMM2 比 ADMM1 的迭代次数更少,但是还是没有摆脱对罚参数的依赖性.而 SADMM 相对比较稳定,不会因为罚参数的过大或者过小而显著增加迭代次数.为了更全面展示 SADMM 的性能,分别取不同的初始罚参数 ρ 和步长 h ,考察 3 种算法的 CPU 运行时间,如表 2 所示.结果表明自适应交替方向乘子法具有较好的性能.

5 结 论

本文提出了求解弹性接触问题的自适应交替方向乘子法,该算法不仅计算简单,并且给出的自适应法则利用边界迭代函数自动选择合适的罚参数,能有效解决交替方向乘子法的迭代次数高度依赖于罚参数 ρ 的问题,从而显著提高算法性能.数值结果表明了该算法的有效性.

参考文献(References):

[1] 韩渭敏,程晓良. 变分不等式简介:基本理论数值分析及应用[M]. 北京:高等教育出版社,2007.(HAN Weimin, CHENG Xiaoliang. *Introduction to Variational Inequalities: Numerical Analysis and Application of Basic Theory*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.(in Chinese))

[2] 王耀东. 变分不等方程[M]. 北京:高等教育出版社,1987.(WANG Yaodong. *Equation of Variational Inequality*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1987.(in Chinese))

[3] 赵雪芬,李星. 带裂纹十次对称二维准晶平面弹性的无摩擦接触问题[J]. 应用数学和力学,2019,40(2): 223-236.(ZHAO Xuefen, LI Xing. A frictionless contact problem of 2D decagonal quasicrystal plane elasticity with

- cracks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 223-236.(in Chinese))
- [4] KANNO Y. An accelerated Uzawa method for application to frictionless contact problem[J]. *Optimization Letters*, 2020, **14**(7): 1845-1854.
- [5] HUANG Z J, CHENG X L. An accelerated method of Uzawa algorithm in contact problems[J]. *Computers Mathematics With Applications*, 2022, **127**:97-104.
- [6] GLOWINSKI R, LE TALLEC P. *Augmented Lagrangian and Operator-splitting Methods in Nonlinear Mechanics*[M]//*Studies in Applied and Numerical Mathematics*. SIAM, 1989.
- [7] KOKO J. Uzawa block relaxation method for the unilateral contact problem[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8):2343-2356.
- [8] KOKO J. Alternating direction method of multiplier for the unilateral contact problem with an automatic penalty parameter selection[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, **78**:706-723.
- [9] STADLER G. Path-following and augmented Lagrangian methods for contact problems in linear elasticity[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **203**(2):706-723.
- [10] ZHANG S G, LI X L. Boundary augmented Lagrangian method for contact problems in linear elasticity[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2015, **61**:127-133.
- [11] ZHANG S G, LI X L. A self-adaptive projection method for contact problems with the BEM[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **55**:145-159.
- [12] ZHANG S G, LI X L. Self-adaptive projection and boundary element methods for contact problems with Tresca friction[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **68**:72-85.
- [13] GLOWINSKI R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [14] 郭楠馨, 张守贵. 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 682-693. (GUO Nanxin, ZHANG Shougui. A self-adaptive Uzawa block relaxation algorithm for free boundary problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 682-693.(in Chinese))
- [15] HE B S. Self-adaptive operator splitting methods for monotone variational inequalities[J]. *Numerische Mathematik*, 2013, **94**(4): 715-737.
- [16] 王欣, 郭科. 一类非凸优化问题广义交替方向法的收敛性[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(12): 1410-1425. (WANG Xin, GUO Ke. Convergence of the generalized alternating direction method of multipliers for a class of nonconvex optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(12): 1410-1425.(in Chinese))
- [17] ZHANG S G, GUO N X. Uzawa block relaxation method for free boundary problem with unilateral obstacle [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2021, **98**(4): 671-689.
- [18] 张茂林, 冉静, 张守贵. 具有滑动边界条件 Stokes 问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(2): 188-198.(ZHANG Maolin, RAN Jing, ZHANG Shougui. A self-adaptive Uzawa block relaxation method for Stokes problems with slip boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(2): 188-198.(in Chinese))