

# 求解理想磁流体方程的四阶 WENO 型熵稳定格式\*

张成治, 郑素佩, 陈雪, 张蕊

(长安大学 理学院, 西安 710064)

**摘要:** 构造了一种用于求解理想磁流体方程的四阶熵稳定半离散有限体积格式. 该格式空间方向上将高阶熵守恒通量与采用 WENO 重构的耗散项结合, 得到高阶熵稳定通量. 通过在耗散项中添加开关函数, 使得数值通量具有更低的耗散并且高阶 WENO 重构满足符号性质. 对用来控制磁场散度的源项采用中心格式离散, 最终得到与熵守恒通量一致的高阶精度. 几个一维、二维算例表明该格式无振荡, 鲁棒性强, 可以精确捕捉间断.

**关键词:** 理想磁流体方程; 熵稳定格式; WENO 重构; 有限体积法

中图分类号: O241 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.440178

## A 4th-Order WENO-Type Entropy Stable Scheme for Ideal Magnetohydrodynamic Equations

ZHANG Chengzhi, ZHENG Supei, CHEN Xue, ZHANG Rui

(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China)

**Abstract:** A 4th-order entropy stable semi-discrete finite volume scheme was constructed for ideal magnetohydrodynamic equations. This scheme combines the high-order entropy conservative flux with the dissipation term reconstructed with the WENO scheme in the spatial direction. With a switching function added to the dissipation term, the numerical flux has lower dissipation and the WENO reconstruction satisfies the sign property. The source term used to control the divergence of the magnetic field is discretized with the center difference scheme to obtain high-order accuracy consistent with the entropy conservative flux. Several 1D and 2D cases show that, the scheme has no oscillation and strong robustness, and can accurately capture discontinuities.

**Key words:** ideal magnetohydrodynamic equation; entropy stable scheme; WENO reconstruction; finite volume method

## 0 引言

磁流体动力学 (magnetohydrodynamic, MHD) 方程作为天体物理学和工程中重要的物理模型, 由 Navier-Stokes 方程和 Maxwell 方程耦合而成, 可以很好地模拟空间等离子体的运动规律. MHD 方程数值计算的难点之一是必须满足一个附加的磁场无散度条件, 否则会导致在计算中出现负密度和负压. Godunov<sup>[1]</sup> 从方程的

\* 收稿日期: 2023-06-13; 修订日期: 2023-08-02

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11971075)

作者简介: 张成治 (1999—), 男, 硕士生 (E-mail: zhangchengzhi2021@163.com);

郑素佩 (1978—), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师 (通讯作者. E-mail: zsp2008@chd.edu.cn).

引用格式: 张成治, 郑素佩, 陈雪, 张蕊. 求解理想磁流体方程的四阶 WENO 型熵稳定格式 [J]. 应用数学和力学, 2023, 44(11): 1398-1412.

对称性出发,提出了通过添加一个非守恒源项来控制磁场散度,最终得到了修正后的 MHD 方程。

MHD 方程具有双曲守恒律方程的性质,因此考虑将求解双曲守恒律方程的方法应用到 MHD 方程中。双曲守恒律方程的数值计算离不开熵。Tadmor<sup>[2-3]</sup>首次引入熵守恒通量,添加合适的耗散算子来构造求解非线性双曲守恒律的熵稳定格式。熵稳定格式满足离散熵不等式,在间断区域可以保持熵的耗散,保证不会出现伪振荡。Roe<sup>[4]</sup>提出将 Roe 数值格式中的黏性项作为熵稳定格式中的耗散项,进而得到 Roe 型的熵稳定格式。郑素佩等<sup>[5-7]</sup>利用旋转不变性得到混合数值通量并用来求解浅水波方程以及 Euler 方程,在保持熵稳定性质的同时又提高了数值格式的分辨率。Fjordholm 等<sup>[8]</sup>为双曲守恒律方程设计了一种基于 ENO(essentially non-oscillatory)重构的任意高阶精确的熵稳定格式,称之为 TeCNO 格式。为了构建保持熵稳定并且精度更高的重构方式,Biswas 等<sup>[9]</sup>通过在耗散项部分添加开关算子,得到了一种基于 WENO 重构的熵稳定通量。Duan 和 Tang<sup>[10-11]</sup>构造了基于该重构的高阶精度熵稳定有限差分格式,用来求解浅水磁流体方程和相对论流体方程。郑素佩等<sup>[12]</sup>利用 Lagrange 多项式证明了一种满足符号性质的 WENO 重构,并构造了熵稳定格式。Duan 和 Tang<sup>[13]</sup>将自适应移动网格与高阶熵稳定格式结合用来求解相对论流体方程。

国内外有许多学者研究将熵稳定格式应用于 MHD 方程求解中。Winters 和 Gassner<sup>[14]</sup>针对于理想 MHD 方程构造了一组方便快捷的熵守恒通量,并引入了 Janhunen 源项,最终得到了求解 MHD 方程的一阶熵稳定格式。为了提高精度,Chandrashekar 和 Klingenberg<sup>[15]</sup>基于 TeCNO 格式的构造思想,利用满足符号性质的 Minmod 限制器对特征熵变量进行重构,得到二阶熵稳定格式。翟梦情等<sup>[16]</sup>将移动网格与熵稳定格式相结合,并用来求解一维理想 MHD 方程。Liu 和 Shu 等<sup>[17]</sup>将满足熵稳定性质的 DG(discontinuous Galerkin)方法推广至 MHD 方程,并达到三阶精度。熵稳定格式的精度主要与耗散项中熵变量值的跳跃有关。通过对耗散项进行 WENO 重构,可以显著提高熵稳定格式的精度。但目前还没有将 WENO 重构与熵稳定格式结合用来求解理想磁流体方程的研究。

本文考虑利用五阶 WENO 重构的思想对特征熵变量进行重构,并且将高阶熵守恒通量与离散源项部分结合,通过在耗散项中加入开关函数,使得耗散项部分仅在间断位置被激活,从而得到一种低耗散、高分辨率的用来求解理想 MHD 方程的四阶熵稳定格式。

## 1 控制方程

理想磁流体方程是由质量、动量、能量以及磁场所构成的一组双曲守恒律方程组,可表示为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u}^T \\ \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \left(p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2\right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ \mathbf{u}^T \left(\rho e + p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2\right) - \mathbf{B}^T(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中  $\rho$  为质量,  $\rho \mathbf{u} = [\rho u \ \rho v \ \rho w]^T$  为动量,  $\rho e$  为总能量,  $\mathbf{B} = [B_1 \ B_2 \ B_3]^T$  为磁场,  $p$  为压力,符号  $\otimes$  表示张量积。压力  $p$  可由其他变量表示为

$$p = (\gamma - 1) \left( \rho e - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 \right), \quad (2)$$

其中  $\gamma$  为绝热指数,在数值计算中被考虑为常数。记守恒变量  $\mathbf{U} = [\rho \ \rho \mathbf{u} \ \rho e \ \mathbf{B}]^T$ 。对于理想 MHD 方程而言,一个额外的无散度条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

需要被满足,否则在进行数值模拟时会出现数值不稳定。给定第  $i$  个维度的熵对,即熵函数和熵通量函数:

$$(\eta(\mathbf{U}) \ q_i(\mathbf{U})) = \left( -\frac{\rho s}{\gamma - 1} \quad -\frac{\rho s u_i}{\gamma - 1} \right), \quad (4)$$

其中  $s = \ln(\rho \rho^{-\gamma})$ ,  $u_i$  为  $\mathbf{u}$  的第  $i$  个分量。基于文献[12]中给出的熵变量的定义,可以得到

$$\mathbf{V} = \frac{d\boldsymbol{\eta}(\mathbf{U})}{d\mathbf{U}} = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]^T = \left[ \frac{\gamma - s}{\gamma - 1} - \beta \|\mathbf{u}\|^2 \quad 2\beta \mathbf{u}^T \quad -2\beta \quad 2\beta \mathbf{B}^T \right]^T, \quad (5)$$

其中  $\beta = \rho/(2p)$ . Godunov<sup>[11]</sup> 针对于理想 MHD 方程的无散度条件, 提出通过添加一个额外的非守恒源项来控制磁场散度. 最终得到修正后的 MHD 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u}^T \\ \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \left(p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2\right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ \mathbf{u}^T \left(\rho e + p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2\right) - \mathbf{B}^T(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} \end{bmatrix} + \phi'^T(\mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

其中  $\phi'(\mathbf{V}) = [0 \quad \mathbf{B}^T \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{u}^T]$ .

## 2 理想 MHD 方程四阶熵稳定格式

本节考虑在高阶熵守恒通量以及高阶离散源项的基础上, 通过添加具有开关函数并且基于 WENO 重构的耗散项, 以确保仅在满足符号性质的位置进行对特征熵变量的 WENO 重构, 从而得到一种耗散更低并且满足熵稳定性质的高阶数值通量.

在一维情况下, 式(6)可以表示为如下守恒形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \phi'^T(\mathbf{V}) \frac{\partial B_1(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中守恒变量  $\mathbf{U} = [\rho \quad \rho u \quad \rho e \quad \mathbf{B}]^T$ ,  $B_1(\mathbf{U})$  为磁场  $\mathbf{B}$  的第一个分量, 通量函数为

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 - B_1^2 \\ \rho u v - B_1 B_2 \\ \rho u w - B_1 B_3 \\ \left(E + p + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2\right) u - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) B_1 \\ 0 \\ u B_2 - v B_1 \\ u B_3 - 2B_1 \end{bmatrix}.$$

考虑在均匀划分的空间网格上对式(7)进行离散, 得如下半离散有限体积格式:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = - \frac{\hat{\mathbf{F}}_{x+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{x-1/2}}{\Delta x} - \phi'^T(\mathbf{V}_i) \frac{\hat{B}_{1,i+1/2} - \hat{B}_{1,i-1/2}}{\Delta x}, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{U}_i = \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} \mathbf{U}(x, t) dx$  为守恒变量  $\mathbf{U}$  在第  $i$  个单元  $C_i = [x_{x-1/2}, x_{x+1/2}]$  上的单元平均值,  $\hat{\mathbf{F}}_{x+1/2}$  为与通量函数相容的数值通量. 采用中心格式的磁场散度部分满足

$$\frac{\hat{B}_{1,i+1/2} - \hat{B}_{1,i-1/2}}{\Delta x} \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \nabla \cdot \mathbf{B} dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{x-1/2}}^{x_{x+1/2}} \frac{\partial B_1}{\partial x} dx.$$

### 2.1 熵稳定格式

若数值格式(8)满足离散熵等式则为熵守恒格式, 即

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}(\mathbf{U}_i)}{dx} = - \frac{\hat{q}_{x+1/2} - \hat{q}_{x-1/2}}{\Delta x}, \quad (9)$$

其中  $\hat{q}_{x+1/2}$  为数值熵通量函数. Chandrashekar 等<sup>[15]</sup> 提出了数值通量为熵守恒通量的一个充分条件, 并给出了

如下熵守恒通量:

$$\mathbf{F}^{\text{EC}} = [\mathbf{F}^{(1)} \quad \mathbf{F}^{(2)} \quad \mathbf{F}^{(3)} \quad \mathbf{F}^{(4)} \quad \mathbf{F}^{(5)} \quad \mathbf{F}^{(6)} \quad \mathbf{F}^{(7)} \quad \mathbf{F}^{(8)}]^{\text{T}}, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= \tilde{\rho}\bar{u}, \quad \mathbf{F}^{(2)} = \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{\beta}} + \bar{u}\mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2} \overline{\|\mathbf{B}\|^2} - \overline{B_1 B_1}, \\ \mathbf{F}^{(3)} &= \bar{v}\mathbf{F}^{(1)} - \overline{B_1 B_2}, \quad \mathbf{F}^{(4)} = \bar{w}\mathbf{F}^{(1)} - \overline{B_1 B_3}, \quad \mathbf{F}^{(6)} = 0, \\ \mathbf{F}^{(7)} &= \frac{1}{\tilde{\beta}}(\overline{\beta u B_2} - \overline{\beta v B_1}), \quad \mathbf{F}^{(8)} = \frac{1}{\tilde{\beta}}(\overline{\beta u B_3} - \overline{\beta w B_1}), \\ \mathbf{F}^{(5)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\gamma - 1)\tilde{\beta}} - \overline{\|\mathbf{u}\|^2} \right] \mathbf{F}^{(1)} + \bar{u}\mathbf{F}^{(2)} + \bar{v}\mathbf{F}^{(3)} + \bar{w}\mathbf{F}^{(4)} + \\ &\quad \overline{B_1}\mathbf{F}^{(6)} + \overline{B_2}\mathbf{F}^{(7)} + \overline{B_3}\mathbf{F}^{(8)} - \frac{1}{2} \bar{u} \overline{\|\mathbf{B}\|^2} + (\bar{u}\bar{B}_1 + \bar{v}\bar{B}_2 + \bar{w}\bar{B}_3)\bar{B}_1, \end{aligned}$$

式中  $\bar{a}_{x+1/2} = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ ,  $\tilde{a}_{x+1/2} = \frac{a_{i+1} - a_i}{\ln(a_{i+1}) - \ln(a_i)}$ . 对离散源项部分, 取  $\hat{B}_{1,i+1/2} = \bar{B}_{1,i+1/2}$ ,  $\hat{B}_{1,i-1/2} = \bar{B}_{1,i-1/2}$ .

熵守恒数值格式具有二阶精度, 为了提高熵守恒格式的精度, Fjordholm 等<sup>[8]</sup>通过对二阶熵守恒通量进行线性组合, 得到任意偶数阶精度的熵守恒通量. 对于离散源项部分, 为了获得与高阶熵守恒通量一致的精度, 同样考虑线性组合, 得到任意偶数阶精度的离散磁场分量. 本文考虑四阶精度的数值通量和离散磁场分量, 具体表示为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} = \frac{4}{3} \mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) - \frac{1}{6} (\mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i+1}) + \mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+2})), \\ B_{1,i+1/2}^4 = \frac{4}{3} \left( \frac{B_{1,i} + B_{1,i+1}}{2} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{B_{1,i-1} + B_{1,i+1}}{2} + \frac{B_{1,i} + B_{1,i+2}}{2} \right). \end{cases} \quad (11)$$

熵守恒格式在光滑区域可以保持高精度, 但是当解出现间断时会产生熵耗散, 仅用熵守恒格式会产生伪振荡. 因此需要在熵守恒格式中添加额外的数值耗散机制以保证格式的熵稳定性. 若数值格式满足离散熵不等式:

$$\frac{d\eta(\mathbf{U}_i)}{dx} \leq - \frac{\hat{q}_{x+1/2} - \hat{q}_{x-1/2}}{\Delta x}, \quad (12)$$

即为熵稳定格式. 本文考虑将 Roe 格式中的数值黏性作为耗散项添加至熵守恒通量来构造熵稳定数值通量:

$$\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{ES}} = \mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC}} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{x+1/2} |\mathbf{A}_{x+1/2}| \mathbf{R}_{x+1/2}^{\text{T}} (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i), \quad (13)$$

其中  $\mathbf{R}_{x+1/2}$  为 Jacobi 矩阵  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \phi'(\mathbf{V})B_1(\mathbf{U}))$  的右特征向量的离散形式.  $|\mathbf{A}_{x+1/2}|$  可以选择 Roe 型的耗散项

$$|\mathbf{A}_{x+1/2}| = \text{diag}(|\lambda_{i+1/2,1}|, \dots, |\lambda_{i+1/2,8}|),$$

或者 Lax-Friedrichs 型的耗散项

$$|\mathbf{A}_{x+1/2}| = \max(|\lambda_{i+1/2,1}|, \dots, |\lambda_{i+1/2,8}|) \mathbf{I},$$

其中  $\{\lambda_{i+1/2,k}\}_{k=1,2,\dots,8}$  为 Jacobi 矩阵  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \phi'(\mathbf{V})B_1(\mathbf{U}))$  的特征值, 具体表示参见附录 A.

## 2.2 五阶 WENO 重构

熵稳定通量的耗散项部分包含熵变量的差分, 使得熵稳定格式精度只有一阶. 为了得到高阶熵稳定格式, 本文考虑五阶 WENO 重构方法. 基于 2.1 小节中提出的四阶熵守恒通量, 添加重构后的耗散项得到高阶熵稳定数值通量:

$$\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{HES}} = \mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{x+1/2} |\mathbf{A}_{x+1/2}| (\mathbf{v}_{x+1/2}^+ - \mathbf{v}_{x+1/2}^-), \quad (14)$$

其中  $\mathbf{v}_{x+1/2}^-$  和  $\mathbf{v}_{x+1/2}^+$  分别为特征熵变量  $\mathbf{v} = \mathbf{R}_{x+1/2}^T \mathbf{V}$  在单元交界面  $i + 1/2$  左右的 WENO 重构值。

WENO 重构后  $\mathbf{v}_{x+1/2}^-$  的第  $j$  个分量表示为  $v_{i+1/2,j}^-$ , 表达式如下:

$$v_{i+1/2,j}^- = \omega_1 \hat{v}_1 + \omega_2 \hat{v}_2 + \omega_3 \hat{v}_3, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = \frac{1}{3} v_{i-2,j} - \frac{7}{6} v_{i-1,j} + \frac{11}{6} v_{i,j}, & \hat{v}_2 = -\frac{1}{6} v_{i-1,j} + \frac{5}{6} v_{i,j} + \frac{1}{3} v_{i+1,j}, \\ \hat{v}_3 = \frac{1}{3} v_{i,j} + \frac{5}{6} v_{i+1,j} - \frac{1}{6} v_{i+2,j}, \end{cases} \quad (16)$$

其中  $v_{k,j}$  ( $k = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$ ) 表示第  $k$  个单元上的特征熵变量  $\mathbf{v}_k$  的第  $j$  个分量。式(15)中的加权系数  $\omega_k$  具体可表示为

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad \alpha_k = \frac{d_k}{\beta_k + \varepsilon}, \quad k = 1, 2, 3,$$

其中  $\varepsilon = 10^{-6}$ , 用来防止出现分母部分为 0;  $d_1 = \frac{1}{10}, d_2 = \frac{3}{5}, d_3 = \frac{3}{10}$ ;  $\beta_k$  为光滑因子, 采用 Shu<sup>[18]</sup> 提出的计算方法, 即

$$\beta_1 = \frac{13}{12} (v_{i-2,j} - 2v_{i-1,j} + v_{i,j})^2 + \frac{1}{4} (v_{i-2,j} - 4v_{i-1,j} + 3v_{i,j})^2,$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} (v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j})^2 + \frac{1}{4} (v_{i-1,j} - v_{i+1,j})^2,$$

$$\beta_3 = \frac{13}{12} (v_{i,j} - 2v_{i+1,j} + v_{i+2,j})^2 + \frac{1}{4} (3v_{i,j} - 4v_{i+1,j} + 3v_{i+2,j})^2.$$

$\mathbf{v}_{i+1/2,j}^+$  与  $\mathbf{v}_{i+1/2,j}^-$  计算方法相同, 只需要取与  $\mathbf{v}_{i+1/2,j}^-$  对称的系数即可。

由于 WENO 重构过程不一定满足符号性质, 即

$$\text{sgn}(\mathbf{v}_{x+1/2}^+ - \mathbf{v}_{x+1/2}^-) = \text{sgn}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i). \quad (17)$$

符号性质保证了重构后数值格式仍然具有熵稳定性。Biswas 等<sup>[9]</sup> 针对于 WENO 重构提出并证明了通过在每个特征熵变量分量的跳跃处添加一个开关函数:

$$S_k = \begin{cases} 1, & (v_{i+1/2,k}^+ - v_{i+1/2,k}^-)(v_{i+1,k} - v_{i,k}) > 0, \\ 0, & \text{others}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (18)$$

即可保证经 WENO 重构后的数值通量仍然保持符号性质。由于最终得到的高阶熵稳定数值通量为

$$\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{ES-WENO}} = \mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{x+1/2} |\mathbf{A}_{x+1/2}| \langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2}, \quad (19)$$

其中  $\langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2}$  的第  $k$  个分量  $\langle v_k \rangle_{x+1/2} = S_k (v_{i+1/2,k}^+ - v_{i+1/2,k}^-)$ 。由式(18)可以看出, 在 WENO 重构不满足符号性质的位置, 对应耗散项部分变为 0。与基于 ENO 重构的 TeCNO 格式相比, 由于上述格式仅在符号性质满足的区域进行 WENO 重构, 因此具有更小的耗散。有关 ES-WENO 格式的熵稳定性证明参见附录 B。

### 2.3 二维理想 MHD 方程四阶熵稳定格式

二维理想 MHD 方程在网格划分均匀的区域上的有限体积半离散格式为

$$\frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt} = - \frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{\hat{\mathbf{G}}_{i,j+1/2} - \hat{\mathbf{G}}_{i,j-1/2}}{\Delta y} - \phi^T(\mathbf{V}_{ij}) \left( \frac{\hat{\mathbf{B}}_{1,i+1/2,j} - \hat{\mathbf{B}}_{1,i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\hat{\mathbf{B}}_{2,i,j+1/2} - \hat{\mathbf{B}}_{2,i,j-1/2}}{\Delta y} \right), \quad (20)$$

其中  $\mathbf{U}_{ij} = \frac{1}{|C_{ij}|} \iint_{C_{ij}} \mathbf{U}(x, y, t) dx dy$  表示守恒变量  $\mathbf{U}$  在均匀四面体计算单元  $C_{ij} = [x_{x-1/2}, x_{x+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$  上的单元平均值。 $\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2,j}, \hat{\mathbf{G}}_{i,j\pm 1/2}$  分别为  $x, y$  方向上相容的数值通量,  $\hat{\mathbf{B}}_{1,i\pm 1/2,j}, \hat{\mathbf{B}}_{2,i,j\pm 1/2}$  为离散的  $x, y$  方向上的磁场分量, 并且满足

$$\frac{\hat{B}_{1,i+1/2,j} - \hat{B}_{1,i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\hat{B}_{2,i,j+1/2} - \hat{B}_{2,i,j-1/2}}{\Delta y} \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_j} \nabla \cdot \mathbf{B} dx dy = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x-1/2}^{x+1/2} \left( \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

鉴于  $x$  方向上的数值通量表示与一维情况类似, 本小节只考虑  $y$  方向. 首先给出熵守恒数值通量:

$$\mathbf{G}^{\text{EC}} = [\mathbf{G}^{(1)} \quad \mathbf{G}^{(2)} \quad \mathbf{G}^{(3)} \quad \mathbf{G}^{(4)} \quad \mathbf{G}^{(5)} \quad \mathbf{G}^{(6)} \quad \mathbf{G}^{(7)} \quad \mathbf{G}^{(8)}]^T,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(1)} &= \tilde{\rho} \tilde{u}, \quad \mathbf{G}^{(2)} = \tilde{u} \mathbf{G}^{(1)} - \overline{B_1 B_2}, \quad \mathbf{G}^{(3)} = \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{\beta}} + \tilde{v} \mathbf{G}^{(1)} + \frac{1}{2} \overline{\|\mathbf{B}\|^2} - \overline{B_2 B_2}, \\ \mathbf{G}^{(4)} &= \tilde{w} \mathbf{G}^{(1)} - \overline{B_2 B_3}, \quad \mathbf{G}^{(6)} = \frac{1}{\tilde{\beta}} (\overline{\beta v B_1} - \overline{\beta u B_2}), \quad \mathbf{G}^{(7)} = 0, \quad \mathbf{G}^{(8)} = \frac{1}{\tilde{\beta}} (\overline{\beta v B_3} - \overline{\beta w B_2}), \\ \mathbf{G}^{(5)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\gamma - 1)\tilde{\beta}} - \overline{\|\mathbf{u}\|^2} \right] \mathbf{G}^{(1)} + \tilde{u} \mathbf{G}^{(2)} + \tilde{v} \mathbf{G}^{(3)} + \tilde{w} \mathbf{G}^{(4)} + \\ &\quad \overline{B_1} \mathbf{G}^{(6)} + \overline{B_2} \mathbf{G}^{(7)} + \overline{B_3} \mathbf{G}^{(8)} - \frac{1}{2} \tilde{v} \overline{\|\mathbf{B}\|^2} + (\tilde{u} \tilde{B}_1 + \tilde{v} \tilde{B}_2 + \tilde{w} \tilde{B}_3) \tilde{B}_2, \end{aligned}$$

对  $y$  方向上的离散源项部分, 考虑  $\hat{B}_{2,i,j+1/2} = \tilde{B}_{2,i,j+1/2}$ ,  $\hat{B}_{2,i,j-1/2} = \tilde{B}_{2,i,j-1/2}$ . 四阶熵守恒通量和四阶离散源项部分采用与式(11)相同的表示方式. 最终得到  $y$  方向上高阶熵稳定通量如下:

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{\text{ES-WENO}} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{\text{EC-4}} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i,j+1/2} |\mathbf{A}_{i,j+1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{i,j+1/2}|, \quad (21)$$

其中  $\mathbf{R}_{i,j+1/2}$  与  $\mathbf{A}_{i,j+1/2}$  具体表达参考附录 A, 并取  $\mathbf{n} = [0, 1, 0]^T$ ;  $\langle \mathbf{v} \rangle_{i,j+1/2}$  为带有开关函数的特征熵变量的跳跃值.

### 3 数值算例

本节给出几个理想 MHD 方程数值算例用以检验该数值格式的精度、低耗性以及捕捉间断的能力. 时间离散部分采用四阶精确的 Runge-Kutta 方法<sup>[19]</sup>. 空间离散考虑四阶精度的熵守恒通量以及五阶 WENO 重构的耗散项. 格式理论上整体精度可以达到四阶. 二维算例网格数均选择  $256 \times 256$ . 如无特殊声明, 耗散项部分均选择 Roe 型耗散项. 一维算例中 ES-WENO、TeCNO、ES 和 ref 分别代表基于 WENO 重构的熵稳定格式、基于 ENO 重构的熵稳定格式、一阶熵稳定格式和参考解, 其中参考解由 5 000 个网格的一阶熵稳定格式求得.

#### 3.1 一维光滑 Alfvén 波问题

光滑 Alfvén 波算例经常用来计算理想 MHD 方程数值格式的精度. 本文考虑一维情况下的光滑 Alfvén 波, 用来验证 ES-WENO 格式高阶精度的特性, 选择周期性边界条件并引入垂直磁场  $B_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi x)$ , 平行磁场  $B_{\parallel} = 1.0$  以及  $z$  方向上的磁场  $B_z = 0.1 \cos(2\pi x)$ . 具体的初始条件数据由下式给出:

$$\rho = 1, \quad \mathbf{u} = [0, B_{\perp}, B_{\parallel}]^T, \quad p = 0.1, \quad \mathbf{B} = [B_{\parallel}, B_{\perp}, B_z]^T,$$

计算区间为  $[0, 1]$ , 绝热指数  $\gamma = 5/3$ . 由于周期性, 解会在 1 个单位时间内恢复到初始状态. 表 1 给出了计算该算例到  $T = 5$  时刻的  $L^1, L^{\infty}$  误差以及对应的收敛阶. 可以发现, 本文构造的 ES-WENO 格式基本可以达到理论上的四阶精度.

表 1  $T = 5$  时不同网格数下  $B_1$  的  $L^1, L^{\infty}$  误差以及对应的收敛阶

Table 1  $L^1, L^{\infty}$  errors in  $B_1$  at  $T = 5$  and corresponding convergence rates for different mesh numbers

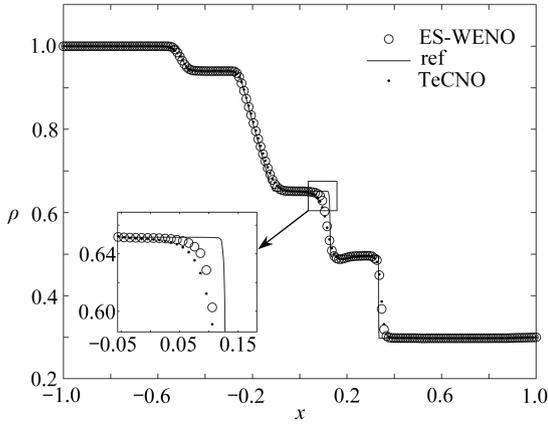
$N$	$L^1$ error	order	$L^{\infty}$ error	order
16	9.165E-4		1.477E-3	
32	2.838E-5	5.013	4.514E-5	5.032
64	2.100E-6	3.756	3.325E-6	3.763
128	1.320E-7	3.992	2.076E-7	4.001
256	8.337E-9	3.985	1.312E-8	3.984

### 3.2 Ryu-Jones Riemman 问题

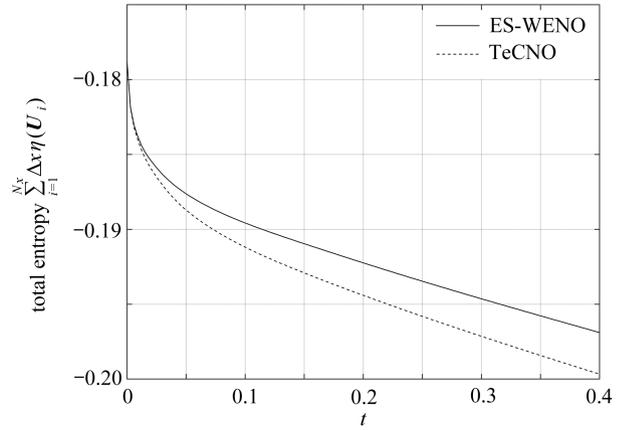
该一维算例用来测试 ES-WENO 格式低耗散的特性.计算区间为 $[-1, 1]$ .初始条件如下:

$$[\rho, \mathbf{u}^T, p, \mathbf{B}^T] = \begin{cases} [1, 0, 0, 0, 1, 0.7, 0, 0], & x \leq 0, \\ [0.3, 0, 0, 0, 1, 0.2, 0.7, 1, 0], & x > 0, \end{cases}$$

绝热指数  $\gamma = 5/3$ .选择 Neumann 边界条件.在 200 个网格下分别用 ES-WENO 和 TeCNO 格式计算该算例至  $T = 0.4$ , 如图 1(a) 所示,其中 ES-WENO 和 TeCNO 格式均选择耗散更大的 Lax-Friedrichs 型的耗散项用来抑制间断处出现的局部振荡.由图 1(b) 可知, ES-WENO 格式比 TeCNO 格式具有更小的耗散量,因此具有更高的分辨率.图 2 给出了 ES-WENO 格式对应的开关函数在初始时刻以及终止时刻在单元界面上的函数值,与 TeCNO 格式不同,ES-WENO 格式的耗散项只有在间断处及其邻近区域不为 0.



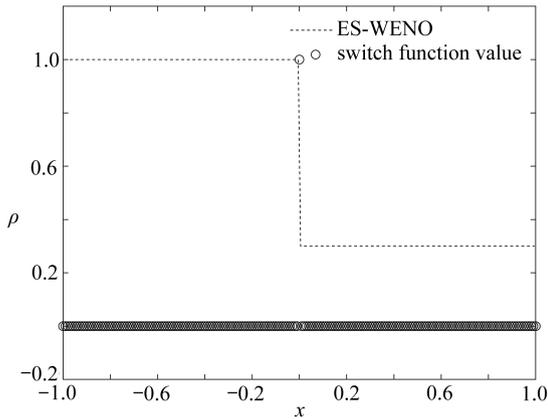
(a) 密度  
(a) Densities



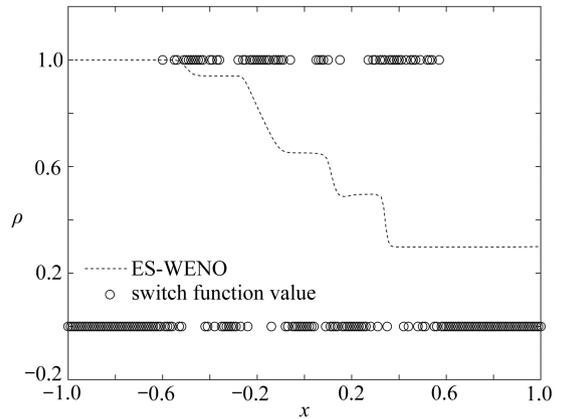
(b) 总熵随时间变化  
(b) The changes of the total entropy with time

图 1 Ryu-Jones Riemman 问题

Fig. 1 The Ryu-Jones Riemman problem



(a)  $T = 0$  时的开关函数值  
(a) Switch function values at  $T = 0$



(b)  $T = 0.4$  时的开关函数值  
(b) Switch function values at  $T = 0.4$

图 2 ES-WENO 格式在  $T = 0$  和  $T = 0.4$  对应的开关函数值

Fig. 2 The switch function values corresponding to the ES-WENO scheme at  $T = 0$  and  $T = 0.4$

### 3.3 Torrilhon Riemman 问题

该一维算例用来测试 ES-WENO 格式的高分辨率特性.计算区域为 $[-1, 1.5]$ .初始条件如下:

$$[\rho, \mathbf{u}^T, p, \mathbf{B}^T] = \begin{cases} [3, 0, 0, 0, 3, 1.5, 1, 0], & x \leq 0, \\ [1, 0, 0, 0, 1, 1.5, \cos(1.5), \sin(1.5)], & x > 0, \end{cases}$$

绝热指数  $\gamma = 5/3$ .选择 Neumann 边界条件.ES-WENO 格式选择 Lax-Friedrichs 型的耗散项.图 3 给出了在 400

个网格下,该算例在  $T = 0.4$  时刻的计算结果.从图中可以看到,接触间断只有在密度场中出现,其余场中依次出现的波形分别为快稀疏波、慢稀疏波、快激波和慢激波.熵稳定格式在间断处出现严重的抹平现象,并且在部分极值处丢失精度,新格式精确识别出了每一种波形,在极值处依然保持高精度并且没有产生伪振荡.

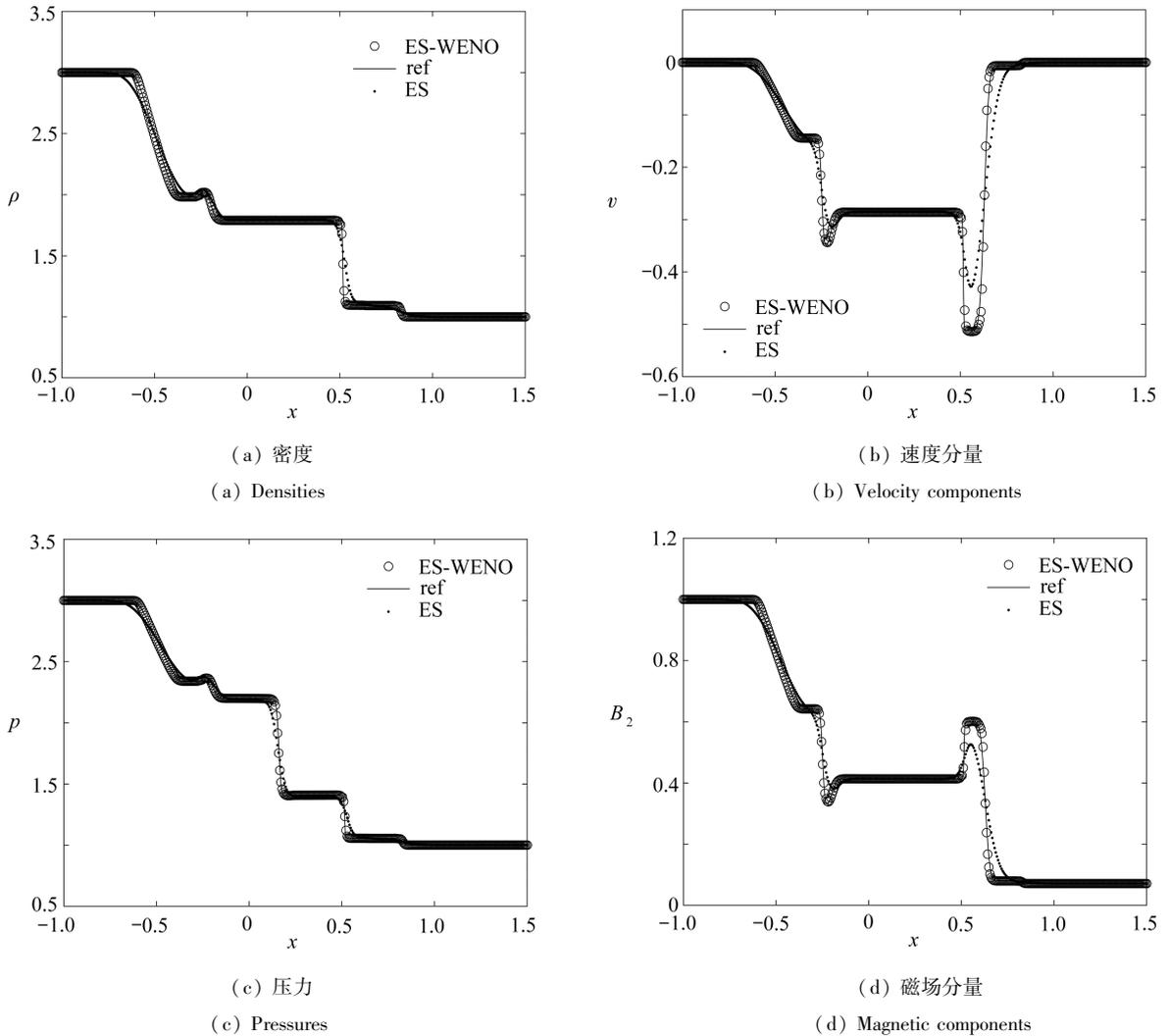


图 3 Torrillhon Riemman 问题

Fig. 3 The Torrillhon Riemman problem

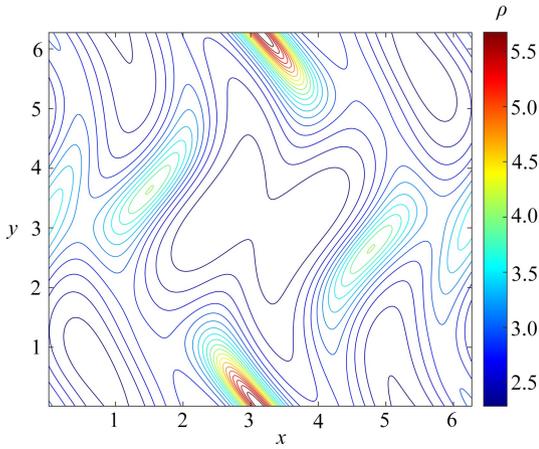
### 3.4 二维 Orszag-Tang 漩涡问题

该算例首先由 Orszag 和 Tang<sup>[20]</sup> 提出,并且用来验证 ES-WENO 格式的数值稳定性.光滑的初始条件由下式给出:

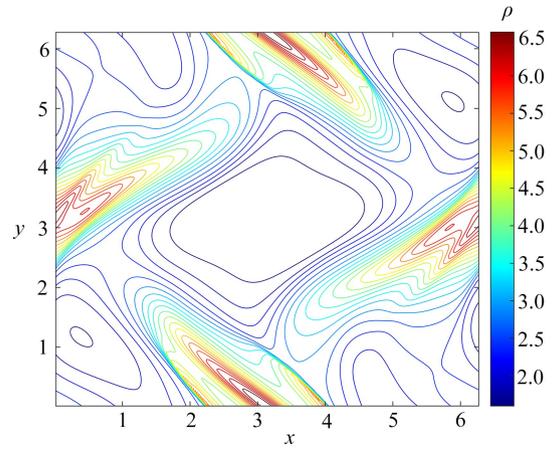
$$\rho = \frac{25}{36\pi}, \mathbf{u} = [-\sin(2\pi y), \sin(2\pi x), 0]^T, p = \frac{5}{12\pi},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}[-\sin(2\pi y), \sin(2\pi x), 0]^T,$$

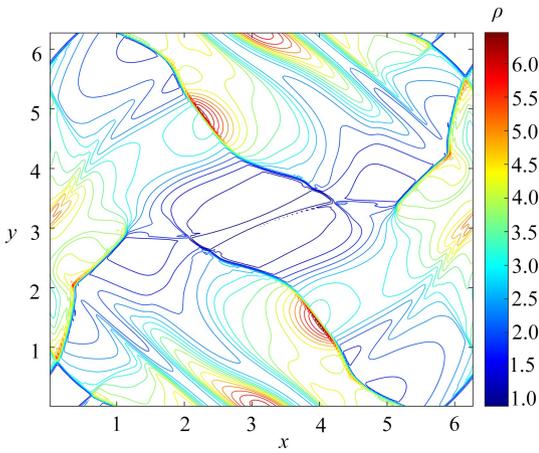
计算区域为  $[0, 2\pi]^2$ , 采用周期性边界条件,绝热指数  $\gamma = 5/3$ .图 4 给出了密度分别在  $T = 0.5, 1, 2, 3, 4$  时的等高线图.观察发现,随着时间推移,解在计算区域形成了几个激波和一个漩涡结构,许多细微的复杂特征都被新格式捕捉到并且没有产生伪振荡.由 2.2 小节可以得知,熵稳定格式的总熵由于熵耗散的原因从而不是恒定的,而是随着时间递减.图 5(a) 给出了总熵随时间变化曲线,可以发现总熵在开始的时间里是恒定的,这是因为间断尚未产生.在大约  $T = 1$  之后,间断开始产生,总熵也随之开始递减,因此完全离散的数值格式满足熵稳定的性质并且比 TeCNO 格式的耗散小.



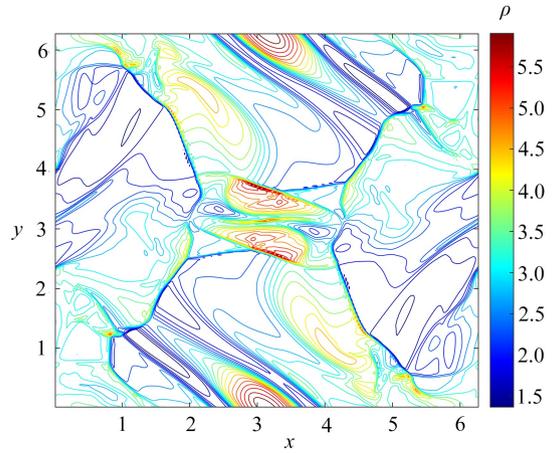
(a)  $T = 0.5$  时的密度  
(a) Densities at  $T = 0.5$



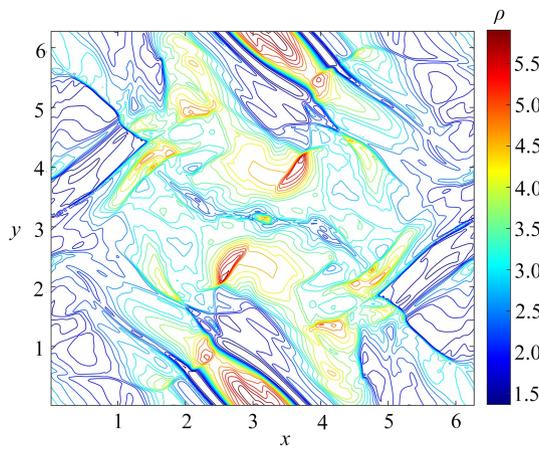
(b)  $T = 1$  时的密度  
(b) Densities at  $T = 1$



(c)  $T = 2$  时的密度  
(c) Densities at  $T = 2$



(d)  $T = 3$  时的密度  
(d) Densities at  $T = 3$

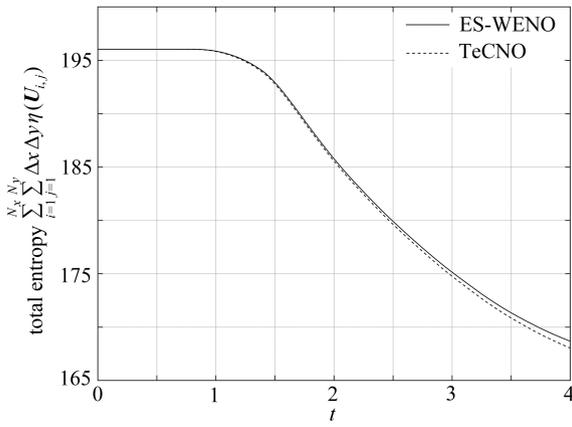


(e)  $T = 4$  时的密度  
(e) Densities at  $T = 4$

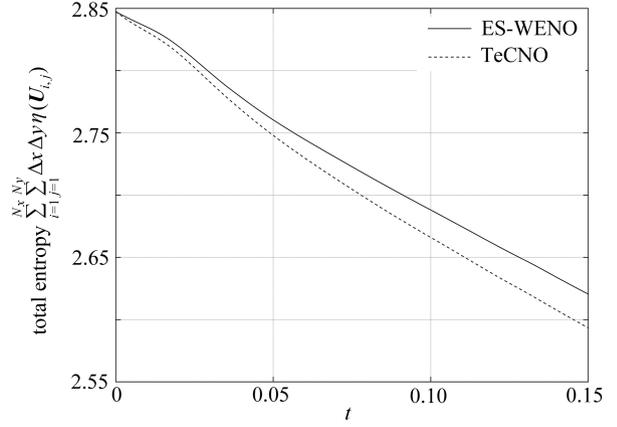
图4 二维 Orszag-Tang 漩涡问题

Fig. 4 The 2D Orszag-Tang vortex problem

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。



(a) 二维 Orszag-Tang 漩涡问题  
(a) The 2D Orszag-Tang vortex problem



(b) 第一转子问题  
(b) The 1st rotor problem

图 5 总熵随时间变化图

Fig. 5 The changes of the total entropy with time

### 3.5 第一转子问题

该算例由 Balsara 和 Spicer<sup>[21]</sup> 提出,用来检验 ES-WENO 格式扭转 Alfvén 波的传播.计算区域为 $[0, 1]^2$ ,采用周期性边界条件.初始条件由下文给出,首先定义

$$f = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0},$$

其中  $r_0 = 0.1, r_1 = 0.115, u_0 = 2, r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$ .

若  $r < r_0$ , 则

$$\rho = 10, u = -\frac{u_0}{r_0}(y - 0.5), v = \frac{u_0}{r_0}(x - 0.5);$$

若  $r_0 < r < r_1$ , 则

$$\rho = 1 + 9f, u = -\frac{fu_0}{r}(y - 0.5), v = \frac{fu_0}{r_0}(x - 0.5);$$

若  $r > r_1$ , 则

$$\rho = 1, u = 0, v = 0.$$

其余初始条件均取常数,

$$w = 0, p = 1, \mathbf{B} = \frac{5}{\sqrt{4\pi}}[1, 0, 0]^T,$$

绝热指数  $\gamma = 1.4$ .计算该算例到  $T = 0.15$  并在图 6 中给出了密度  $\rho$ , 压力  $p$ , Mach 数  $Ma = \|\mathbf{u}\|/2$  以及磁场压力  $\|\mathbf{B}\|^2/2$  的等高线图,其中  $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ .观察到得到的数值解具有高分辨率的特点,并且没有产生振荡.总熵随时间的变化曲线在图 5(b) 中给出,同理论分析一致,熵随时间的推进而递减,证明新格式满足熵稳定的性质并且比 TeCNO 格式的耗散小.

### 3.6 二维云-激波相互作用

该问题模拟了一个由强激波向静态的高密度云传播的过程,并在激波穿过云时产生了非常复杂的结构.该算例用来验证 ES-WENO 格式高分辨率的特性.计算区域为 $[0, 1]^2$ ,绝热指数  $\gamma = 5/3$ .首先考虑在  $x = 0.05$  处设置激波,考虑初始条件如下:

$$[\rho, \mathbf{u}^T, p, \mathbf{B}^T] = \begin{cases} [3.868\ 59, 11.253\ 6, 0, 0, 167.345, 0, 2.182\ 618\ 20, -2.182\ 618\ 20], & x < 0.05, \\ [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0.564\ 189\ 58, -0.564\ 189\ 58], & x \geq 0.05. \end{cases}$$

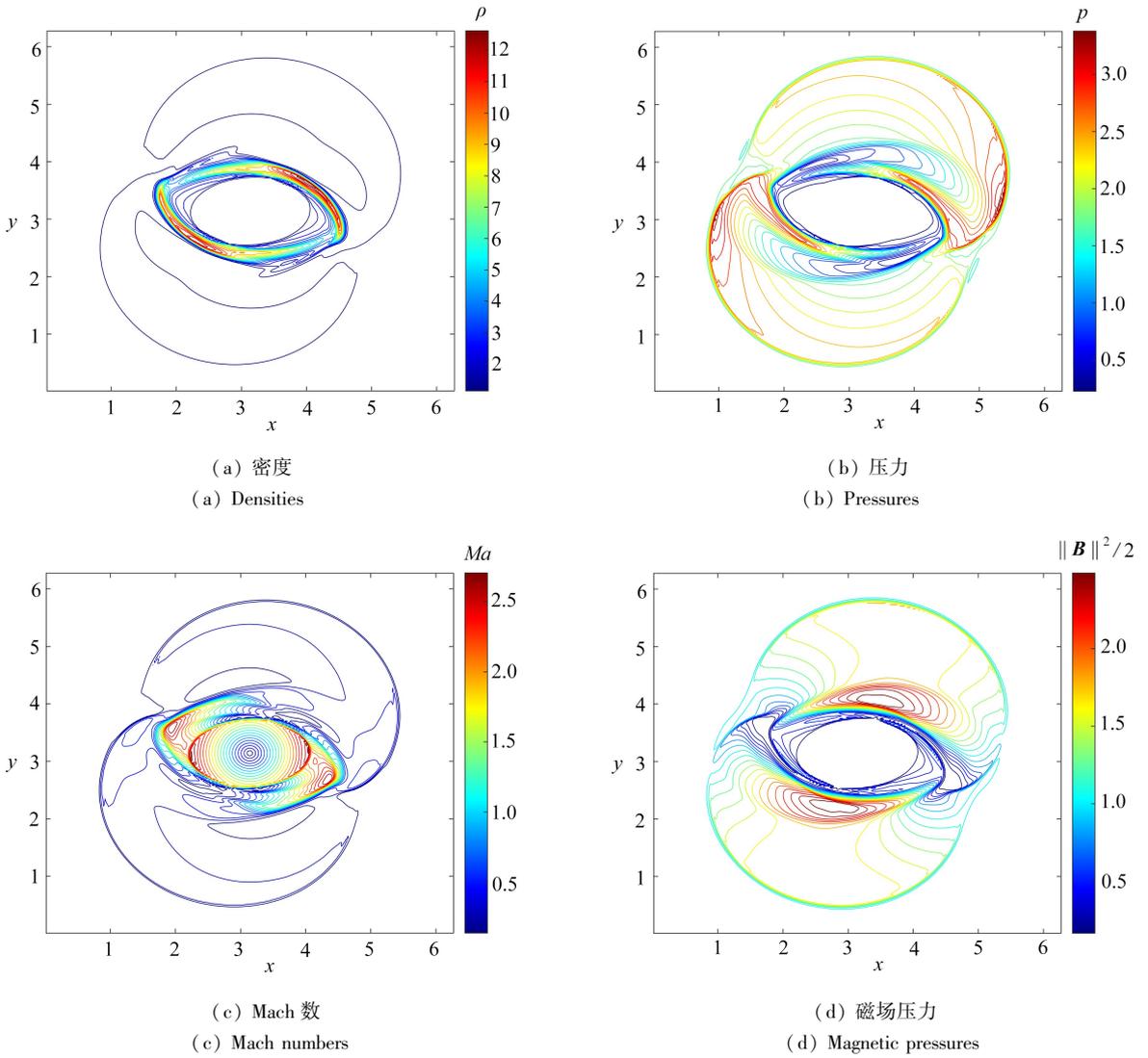


图6 第一转子问题

Fig. 6 The 1st rotor problem

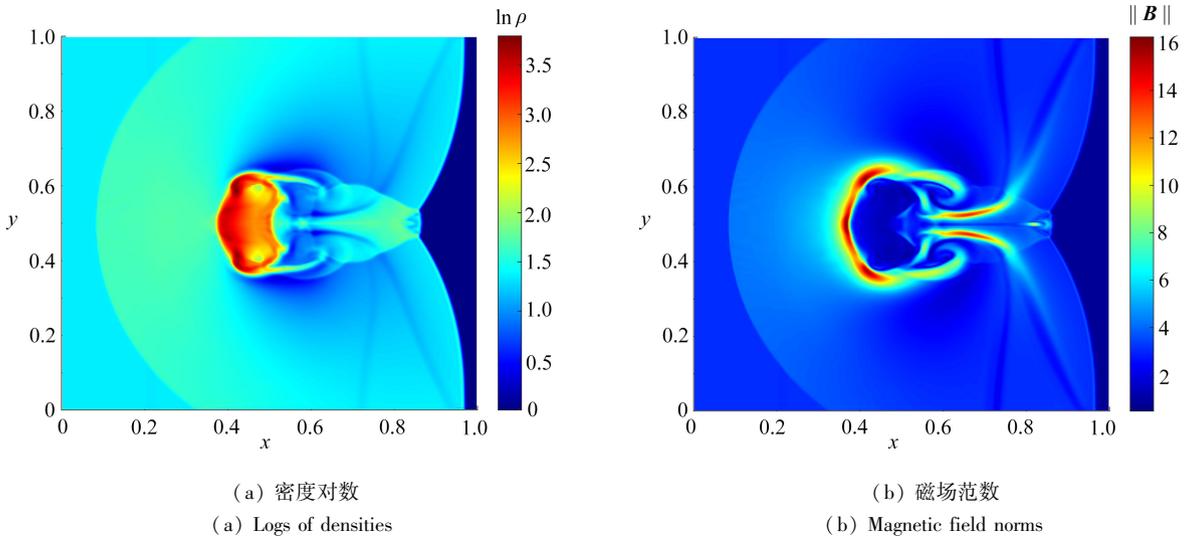


图7 云-激波相互作用

Fig. 7 Cloud-shock interactions

之后以  $(0.25, 0.5)$  为圆心, 半径为 0.15, 设置密度为 1 的静态云. 左边界采用流入边界条件, 其余边界均为流出边界条件. 图 7 给出了该算例在  $T = 0.06$  时的密度对数  $\ln \rho$  以及磁场范数  $\|\mathbf{B}\|$ . 从图中可以发现, 激波与密度云的相互作用在前方产生了弓形激波, 在后方产生了尾形激波, 并且在内部产生了类似于湍流的复杂结构.

## 4 结 论

针对理想 MHD 方程组, 在熵稳定格式的基础上, 通过对耗散项进行满足符合性质的高阶 WENO 重构, 并且使用任意偶数阶的熵守恒通量以及对 Godunov 源项进行类似的高阶离散, 得到了高阶熵稳定格式. 新格式不仅满足熵稳定性质, 并且有效抑制了熵稳定格式的抹平现象, 具有更低的耗散. 通过对一维、二维 MHD 方程标准算例进行测试, 该格式具有低耗散、高精度、无振荡并且可以有效捕捉间断等特点.

### 附录 A 理想 MHD 方程特征向量以及特征值的离散形式

方便起见, 定义如下符号:

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + \|\mathbf{b}\|^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \|\mathbf{b}\|^2)^2 - 4a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})^2},$$

$$\alpha_f^2 = \frac{a^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}, \quad \alpha_s^2 = \frac{c_f^2 - a^2}{c_f^2 - c_s^2},$$

其中  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho}}$ . 定义  $\mathbf{n}^\perp$  为由  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{n}$  张成并且与法向量  $\mathbf{n}$  正交的单位向量, 本文选择将  $\mathbf{n}^\perp$  表示为如下形式:

$$\mathbf{n}^\perp = \frac{(\mathbf{b} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{b})\mathbf{n}}{\|(\mathbf{b} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{b})\mathbf{n}\|}.$$

原始变量  $\mathbf{p}_r = [\rho \quad \mathbf{u}^T \quad p \quad \mathbf{B}^T]^T$  的特征向量以及对应特征值的紧致形式由下式给出. 为了得到守恒变量  $\mathbf{U} = [\rho \quad \rho\mathbf{u}^T \quad \rho e \quad \mathbf{B}^T]^T$  的特征向量矩阵, 需要对原始变量特征向量矩阵左乘 Jacobi 矩阵:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}_r} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{u} & \rho \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{O} \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 & \rho \mathbf{u}^T & \frac{1}{\gamma - 1} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{O} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

其中  $\mathbf{0}$  为  $3 \times 1$  的零向量,  $\mathbf{O}$  和  $\mathbf{I}$  分别为  $3 \times 3$  的零矩阵和单位矩阵.

熵波和散度波的特征值为  $\lambda_{1,2} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ , 特征向量为

$$\mathbf{r}_1 = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{an} \end{bmatrix};$$

Alfvén 波的特征值为  $\lambda_{\text{sa}} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \pm \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ , 特征向量为

$$\mathbf{r}_{\text{sa}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp \frac{\sqrt{p}}{\rho} (\mathbf{n}^\perp \times \mathbf{n}) \\ 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\rho}} (\mathbf{n}^\perp \times \mathbf{n}) \end{bmatrix};$$

快磁声波的特征值为  $\lambda_{\text{sf}} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \pm c_f$ , 特征向量为

$$\mathbf{r}_{\text{sf}} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} \begin{bmatrix} \alpha_f \sqrt{\rho} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{\rho} c_f} (\alpha_f a^2 \mathbf{n} + \alpha_s a ((\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}^\perp) \mathbf{n} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}) \mathbf{n}^\perp)) \\ \alpha_f \sqrt{\rho} a^2 \\ \alpha_s \mathbf{an}^\perp \end{bmatrix};$$

慢磁声波的特征值为  $\lambda_{\text{ms}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm c_s$ , 特征向量为

$$\mathbf{r}_{\text{ms}} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} \begin{bmatrix} \alpha_s \sqrt{\rho} \\ \pm \frac{\text{sgn}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})}{\sqrt{\rho} c_f} (\alpha_t a^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \alpha_t c_f^2 \mathbf{n}^\perp) \\ \alpha_s \sqrt{\rho} a^2 \\ -\alpha_t a \mathbf{n}^\perp \end{bmatrix},$$

其中特征向量矩阵和特征值变量取值均考虑为以下平均状态:

$$\rho = \tilde{\rho}_{x+1/2}, \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_{x+1/2}, p = \frac{\tilde{p}_{x+1/2}}{2\tilde{\beta}_{x+1/2}}, \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}_{x+1/2}.$$

## 附录 B ES-WENO 格式的熵稳定性证明

本节只考虑一维情况下 ES-WENO 格式的熵稳定证明, 二维情况可直接推广. 为了方便证明, 引入熵势  $\psi_{1,i} = \mathbf{V}_i^T \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) - q_1(\mathbf{U}_i) + \phi(\mathbf{V}_i) B_{1,i}$ ,  $\phi'(\mathbf{V}_i)$  与  $\mathbf{V}_i$  的关系式为  $\phi'(\mathbf{V}_i) \cdot \mathbf{V}_i = \phi(\mathbf{V}_i) = \phi_i$ , 以及符号  $\Delta(\cdot)_{x+1/2} = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i$ .

首先考虑数值格式

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \mathbf{F}_{x-1/2}^{\text{EC-4}}}{\Delta x} - \phi'^T(\mathbf{V}_i) \frac{B_{1,i+1/2}^4 - B_{1,i-1/2}^4}{\Delta x}$$

的熵守恒性质, 上式与  $\mathbf{V}_i$  做点积可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i \cdot \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} &= \frac{d\eta(\mathbf{U}_i)}{d\mathbf{U}_i} \cdot \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \frac{d\eta(\mathbf{U}_i)}{dt} = \mathbf{V}_i \cdot \left( -\frac{\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \mathbf{F}_{x-1/2}^{\text{EC-4}}}{\Delta x} - \phi'^T(\mathbf{V}_i) \frac{B_{1,i+1/2}^4 - B_{1,i-1/2}^4}{\Delta x} \right) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{V}_i^T (\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \mathbf{F}_{x-1/2}^{\text{EC-4}}) + \phi_i (B_{1,i+1/2}^4 - B_{1,i-1/2}^4)) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,r} \sum_{s=0}^{r-1} \left( \mathbf{V}_i^T \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-s}, \mathbf{U}_{i-s+r}) + \phi_i \frac{B_{1,i-s} + B_{1,i-s+r}}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,r} (H_{i,i+r} - H_{i-r,i}), \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_{2,1} = 4/3, \alpha_{2,2} = -1/6$ , 并且

$$\begin{aligned} H_{i,i+r} &= \mathbf{V}_i^T \mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) + \phi_i \frac{B_{1,i} + B_{1,i+r}}{2} = \\ &= \frac{\mathbf{V}_i^T + \mathbf{V}_{i+r}^T}{2} \mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) + \frac{\phi_i + \phi_{i+r}}{2} \frac{B_{1,i} + B_{1,i+r}}{2} - \\ &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{V}_{i+r}^T - \mathbf{V}_i^T) \mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) + (\phi_{i+r} - \phi_i) \frac{B_{1,i} + B_{1,i+r}}{2} \right). \end{aligned}$$

将 Chandrashekar 等<sup>[15]</sup>提出的 MHD 方程熵守恒通量满足的充分条件

$$(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)^T \mathbf{F}_{x+1/2} = \psi_{1,i+1} - \psi_{1,i} - (\phi_{i+1} - \phi_i) \bar{B}_{1,i+1/2}$$

代入上式, 化简可得  $H_{i,i+r} = \hat{q}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) + \psi_{1,i}$ , 其中

$$\hat{q}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) = \frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+r}}{2} \mathbf{F}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) + \frac{\phi_i + \phi_{i+r}}{2} \frac{B_{1,i} + B_{1,i+r}}{2} - \frac{\psi_{1,i} - \psi_{1,i+r}}{2},$$

同理可得  $H_{i,i+r} = \hat{q}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+r}) + \psi_{1,i}$ .

因此离散熵不等式

$$\frac{d\eta(\mathbf{U}_i)}{dt} = \frac{\hat{q}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \hat{q}_{x-1/2}^{\text{EC-4}}}{\Delta x}$$

成立, 其中  $\hat{q}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,r} \sum_{s=0}^1 \hat{q}^{\text{EC}}(\mathbf{U}_{i-s}, \mathbf{U}_{i-s+r})$ .

下面证明特征熵变量重构后的数值格式的熵稳定性, 此时数值格式为

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{x+1/2}^{\text{ES-WENO}} - \mathbf{F}_{x-1/2}^{\text{ES-WENO}}}{\Delta x} - \phi^T(\mathbf{V}_i) \frac{B_{1,i+1/2}^4 - B_{1,i-1/2}^4}{\Delta x}.$$

上式与  $\mathbf{V}_i$  做点乘可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i \cdot \frac{dU_i}{dt} &= \frac{d\eta(\mathbf{U}_i)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{q}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \hat{q}_{x-1/2}^{\text{EC-4}} - \frac{1}{2} \mathbf{V}_i^T (\mathbf{R}_{x+1/2} |\mathbf{A}_{x+1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2} - \mathbf{R}_{x-1/2} |\mathbf{A}_{x-1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x-1/2}) \right) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{q}_{x+1/2}^{\text{ES-4}} - \hat{q}_{x-1/2}^{\text{ES-4}} + \frac{1}{4} (\Delta \mathbf{v}_{x+1/2}^T \mathbf{R}_{x+1/2} |\mathbf{A}_{x+1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2} + \Delta \mathbf{v}_{x-1/2}^T \mathbf{R}_{x-1/2} |\mathbf{A}_{x-1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x-1/2}) \right) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{q}_{x+1/2}^{\text{ES-4}} - \hat{q}_{x-1/2}^{\text{ES-4}} + \frac{1}{4} (\Delta \mathbf{v}_{x+1/2}^T |\mathbf{A}_{x+1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2} + \Delta \mathbf{v}_{x-1/2}^T |\mathbf{A}_{x-1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x-1/2}) \right), \end{aligned}$$

其中  $\Delta \mathbf{v}_{x+1/2}^T |\mathbf{A}_{x+1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2} = \sum_{k=1}^8 (v_{i+1,k} - v_{i,k}) |\lambda_{i+1/2,k} S_k (v_{i+1/2,k}^+ - v_{i+1/2,k}^-) \geq 0$ , 因此离散熵不等式

$$\frac{d\eta(\mathbf{U}_i)}{dt} \leq -\frac{1}{\Delta x} (\hat{q}_{x+1/2}^{\text{ES-4}} - \hat{q}_{x-1/2}^{\text{ES-4}})$$

成立, 因此格式满足熵稳定性质, 其中  $\hat{q}_{x+1/2}^{\text{ES-4}} = \hat{q}_{x+1/2}^{\text{EC-4}} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{V}}_{x+1/2}^T \mathbf{R}_{x+1/2} |\mathbf{A}_{x+1/2} \langle \mathbf{v} \rangle_{x+1/2}$  为对应的数值熵通量函数.

## 参考文献 (References):

- [1] GODUNOV S K. Symmetric form of the magnetohydrodynamic equation[J]. *Chislennyye Metody Mekh Sploshnoi Sredy*, 1972, **3**(1): 26-34.
- [2] TADMOR E. Numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws: I [J]. *Mathematics of Computation*, 1987, **49**(179): 91-103.
- [3] TADMOR E. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes[J]. *Mathematic of Computation*, 1984, **43**(168): 369-381.
- [4] ROE P L. Entropy conservation schemes for Euler equations[R]. Lyon, France: Talk at HYP, 2006.
- [5] 郑素佩, 李霄, 赵青宇, 等. 求解二维浅水波方程的旋转混合格式[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(2): 176-186. (ZHENG Supei, LI Xiao, ZHAO Qingyu, et al. A rotated mixed scheme for solving 2D shallow water equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 176-186. (in Chinese))
- [6] 贾豆, 郑素佩. 求解二维 Euler 方程的旋转通量混合格式[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(2): 170-179. (JIA Dou, ZHENG Supei. A hybrid scheme of rotational flux for solving 2D Euler equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(2): 170-179. (in Chinese))
- [7] 郑素佩, 王令, 王苗苗. 求解二维浅水波方程的移动网格旋转通量法[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(1): 42-53. (ZHENG Supei, WANG Ling, WANG Miaomiao. Solution of 2D shallow water wave equations with the moving-grid rotating-invariance method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(1): 42-53. (in Chinese))
- [8] FJORDHOLM U S, MISHRA S, TADMOR E. Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially non-oscillatory schemes for systems of conservation laws[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012, **50**(2): 544-573.
- [9] BISWAS B, DUBEY R K. Low dissipative entropy stable schemes using third order WENO and TVD reconstructions[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2017, **44**(4): 1153-1181.
- [10] DUAN J, TANG H. High-order accurate entropy stable finite difference schemes for one- and two-dimensional special relativistic hydrodynamics[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **12**: 1-29.
- [11] DUAN J, TANG H. High-order accurate entropy stable finite difference schemes for the shallow water magnetohydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, **431**: 110136.
- [12] 郑素佩, 赵青宇, 封建湖. 基于 WENO 重构保号的四阶熵稳定格式[J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, **49**(3): 329-335. (ZHENG Supei, ZHAO Qingyu, FENG Jianhu. The fourth order entropy stable scheme based on sign-preserving WENO reconstruction[J]. *Journal of Zhejiang University (Science Edition)*, 2022, **49**(3): 329-

- 335.(in Chinese))
- [13] DUAN J, TANG H. Entropy stable adaptive moving mesh schemes for 2D and 3D special relativistic hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, **426**: 109949.
  - [14] WINTERS A R, GASSNER G J. Affordable, entropy conserving and entropy stable flux functions for the ideal MHD equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, **304**: 72-108.
  - [15] CHANDRASHEKAR P, KLINGENBERG C. Entropy stable finite volume scheme for ideal compressible MHD on 2-D Cartesian meshes[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2016, **54**(2): 1313-1340.
  - [16] 翟梦情, 李琦, 郑素佩. 求解一维理想磁流体方程的移动网格熵稳定格式[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(2): 229-236.(ZHAI Mengqing, LI Qi, ZHENG Supei. A moving-grid entropy stable scheme for the 1D ideal MHD equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(2): 229-236.(in Chinese))
  - [17] LIU Y, SHU C W, ZHANG M. Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods for ideal compressible MHD on structured meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **354**: 163-178.
  - [18] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Acta Numerica*, 2020, **29**: 701-762.
  - [19] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, **77**(2): 439-471.
  - [20] ORSZAG S A, TANG C M. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1979, **90**(1): 129-143.
  - [21] BALSARA D S, SPICER D S. A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, **149**(2): 270-292.