ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887　　http://www.applmathmech.cn

含空隙的各向同性介质 Helmholtz 方程扰动问题的传输特征值*

李诗璇，　刘立汉

（重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331）

摘要： 传输特征值在反散射唯一性理论中具有十分重要的意义.在含空隙的各向同性非均匀介质折射率扰动下，研究了 Helmholtz 方程传输特征值的存在性问题.首先，通过构造 Neumann-Dirichlet 算子，建立传输特征值问题的等价形式.然后，进一步构造特征值函数，将扰动的传输特征值问题转化为算子为零特征值的扰动问题.最后，利用隐函数定理的扰动方法证明传输特征值的存在性.

关 键 词： 扰动； 传输特征值； Neumann-Dirichlet 算子； Helmholtz 方程

中图分类号： O29　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.440221

Transmission Eigenvalues for Helmholtz Equation Perturbation Problems of Isotropic Media With Voids

LI Shixuan,　LIU Lihan

(*School of Mathematical Sciences*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 401331, *P.R.China*)

Abstract: Transmission eigenvalues are of major interests in the inverse scattering theory for uniqueness. For the Helmholtz equation of isotropic inhomogeneous media with voids, the existence of transmission eigenvalues was studied for the Helmholtz equation under the refractive index perturbation of the media. Firstly, through construction of the Neumann-Dirichlet operator, the equivalent form of the transmission eigenvalue problem was obtained. Then, the eigenvalue function was built to transform the perturbation problem for transmission eigenvalues into the perturbation problem for zero eigenvalues of operators. Finally, the perturbation method based on the implicit function theorem was used to prove the existence of transmission eigenvalues.

Key words: perturbation; transmission eigenvalue; Neumann-Dirichlet operator; Helmholtz equation

---

* **收稿日期：** 2023-07-18；**修订日期：** 2023-09-05

基金项目： 国家自然科学基金青年科学基金项目（12001075）；重庆市自然科学基金面上项目（cstc2020jcyj-msxmX0167）；重庆市教育委员会科学技术研究计划项目重点项目（KJZD-K202100503；KJZD-K202300506）；重庆市留学人员回国创业创新支持计划项目（cx2021061；cx2019022）；重庆市巴渝学者计划（BYQNCS2020002）；重庆市高校创新研究群体项目（CXQT20014）

作者简介： 李诗璇（1998—），女，硕士生（E-mail：1246427977@qq.com）；
刘立汉（1987—），男，教授，博士，硕士生导师（通讯作者. E-mail：mathsedu2013@163.com）.

引用格式： 李诗璇, 刘立汉. 含空隙的各向同性介质 Helmholtz 方程扰动问题的传输特征值[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(11): 1389-1397.

0 引 言

在声波和电磁波的反散射问题中,传输特征值的性质可以被用来估计散射体材料的性质.由于散射体材料的折射率不能通过远场数据唯一确定,因此利用传输特征值去估计散射体材料的性质就变得尤其重要[1].此外,传输特征值在反散射理论中对于证明解的唯一性和重构边界方面也有重要的理论意义[2].

目前关于传输特征值的研究主要集中在传输特征值的离散性[3-5]、实传输特征值的存在性[3]、传输特征值在复平面中的位置、求解传输特征值问题以及传输特征值在各种假设下的光谱性[6-8]等方面.目前,传统 Helmholtz 方程的数值计算如有限差分法、变分法、插值型边界无单元法[9]等,关于传输特征值的数值模拟如有限元法、边界元法、谱方法等.戴海等[10]采用变分法及 Chebyshev 谱元法求解传输特征值问题.计算传输特征值是在传输特征值存在的基础上进行的,一般情况下,关于传输特征值的存在性问题很难证明,除非对介质折射率做出限制性的假设.文献[11]通过研究算子的谱来证明各向同性的 Helmholtz 方程存在有限个传输特征值;文献[12-13]将其思想推广到了各向异性的 Helmholtz 方程和各向异性的 Maxwell 方程,证明它们也存在有限个传输特征值;文献[3,14-15]通过建立 Fredholm 性质研究了含空隙的各向同性非均匀介质的内部传输问题,证明了传输特征值的存在性并形成一个离散集,为传输特征值在无损检测中的应用提供了理论背景.对于球分层介质,文献[16-17]通过放宽折射率的条件证明了其存在复传输特征值,文献[18]通过构造 Dirichlet-Neumann 算子,将各向同性介质的 Helmholtz 方程的传输特征值问题转化为算子的零特征值问题,并研究了在介质折射率扰动下实传输特征值的存在性.但关于含空隙的各向同性非均匀介质的折射率在扰动下,其 Helmholtz 方程的传输特征值问题的存在性还未得到解决,本文针对该问题展开研究.

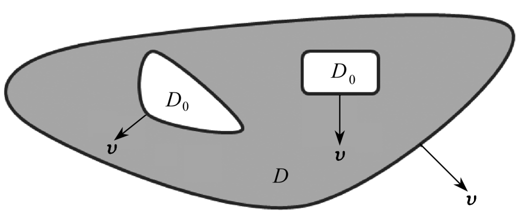

图 1 含有空隙介质的结构

Fig. 1 Configuration of the media with voids

为了更具体地描述问题,我们考虑频率为 ω 的单色辐射入射波 v 的散射,其满足 Helmholtz 方程:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \qquad \text{in } R^d (d = 2,3). \tag{1}$$

由有界域 $D\backslash\bar{D}_0$ 作为支集的非均匀散射,折射率 n 的实部是有界函数,使得 $n-1$ 的支集 $F_{\mathrm{spt}}(n-1) = D\backslash\bar{D}_0$,其中非均匀介质 $D \subset R^d$ 包含域 $D_0 \subset D$,D_0 为多连通,使得 $D\backslash\bar{D}_0$ 连通,D_0 中 $n(x)=1$.假设 ∂D,∂D_0 均为 C^2 光滑曲线,$\boldsymbol{v}$ 为 D 和 D_0 的单位外法向量(见图 1).

定义 $n \in L^\infty(D\backslash\bar{D}_0)$ 的上界和下界:$n^* = \sup_{D\backslash\bar{D}_0}\mathrm{Re}(n)$,$n_* = \inf_{D\backslash\bar{D}_0}\mathrm{Re}(n)$,$k$ 称为波数,与频率 ω 成正比.总场 u 分解为 $u = u^{\mathrm{s}} + v$,其中 u^{s} 为散射场,$u^{\mathrm{s}} \in H^2_{\mathrm{loc}}(R^d)$ 满足

$$\Delta u^{\mathrm{s}} + k^2 n u^{\mathrm{s}} = -k^2(n-1)v, \qquad \text{in } R^d (d = 2,3), \tag{2}$$

以及外部的 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\left(\frac{\partial u^{\mathrm{s}}}{\partial r} - \mathrm{i}k u^{\mathrm{s}}\right) = 0, \tag{3}$$

对 $\hat{x} := \dfrac{x}{|x|}$,$r = |x|$ 始终成立,其中 $H^2_{\mathrm{loc}}(R^d) := \{u \in H^2(R^d) \mid u \in H^2(V)$,对 $V \subset \bar{V} \subset R^d$,且 $\bar{V}$ 是紧的$\}$.

对于已知存在实传输特征值的折射率,本文通过对折射率进行扰动来获得"不规则"折射率,并利用基于隐函数定理的扰动方法来证明实传输特征值的存在.具体而言,针对含有空隙的各向同性非均匀介质 $(D\backslash\bar{D}_0, n)$,假设某一 L^∞ 的折射率 n 在某种意义下扰动到折射率 n_ε,那么对于足够小的 ε,可以证明在折射率 n 的实传输特征值附近,存在与 n_ε 对应的实传输特征值.本文研究的目标是传输特征值的存在性问题,现在面临着将传输特征值的扰动问题转化为紧自伴随算子的零特征值的扰动问题.这一问题是本文所要解决的关键问题.具体而言,在一般情况下,本文给出了未扰动问题的一个条件,该条件保证在扰动下存在近似传输特征值.这里的近似传输特征值指的是将同一问题的传输特征值投射到足够大维度的有限维子空间上.

本文的结构如下:首先,介绍含空隙的各向同性非均匀介质的传输特征值问题的不同等价公式,并将传

输特征值的扰动问题转化为算子零特征值的扰动问题.接下来，定义一个具有两个变量的函数，即波数 k 和扰动参数 ε .对于固定的 ε，函数的零点产生了一个扰动非均匀性的传输特征值.最后，将基于隐函数定理的扰动方法应用到含有空隙的各向同性非均匀介质上.

1　含空隙的各向同性非均匀介质的传输特征值问题

下面精确地用 v 和 $u := u^s + v$ 表示一般介质的传输特征值问题，设 $D \subset R^d (d = 2,3)$，为折射率 $n \in L^2(D)$ 的各向同性非均匀介质的支集，使得 $\mathrm{Re}(n) \geqslant \alpha > 0, \mathrm{Im}(n) \geqslant 0$.

定义 1[19]　对于一般的各向同性非均匀介质的齐次内部传输问题：

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n u = 0, & \text{in } D, \\ \Delta v + k^2 v = 0, & \text{in } D, \\ u = v, & \text{on } \partial D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}, & \text{on } \partial D, \end{cases} \tag{4}$$

存在非平凡解 $u \in L^2(D)$ 和 $v \in L^2(D)$，使得 $u - v \in H_0^2(D)$，称 $k \in C$ 的值为传输特征值.

很容易证明，如果 x 在 D 的某个邻域内，$\mathrm{Im}(n) > 0$，那么传输特征值不存在[11].另一方面，若 $x \in \bar{D}$，$n(x) > 1$ 或 $x \in \bar{D}, n(x) < 1$，则传输特征值存在并形成一个离散集[20-21].

本文的目的是考虑非均匀介质中含有空隙(即折射率与背景介质相同)的传输特征值问题.D 和 D_0 如引言所述，折射率 $n \in L^\infty(D)$ 使得在 D_0 内，$n = 1$，且在 $D\backslash\bar{D}_0$ 内几乎处处 $n \geqslant \alpha > 0$.

定义 2　对于含空隙的各向同性非均匀介质的齐次内部传输问题：

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n u = 0, & \text{in } D\backslash\bar{D}_0, \\ \Delta u + k^2 u = 0, & \text{in } D_0, \\ \Delta v + k^2 v = 0, & \text{in } D, \\ u = v, & \text{on } \partial D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}, & \text{on } \partial D, \\ u^+ = u^-, & \text{on } \partial D_0, \\ \dfrac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{v}}, & \text{on } \partial D_0, \end{cases} \tag{5}$$

存在非平凡解 $u \in L^2(D)$ 和 $v \in L^2(D)$ 使得 $u - v \in H_0^2(D\backslash\bar{D}_0)$，则称 k 为传输特征值.

本节引入该传输特征值问题的另一种等价公式，便于进一步分析.

定义 3　算子 $N_q^k : L^2(\partial D \cup \partial D_0) \to L^2(\partial D \cup \partial D_0)$ 为 Neumann-Dirichlet 算子，$N_q^k \varphi = U|_{\partial D \cup \partial D_0}$，对于 $U \in V(D_0) \cap H^2(D\backslash\bar{D}_0)$，$U$ 满足

$$\begin{cases} \Delta U + k^2 q U = 0, & \text{in } D\backslash\bar{D}_0, \\ \Delta U + k^2 U = 0, & \text{in } D_0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi, & \text{on } \partial D, \\ U^+ = U^-, & \text{on } \partial D_0, \\ \dfrac{\partial U^+}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial U^-}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi, & \text{on } \partial D_0, \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$V(D_0) := \{ u \in H^2(D) : \Delta u + k^2 u = 0, \text{ in } D_0 \} .$$

定理 1 算子 N_q^k 为自伴随算子和紧算子.

证明 对 $\varphi,\psi \in L^2(\partial D \cup \partial D_0)$,令 $N_q^k\varphi = U|_{\partial D\cup\partial D_0}$,$N_q^k\psi = V|_{\partial D\cup\partial D_0}$,那么利用 Green 第一公式得

$$
\begin{aligned}
&(N_q^k\varphi,\psi)_{L^2(\partial D\cup\partial D_0)} = \int_{\partial D\cup\partial D_0} N_q^k\varphi\cdot\psi\mathrm{d}s = \int_{\partial D\cup\partial D_0} U\cdot\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{v}}\mathrm{d}s = \\
&\quad \int_{D\setminus\bar{D}_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x + \int_{D\setminus\bar{D}_0} U\cdot\Delta V\mathrm{d}x + \int_{D_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x + \int_{D_0} U\cdot\Delta V\mathrm{d}x = \\
&\quad \int_{D\setminus\bar{D}_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x - \int_{D\setminus\bar{D}_0} k^2qV\cdot U\mathrm{d}x + \int_{D_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x - \int_{D_0} k^2V\cdot U\mathrm{d}x, \\
&(\varphi,N_q^k\psi)_{L^2(\partial D\cup\partial D_0)} = \int_{\partial D\cup\partial D_0}\varphi\cdot N_q^k\psi\mathrm{d}s = \int_{\partial D\cup\partial D_0}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot V\mathrm{d}s = \\
&\quad \int_{D\setminus\bar{D}_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x + \int_{D\setminus\bar{D}_0}\Delta U\cdot V\mathrm{d}x + \int_{D_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x + \int_{D_0}\Delta U\cdot V\mathrm{d}x = \\
&\quad \int_{D\setminus\bar{D}_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x - \int_{D\setminus\bar{D}_0} k^2qU\cdot V\mathrm{d}x + \int_{D_0}\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}x - \int_{D_0} k^2U\cdot V\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

所以 $(N_q^k\varphi,\psi)=(\varphi,N_q^k\psi)$, 因此得算子 N_q^k 为自伴随算子.

令 N_q^{k*} 为 N_q^k 的伴随算子,那么 $N_q^{k*}: H^{1/2}(\partial D\cup\partial D_0)\to H^{-1/2}(\partial D\cup\partial D_0)$, 由 Rellich 定理可得 N_q^{k*} 为紧算子,又由紧算子的伴随算子也为紧算子,因此 N_q^k 为紧算子.定理 1 得证.

定理 2 如果 $k>0$ 使得算子 $\mathscr{N}_0^k := N_n^k - N_1^k$ 的核存在非零 $\varphi\in L^2(\partial D\cup\partial D_0)$, 即 $\mathscr{N}_0^k\varphi := N_n^k\varphi - N_1^k\varphi = 0$, 那么 k 为传输特征值.相反,如果 $k>0$ 是一个传输特征值,且对应的特征函数 v 充分正则,那么 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}$ 在 $\mathscr{N}_0^k$ 的核中.

证明 对于 $k>0$, 若存在非零 $\varphi\in L^2(\partial D\cup\partial D_0)$, 由于 $N_n^k\varphi = U|_{\partial D\cup\partial D_0}$, 对于 $U\in V(D_0)\cap H^2(D\setminus\bar{D}_0)$,$U$ 满足 $\Delta U + k^2nU = 0$, 在 $D\setminus\bar{D}_0$ 内; $\Delta U + k^2U = 0$, 在 D_0 内; $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi$, 在 ∂D 上; $U^+ = U^-$,$\dfrac{\partial U^+}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial U^-}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi$, 在 ∂D_0 上.又由于 $N_1^k\varphi = V|_{\partial D\cup\partial D_0}$, 对于 $V\in V(D_0)\cap H^2(D\setminus\bar{D}_0)$,$V$ 满足 $\Delta V + k^2V = 0$, 在 $D\setminus\bar{D}_0$ 内; $\Delta V + k^2V = 0$, 在 D_0 内; $\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi$, 在 ∂D 上; $V^+ = V^-$,$\dfrac{\partial V^+}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial V^-}{\partial \boldsymbol{v}}$, 在 ∂D_0 上.若非零 φ 为算子 $\mathscr{N}_0^k$ 的核,即 $\mathscr{N}_0^k\varphi = N_n^k\varphi - N_1^k\varphi = 0$, 则 $(U-V)|_{\partial D} = 0$, 因此可得 k 为传输特征值.反之,若 $k>0$ 是一个传输特征值,那么在 $\partial D\cup\partial D_0$ 上令 $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi$, 易证 $\mathscr{N}_0^k\varphi = N_n^k\varphi - N_1^k\varphi = 0$, 因此存在非零 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}$ 在 $\mathscr{N}_0^k$ 的核中.定理 2 得证.

定义 4[2] 令 D 为复平面中区域 $D\subset C$, $f: D\to X$ 由 D 映射到复 Banach 空间 X.如果对每一个 $z\in D$, 极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ 在 X 中存在,则 f 称为强纯函数.如果对每一个有界线性泛函 $g\in X^*$, 有 $z\mapsto g(f(z))$ 是 z 的全纯函数,对 $z\in D$, 则 f 称为弱纯函数.

注 1 强纯函数显然是弱纯函数.

引理 1[2] 令 D 为复平面中区域 $D\subset C$, $f: D\to X$ 由 D 映射到复 Banach 空间 X 的弱纯函数,那么 f 为强纯函数.

引理 2[2] 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间,Banach 空间 $L(X,Y)$ 是 $X\to Y$ 的有界线性算子构成的空间.设 D 是 C 中的一个域,设 $A: D\to L(X,Y)$ 是一个算子值函数,使得对每一个 $\varphi\in X$, 函数 $A_\varphi: D\to Y$ 是弱纯的,那么 A 是强纯的.

定理 3 设在 D 中 $q>0$, 考虑一个区间 $(a,b)\subset\mathbf{R}$ 使得 $k\in(a,b)$,k^2 不是式(6)的一个 Neumann 特征值,其中 $\varphi = 0$.令 $\mathscr{C} := \{z\in C: \mathrm{Re}(z)\in(a,b)\}$, 那么 $N_q^k: \mathscr{C}\to\mathscr{L}(L^2(\partial D\cup\partial D_0))$ 关于 k 解析.

注 2 $\mathscr{L}(L^2(\partial D\cup\partial D_0))$ 表示 $L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 上有界线性算子形成的 Banach 空间.

证明　由 Riesz 表示定理定义

$$(BU,V)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}=\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U\cdot\nabla\bar{V}+qU\bar{V})\mathrm{d}x,\qquad \forall U,V\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0),$$

$$(KU,V)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}=\int_{D\backslash\bar{D}_0}qU\bar{V}\mathrm{d}x,\qquad \forall U,V\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0),$$

$$(\ell,V)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}=\int_{\partial D\cup\partial D_0}\varphi\bar{V}\mathrm{d}s,\qquad \forall \ell,V\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0).$$

$\forall \ell,\mathscr{M},M,V\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0),\lambda\in C$, 则

$$(\lambda\ell+\mathscr{M},V)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}=\int_{\partial D\cup\partial D_0}(\lambda\varphi+\psi)\bar{V}\mathrm{d}s=\int_{\partial D\cup\partial D_0}\lambda\varphi\bar{V}\mathrm{d}s+\int_{\partial D\cup\partial D_0}\psi\bar{V}\mathrm{d}s=\lambda(\ell,V)+(\mathscr{M},V),$$

$$\forall\varphi,\psi\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0);$$

$$(\ell,\lambda M+V)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}=\int_{\partial D\cup\partial D_0}\varphi\,\overline{(\lambda M+V)}\mathrm{d}s=\bar{\lambda}\int_{\partial D\cup\partial D_0}\varphi\bar{M}\mathrm{d}s+\int_{\partial D\cup\partial D_0}\varphi\bar{V}\mathrm{d}s=\bar{\lambda}(\ell,M)+(\ell,V),$$

$$\forall\varphi\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0).$$

因此,$(\cdot,\cdot)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}$ 为半双线性形式.

对于 $(\cdot,\cdot):H^1(D\backslash\bar{D}_0)\times H^1(D\backslash\bar{D}_0)\to C$, 由迹定理可得 $|(\ell,V)|_C\leqslant\alpha\|\ell\|_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}\cdot\|V\|_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}$, $\forall\ell,V\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0)$, 因此 $(\cdot,\cdot)_{H^1(D\backslash\bar{D}_0)}$ 连续.

若 U_φ 为式(6)的一个解,那么 $U_\varphi\in V(D_0)\cap H^2(D\backslash\bar{D}_0)$, 满足 $\Delta U_\varphi+k^2qU_\varphi=0$, 在 $D\backslash\bar{D}_0$ 内; $\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial\boldsymbol{v}}=\varphi$, 在 $\partial D\cup\partial D_0$ 上.根据 Green 第一积分定理:对 $\forall V\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0)$, 有

$$\begin{aligned}&((B-zK)U_\varphi,V)=(BU_\varphi,V)-z(KU_\varphi,V)=\\&\quad(BU_\varphi,V)-(k^2+1)(KU_\varphi,V)=\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U_\varphi\cdot\nabla\bar{V}+qU_\varphi\bar{V})\mathrm{d}x-(k^2+1)\int_{D\backslash\bar{D}_0}qU_\varphi\bar{V}\mathrm{d}x=\\&\quad\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U_\varphi\cdot\nabla\bar{V}+qU_\varphi\bar{V}-k^2qU_\varphi\bar{V}-qU_\varphi\bar{V})\mathrm{d}x=\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U_\varphi\cdot\nabla\bar{V}+\Delta U_\varphi\bar{V})\mathrm{d}x=\\&\quad\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\bar{V}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s+\int_{\partial D_0}\bar{V}\frac{\partial U_\varphi^+}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\bar{V}\varphi\mathrm{d}s+\int_{\partial D_0}\bar{V}\varphi\mathrm{d}s=\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\varphi\mathrm{d}s=(\ell,V).\end{aligned}$$

因此 U_φ 满足 $(B-zK)U_\varphi=\ell$,其中 $z:=k^2+1$.

若 $((B-zK)U_\varphi,V)=(\ell,V)$, $\forall U_\varphi,V,\ell\in H^1(D\backslash\bar{D}_0)\cap V(D_0)$, 利用 Green 积分第一定理得

$$\begin{aligned}&(BU_\varphi,V)-(k^2+1)(KU_\varphi,V)-(\ell,V)=\\&\quad\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U_\varphi\cdot\nabla\bar{V}+qU_\varphi\bar{V})\mathrm{d}x-(k^2+1)\int_{D\backslash\bar{D}_0}qU_\varphi\bar{V}\mathrm{d}x-\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\varphi\mathrm{d}s=\\&\quad\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U_\varphi\cdot\nabla\bar{V}+qU_\varphi\bar{V}-k^2qU_\varphi\bar{V}-qU_\varphi\bar{V})\mathrm{d}x-\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\varphi\mathrm{d}s=\\&\quad\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s-\int_{D\backslash\bar{D}_0}\Delta U_\varphi\bar{V}\mathrm{d}x-k^2\int_{D\backslash\bar{D}_0}qU_\varphi\bar{V}\mathrm{d}x-\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\varphi\mathrm{d}s=\\&\quad\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial\boldsymbol{v}}-\varphi\right)\mathrm{d}s-\int_{D\backslash\bar{D}_0}\bar{V}(\Delta U_\varphi+k^2qU_\varphi)\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

由 V 的任意性可得 $\Delta U_\varphi+k^2qU_\varphi=0$, 在 $D\backslash\bar{D}_0$ 内; $\partial U_\varphi/\partial\boldsymbol{v}=\varphi$, 在 $\partial D\cup\partial D_0$ 上.因此, U_φ 为式(6)的一个解.

考虑 $|(BU,U)|=\int_{D\backslash\bar{D}_0}(\nabla U\cdot\nabla\bar{U}+qU\bar{U})\mathrm{d}x=\int_{D\backslash\bar{D}_0}|\nabla U|^2\mathrm{d}x+q\int_{D\backslash\bar{D}_0}|U|^2\mathrm{d}x$:

当 $0<q<1$ 时,取 $m_1=\dfrac{1}{2}q$, 则 $\int_{D\backslash\bar{D}_0}|\nabla U|^2\mathrm{d}x+q\int_{D\backslash\bar{D}_0}|U|^2\mathrm{d}x\geqslant m\int_{D\backslash\bar{D}_0}(|\nabla U|^2+|U|^2)\mathrm{d}x$;

当 $q>1$ 时,取 $m_2=\dfrac{1}{2}$, 则 $\int_{D\backslash\bar{D}_0}|\nabla U|^2\mathrm{d}x+q\int_{D\backslash\bar{D}_0}|U|^2\mathrm{d}x\geqslant m\int_{D\backslash\bar{D}_0}(|\nabla U|^2+|U|^2)\mathrm{d}x$.

所以,对于 $q>0$, 存在 $m>0$, 使得 $\|BU\|_{H^1(D\setminus\bar{D}_0)}\geqslant m\|U\|_{H^1(D\setminus\bar{D}_0)}$, 因此 B 存在有界逆算子 B^{-1}.由 $H^1(D\setminus\bar{D}_0)$ 紧嵌入到 $L^2(D\setminus\bar{D}_0)$ 可得 K 为紧算子.

假设 $\dfrac{1}{z}$ 是紧算子 $B^{-1}K$ 在相应域内的特征值,则存在非零 U, 使得 $B^{-1}KU=\dfrac{1}{z}U$, 即 $zKU=BU$ 等价于对 $\forall V\in H^1(D\setminus\bar{D}_0)\cap V(D_0)$, 有

$$
\begin{aligned}
0=&((k^2+1)KU,V)-(BU,V)=\\
&(k^2+1)\int_{D\setminus\bar{D}_0}qU\bar{V}\mathrm{d}x-\int_{D\setminus\bar{D}_0}(\nabla U\cdot\nabla\bar{V}+qU\bar{V})\mathrm{d}x=\\
&\left(\int_{D\setminus\bar{D}_0}k^2qU\bar{V}\mathrm{d}x+\int_{D\setminus\bar{D}_0}qU\bar{V}\mathrm{d}x\right)-\left(\int_{D\setminus\bar{D}_0}\nabla U\cdot\nabla\bar{V}\mathrm{d}x+\int_{D\setminus\bar{D}_0}qU\bar{V}\mathrm{d}x\right)=\\
&\int_{D\setminus\bar{D}_0}k^2qU\bar{V}\mathrm{d}x-\left(\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s-\int_{D\setminus\bar{D}_0}\Delta U\cdot\bar{V}\mathrm{d}x\right)=\\
&\int_{D\setminus\bar{D}_0}(k^2qU+\Delta U)\bar{V}\mathrm{d}x-\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

当 $\dfrac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}}=\varphi=0$ 时,由 $\int_{D\setminus\bar{D}_0}(k^2qU+\Delta U)\bar{V}\mathrm{d}x-\int_{\partial D\cup\partial D_0}\bar{V}\dfrac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}}\mathrm{d}s=0$ 推不出 $U=0$, 与 k^2 不是 Neumann 特征值矛盾,因此 $\dfrac{1}{z}$ 不是紧算子 $B^{-1}K$ 的特征值,即 $B-zK\neq0$, 因此 $\lim_{h\to0}\dfrac{[B-(z+h)K]-[B-zK]}{h}=-K$ 存在,所以 $B-zK$ 关于 z 解析.同理,逆 $(B-zK)^{-1}$ 也是如此.又因为 $(B-zK)U_\varphi=\ell$ 可得 U_φ 关于 k 解析.

对每一个有界线性泛函 $g\in L^2(\partial D\cup\partial D_0)^*$, 令 $s:z\mapsto g(f(z))$, 则 $s(z)=g(f(z))$, $z\in\mathcal{C}$, 其中 $f:=N_q^k$, $k\in(a,b)$.因为 U_φ 关于 k 解析,所以

$$
\lim_{h\to0}\frac{U_\varphi(k+h)-U_\varphi(k)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{N_q(k+h)\varphi-N_q(k)\varphi}{h}=\lim_{h\to0}\frac{N_q(k+h)-N_q(k)}{h}\varphi
$$

存在,因为 N_q^k 为紧算子,由 Hahn-Banach 定理可得 $\lim_{h\to0}\dfrac{N_q(k+h)-N_q(k)}{h}$ 在 $L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 中存在,因此 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ 存在,则 $\lim_{h\to0}\dfrac{g(f(z+h))-g(f(z))}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{s(z+h)-s(z)}{h}$ 在 C 中存在,因此 $s(z)=g(f(z))$ 是 z 的全纯函数.由定义 4 得 $f:\mathcal{C}\to L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 为弱纯,由引理 2 得 N_q^k 是强纯的,即 $N_q^k:\mathcal{C}\to\mathcal{L}(L^2(\partial D\cup\partial D_0))$ 关于 k 解析.定理 3 得证.

由上可知,对于给定的含有空隙的非均匀介质 (D,n), 算子 $\mathcal{N}_0^k:L^2(\partial D\cup\partial D_0)\to L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 是紧的,自伴随的,且关于 k 解析.因此 $\mathcal{N}_0^k$ 有无穷序列的实(正和负)特征值 $\{\Lambda_j(0,k)\}_{j\in\mathbf{N}}$ 且以 0 为唯一的聚点.因此,有

$$
\mathcal{N}_0^k\varphi_j-\Lambda_j(0,k)\varphi_j=0. \tag{7}
$$

如果 $\Lambda_j(0,k)=0$ 是一个特征值,那么 k 为传输特征值.反之,如果 k 为传输特征值,其中 $\dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{v}}$ 在 $L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 中,那么 $\Lambda(0,k)=0$ $\left(\dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{v}}\right.$ 在 $\mathcal{N}_0^k$ 的核中,所以 $\mathcal{N}_0^k\dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{v}}=N_n^k\dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{v}}-N_1^k\dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{v}}=\mathbf{0}$, 此时存在非零向量 $\dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{v}}$ 作为算子 $\mathcal{N}_0^k$ 的零特征值的特征向量,所以 $\left.\Lambda(0,k)=0\right)$.因此传输特征值的存在性问题转化为求解算子 $\mathcal{N}_0^k$ 的零特征值问题.

2 扰动下传输特征值的存在性

根据隐函数定理的一个特定版本[21],利用扰动技术证明含有空隙的非均匀介质 D 的实传输特征值的存在性,前提是对于 D 和 n 的无扰动的传输特征值问题,实传输特征值要具有正则特征函数 v.

假设含有空隙的非均匀介质 (D,n) 对应的无扰动问题存在一个实传输特征值 k_0, 使得 $\Lambda(0,k_0)=0$.考虑一个参数为 $\varepsilon>0$ 的 n 的单参数扰动族 n_ε, 使得 n_ε 在某种意义下收敛到 n.对于 (D,n_ε), 通过定义两个 Neumann-Dirichlet 算子的差 $\mathscr{N}_\varepsilon^k:=N_{n_\varepsilon}^k-N_1^k$.令紧的、自伴随算子 $\mathscr{N}_\varepsilon^k$ 的特征值为 $\Lambda(\varepsilon,k)$.如果 $\Lambda(\varepsilon,k)=0$ 是 $\mathscr{N}_\varepsilon^k$ 的一个特征值,那么 k 就是扰动下含空隙的非均匀介质 (D,n_ε) 的传输特征值.

本节考虑扰动,使得 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 和 $k\in(k_0-\alpha,k_0+\alpha)$ 的算子族 $\mathscr{N}_\varepsilon^k$ 关于 ε 连续,关于 k 解析.即映射 $\varepsilon,k\in(-\delta,\delta)\times(k_0-\alpha,k_0+\alpha)\mapsto\mathscr{N}_\varepsilon^k\in\mathscr{L}(L^2(\partial D\cup\partial D_0))$ 关于 ε 连续,关于 k 解析.其中, $k_0>0$ 是无扰动问题的传输特征值,选取足够小的 $\alpha>0$, 使得在 $(k_0-\alpha,k_0+\alpha)$ 内没有无扰动问题的其他传输特征值(由于传输特征值的离散性).此外,可排除当 $q:=n$ 和 $q:=1$ 时,式(6)的齐次型 Neumann 特征值.需要注意的是,折射率为 n 的无扰动问题对应于 $\varepsilon=0$.因此,无扰动的传输特征值问题的主要假设是 (D,n) 使得传输特征值是离散的,并以 $+\infty$ 为唯一聚点.即如果 $n\in L^\infty(D)$, $n=1$ 在 D_0 内,满足 $1<n_*\leqslant n(x)\leqslant n^*<\infty$ 或 $0<n_*\leqslant n(x)\leqslant n^*<1$, x 在 $D\backslash\bar{D}_0$ 内,那么存在无穷多个传输特征值以 $+\infty$ 为唯一聚点[19].

本节将隐函数定理应用于 $\Lambda(\varepsilon,k)$, 以证明在足够小的扰动 $\varepsilon>0$ 下,存在一个传输特征值.换句话说,有一个 $k:=k(\varepsilon)$ 使得 $\Lambda(\varepsilon,k(\varepsilon))=0$.这里的目的是证明折射率 n 在扰动下含空隙非均匀介质 (D,n) 的实传输特征值的存在性.然而,在这个扰动问题中,必须考虑在 $\varepsilon=0$ 和 $k=k_0$ 邻域内的函数 $\Lambda(\varepsilon,k)$, 其中 $\Lambda(\varepsilon,k_0)=0$ 是自伴紧算子 $\mathscr{N}_0^{k_0}$ 的特征值的一个聚点.这使得在邻域 $(-\delta,\delta)\times(k_0-\alpha,k_0+\alpha)$ 中定义连续函数 $\Lambda(\varepsilon,k)$ 而选择 $\mathscr{N}_\varepsilon^k$ 特定的特征值变得复杂.

本节的目的是研究传输特征值的扰动问题,即在满足一定条件的情况下,证明在扰动下存在近似的传输特征值.这里注意,近似传输特征值是同一问题的传输特征值投影到足够高维度的有限维子空间上.现在精细表述上述问题:

对所有 k,ε 算子 $\mathscr{N}_\varepsilon^k$ 将 Hilbert 空间 $L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 映射到自身,令 $X=L^2(\partial D\cup\partial D_0)$, 所以算子 $\mathscr{N}_\varepsilon^k:X\to X$.如果 k_0 为无扰动问题的传输特征值,那么 0 是 $\mathscr{N}_0^{k_0}$ 的特征值,特征向量为 Neumann 值 $\boldsymbol{\varphi}$.

对 $j\in\mathbf{N}$, 令 X_j 为 X 的子空间,对所有 $j\in\mathbf{N}$, $X_j\subseteq X_{j+1}$ 且 $X=\cup_{j\in N}X_j$, 假设子空间 X_j 是使得存在 $J\in\mathbf{N}$, 对所有 $j>J$, 有 $\boldsymbol{\varphi}\in X_j$.设 X_j 上的内积是由 X 上的内积诱导的,令 P_j 为 X_j 上的投影.定义 $\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k=P_j\mathscr{N}_\varepsilon^k|_{X_j}$, 注意 $\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k:X_j\to X_j$.为了便于标记,简单的记成 $\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k=P_j\mathscr{N}_\varepsilon^k$, 其定义域限制在 X_j 上.那么,对于 $j>J$, 考虑 $\boldsymbol{\varphi}\in X_j$, $\mathscr{N}_{0,j}^{k_0}\boldsymbol{\varphi}=P_j\mathscr{N}_0^{k_0}|_{X_j}\boldsymbol{\varphi}=P_j\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 因此,0 是 $\mathscr{N}_{0,j}^{k_0}$ 的特征值,特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}$.进一步有以下定理.

定理 4　0 是算子 $(\mathscr{N}_{0,j}^{k_0})^*$ 的特征值,特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}$.

证明　由于 Hilbert 空间上的投影算子是自伴的,可得 P_j 为自伴算子,由定理 1 可得 $\mathscr{N}_0^{k_0}$ 也为自伴算子,由于 $\mathscr{N}_{0,j}^{k_0}=P_j\mathscr{N}_0^{k_0}|_{X_j}$, 所以 $(\mathscr{N}_{0,j}^{k_0})^*=(P_j\mathscr{N}_0^{k_0})^*$, $\boldsymbol{\varphi}\in X_j$, 易证 $P_j\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}$.

对任意 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in X_j$, 有

$$\begin{aligned}\langle(\mathscr{N}_{0,j}^{k_0})^*\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\rangle&=\langle(P_j\mathscr{N}_0^{k_0})^*\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\rangle=\langle\boldsymbol{\varphi},P_j\mathscr{N}_0^{k_0}\boldsymbol{\psi}\rangle=\\&\langle P_j{}^*\boldsymbol{\varphi},\mathscr{N}_0^{k_0}\boldsymbol{\psi}\rangle=\langle(\mathscr{N}_0^{k_0})^*P_j{}^*\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\rangle=\langle\mathscr{N}_0^{k_0}P_j\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\psi}$ 的任意性,得 $(\mathscr{N}_{0,j}^{k_0})^*=\mathscr{N}_0^{k_0}P_j$, 综上得 $(\mathscr{N}_{0,j}^{k_0})^*\boldsymbol{\varphi}=(P_j\mathscr{N}_0^{k_0})^*\boldsymbol{\varphi}=\mathscr{N}_0^{k_0}P_j\boldsymbol{\varphi}=\mathscr{N}_0^{k_0}\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}$, 因此 0 是 $(\mathscr{N}_{0,j}^{k_0})^*$ 的特征值,特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}$, 定理 4 得证.

因为 0 是有限维算子 $\mathscr{N}_{0,j}^{k_0}$ 的一个特征值,将算子 $\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k$ 的特征值记为 $\Lambda_j(\varepsilon,k)$, 其中 $\Lambda_j(0,k_0)=0$.然后利用隐函数定理求函数 $k_j(\varepsilon)$, 使得 ε 在 $\varepsilon=0$ 的区间内,有 $\Lambda_j(0,k_j(\varepsilon))=0$, 由定理 3,可知 $\mathscr{N}_0^k$ 在复平面 C 邻域中关于 k 解析,前提是 k^2 不是式(6)的特征值.注意后文 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\partial D\cup\partial D_0)}$ 表示 $L^2(\partial D\cup\partial D_0)$ 上的内积.

定理 5　假设 $\left\langle\left.\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{N}_\varepsilon^k}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle\neq0$ 对所有 $j>J$, 存在 $\varepsilon_{j,*}>0$, 使得对所有 $\varepsilon\in(-\varepsilon_{j,*},\varepsilon_{j,*})$, 存在 $k_j(\varepsilon)$ 使得 $\Lambda_j(\varepsilon,k_j(\varepsilon))=0$, 其中 $k_j(0)=k_0$, 使得 $\Lambda_j(0,k_j(0))=0$.

证明　由于在有限维中特征值是多项式的零点,又因为多项式的零点连续地依赖于系数,而系数又连续地依赖于参数,且由定理 3 可知,算子 $\mathscr{N}_\varepsilon^k$ 关于 k 是解析的,因此 $\Lambda_j(\varepsilon,k)$ 关于 ε,k 是连续的.由于 k_0 为无扰动问题的特征值,所以 $\Lambda_j(0,k_0)=0$, 因此满足隐函数定理的部分假设.

由于 $\mathscr{N}_0^k$ 关于 k 是解析的,那么在有限维的限制下 $\mathscr{N}_{0,j}^k$ 关于 k 是解析的,由 Rellich 经典结果[22-23],得到特征值关于 k 是可微的.易得

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_j}{\mathrm{d}k}(0,k_0)=\frac{\left\langle \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle}.$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}(P_j\mathscr{N}_\varepsilon^k)}{\mathrm{d}k}=P_j\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_\varepsilon^k}{\mathrm{d}k}$, 其中 P_j 为自伴随,且 $P_j\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}$, 因此上式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_j}{\mathrm{d}k}(0,k_0)=\frac{\left\langle \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_{\varepsilon,j}^k}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle}=\frac{\left\langle \left.\frac{\mathrm{d}(P_j\mathscr{N}_\varepsilon^k)}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle}=$$

$$\frac{\left\langle P_j\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_\varepsilon^k}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle}=\frac{\left\langle \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_\varepsilon^k}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},P_j\boldsymbol{\varphi}\right\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle}=\frac{\left\langle \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}_\varepsilon^k}{\mathrm{d}k}\right|_{(\varepsilon,k)=(0,k_0)}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle}\neq 0.$$

由定理 5 的假设可知,由隐函数定理[21],存在一条连续曲线 $k_j(\varepsilon)$, 使得 $\Lambda_j(\varepsilon,k_j(\varepsilon))=0$, 曲线满足 $k_j(0)=k_0$, 定理 5 得证.

3 总结与展望

本文构造了 Dirichlet-Neumann 算子,得到了含空隙的各向同性非均匀介质 Helmholtz 方程的传输特征值问题的等价形式;通过定义两个 Neumann-Dirichlet 算子的差,将传输特征值的扰动问题转化为紧自伴随算子的零特征值的扰动问题;最后利用隐函数定理的扰动方法证明了介质折射率扰动下传输特征值的存在性.今后的工作方向可以研究其他介质扰动下,如各向异性非均匀介质的扰动,Helmholtz 方程的传输特征值的存在性问题.

参考文献(References):

[1] CAKONI F, COLTON D, HADDAR H. On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data[J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2010, **348**(7/8): 379-383.

[2] COLTON D L, KRESS R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*[M]. Berlin: Springer, 1998.

[3] CAKONI F, GINTIDES D, HADDAR H. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, **42**(1): 237-255.

[4] SYLVESTER J. Discreteness of transmission eigenvalues via upper triangular compact operators[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2012, **44**(1): 341-354.

[5] COLTON D, PAIVARINTA L, SYLVESTER J. The interior transmission problem[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2007, **1**(1): 13-28.

[6] COLTON D, LEUNG Y J. Complex eigenvalues and the inverse spectral problem for transmission eigenvalues[J]. *Inverse Problems*, 2013, **29**(10): 104008.

[7] ROBBIANO L. Spectral analysis of the interior transmission eigenvalue problem[J]. *Inverse Problems*, 2013, **29**(10): 104001.

[8] NGUYEN H M, NGUYEN Q H. The Weyl law of transmission eigenvalues and the completeness of generalized transmission eigenfunctions[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2021, **281**(8): 109146.

[9] 陈林冲, 李小林. 二维 Helmholtz 方程的插值型边界无单元法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 470-484.(CHEN Linchong, LI Xiaolin. An interpolating boundary element-free method for 2D Helmholtz equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 470-484.(in Chinese))

[10] 戴海, 潘文峰. 谱元法求解 Helmholtz 方程透射特征值问题[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(7): 833-840.(DAI Hai, PAN Wenfeng. A spectral element method for transmission eigenvalue problems of the Helmholtz equa-

tion[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(7): 833-840.(in Chinese))

[11] PÄIVÄRINTA L, SYLVESTER J. Transmission eigenvalues[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2008, **40**(2): 738-753.

[12] CAKONI F, HADDAR H. On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium[J]. *Applicable Analysis*, 2009, **88**(4): 475-493.

[13] SYLVESTER J. Discreteness of transmission eigenvalues via upper triangular compact operators[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2012, **44**(1): 341-354.

[14] CAKONI F, COLTON D, HADDAR H. The interior transmission problem for regions with cavities[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, **42**(1): 145-162.

[15] COSSONNIÈRE A, HADDAR H. The electromagnetic interior transmission problem for regions with cavities[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2011, **43**(4): 1698-1715.

[16] COLTON D, LEUNG Y J, MENG S. Distribution of complex transmission eigenvalues for spherically stratified media[J]. *Inverse Problems*, 2015, **31**(3): 035006.

[17] COLTON D, LEUNG Y J. The existence of complex transmission eigenvalues for spherically stratified media [J]. *Applicable Analysis*, 2017, **96**(1): 39-47.

[18] AMBROSE D M, CAKONI F, MOSKOW S. A perturbation problem for transmission eigenvalues[J]. *Research in the Mathematical Sciences*, 2022, **9**(1): 1-16.

[19] CAKONI F, COLTON D, HADDAR H. *Inverse Scattering Theory and Transmission Eigenvalues*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016.

[20] RYNNE B P, SLEEMAN B D. The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1991, **22**(6): 1755-1762.

[21] HURWICZ L, RICHTER M K. Implicit functions and diffeomorphisms without C^1[J]. *Advances in Mathematical Economics*, 2003, **5**: 65-96.

[22] RELLICH F. *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems*[M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1969.

[23] KATO T. *Perturbation Theory for Linear Operators*[M]. Berlin: Springer, 2013.