

用交叉梁系比拟求解正交各向异性薄板弯曲问题*

袁 全, 袁 驹

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘要: 采用交叉梁系结构比拟求解正交各向异性薄板结构, 给出了两种结构在静力分析和自由振动分析中的相容性条件; 对于满足相容性条件且仅含有简支和固支组合边界的相容问题, 论证了其解答随着交叉梁系网格加密可收敛到正交各向异性板的理论解, 进一步建立了所有类型内力的计算公式, 并给出了采用 3D 结构力学求解器求解的算法实施和数值算例(包括矩形板和圆形板问题), 用以验证理论分析的正确性。

关键词: 交叉梁系; 正交各向异性薄板; 相容性条件; 3D 结构力学求解器; 数值计算
中图分类号: O342 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440232

Analogic Analysis of Orthotropic Plate Bending Problems With Gridwork Systems

YUAN Quan, YUAN Si

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P.R.China)

Abstract: Orthotropic plates were analogized to gridwork systems, and the compatibility and incompatibility between these 2 structure types in static and dynamic analyses were discussed. The results show that, the gridwork results converge to the theoretical solution of plates through the grid refinement for compatible problems with simply supported and/or clamped boundaries. All the formulas for calculation of various internal forces were derived, and the algorithms required in solving the gridwork systems were proposed by means of the 3D structural mechanics solver. A wide range of numerical examples, including rectangular and circular plates, were given to verify the validity of the proposed theory and algorithms.

Key words: gridwork; orthotropic thin plate; compatibility; 3D structural mechanics solver; numerical computation

0 引 言

交叉梁系和薄板结构是工程中常见的结构形式,前者为杆件结构,属于结构力学内容;后者为平板结构,属于弹性力学内容.两种结构形式不同,但其控制微分方程却有相似性,使得人们不断探索两者之间比拟求解的可能性.比拟求解有以下两种解法.

解法一是用薄板理论近似求解交叉梁系结构^[1].计算机方法出现之前,交叉梁系的求解并不比板的求解

* 收稿日期: 2023-07-29; 修订日期: 2023-11-29

基金项目: 国家自然科学基金(51878383;51378293)

作者简介: 袁全(1993—),男,博士(通讯作者. E-mail: quany@tsinghua.edu.cn).

引用格式: 袁全,袁驹.用交叉梁系比拟求解正交各向异性薄板弯曲问题[J].应用数学和力学,2024,45(5):518-528.

更容易、更方便^[2],因此大多比拟求解的研究都是用薄板的理论解近似地给出交叉梁系的解^[1].Timoshenko 等^[1]在其著名专著中,就介绍了将各向异性板理论应用于交叉梁系的求解方法.此法纯为简化近似方法.

解法二是用交叉梁系比拟求解薄板结构^[3,4].解法一隐含着解法二,但对解法二研究得并不多.实际上,将解法一^[1]中的各向异性板简化为各向同性板,便可明确地获得用交叉梁系比拟求解薄板弯曲问题所需要的刚度比拟关系.我国学者张玉敏等^[3]直接对各向同性板分析,得到了与文献[1]相同的刚度比拟关系,并给出了用交叉梁系计算简支矩形板的自振频率的算例,但没有给出静力计算的算例,也没有讨论和研究随着网格加密是否可以收敛于薄板理论解这一理论问题.

笔者^[4]对解法二做了进一步研究,提出了交叉梁系理论和各向同性薄板理论之间相容性的概念,对于满足相容性条件且仅含有简支和固支组合边界的相容问题,从理论上论证了其解答随着交叉梁系网格加密可收敛到薄板的理论解.采用 3D 结构力学求解器作为方便可靠的求解工具,文献[4]给出了多个具有代表性的数值算例(包括三角形板和圆形板),验证了理论分析的正确性及数值算法的有效性.至此,解法二就不仅仅是一般的简化近似方法,而是类似于有限元法、有限差分法一类的、可以无限逼近薄板理论解的数值逼近方法.

然而,若将解法二应用于各向异性板问题,由于弹性系数的增加和微分方程形式的改变,需要重新研究和确定相容的刚度对应关系;而文献[4]中只给出了弯矩的算法,扭矩和剪力的算法也有待建立.近年来对于各向异性薄板的数值方法研究并不少见^[5-11],但是更多是从应用出发.本文基于文献[4]中对各向同性板研究的成功,对用交叉梁系比拟正交各向异性薄板进行分析研究,给出了两种结构理论在静力分析和自由振动分析中的相容性条件;对于相容问题,论证了其解答随着交叉梁系网格加密可收敛到正交各向异性板的理论解.文中对所有类型的内力建立了计算公式,并给出了采用 3D 结构力学求解器求解的算法实施和数值算例(包括矩形板和圆形板问题),用以验证理论分析的正确性,同时也展示了 3D 求解器的出色性能.

1 问题简述

1.1 正交各向异性板

设正交各向异性板的材料性质有三个对称面,且与坐标面重合,则应力-应变关系(参照文献[1]的符号)可表示为

$$\begin{cases} \sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y, \\ \sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x, \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 σ_x 和 σ_y 为 x, y 方向正应力, ε_x 和 ε_y 为 x, y 方向正应变, τ_{xy} 为剪应力, γ_{xy} 为剪应变,共有 E'_x, E'', E'_y 和 G 四个弹性常数.进而,板的弯矩、扭矩和剪力可表示为

$$\begin{cases} M_x = - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y = - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} Q_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y = - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{cases} \quad (3)$$

其中 M_x 和 M_y 为弯矩, M_{xy} 为扭矩, Q_x 和 Q_y 为剪力, w 为挠度,

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}, D_y = \frac{E'_y h^3}{12}, D_1 = \frac{E'' h^3}{12}, D_{xy} = \frac{G h^3}{12}, H = 2D_{xy} + D_1, \quad (4)$$

h 为板的厚度.利用微元体平衡,可以导出用挠度表示的控制微分方程^[1]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (5)$$

其中 q 为分布荷载.为了简明起见,以下将“正交各向异性”简称为“各向异性”.

1.2 交叉梁系

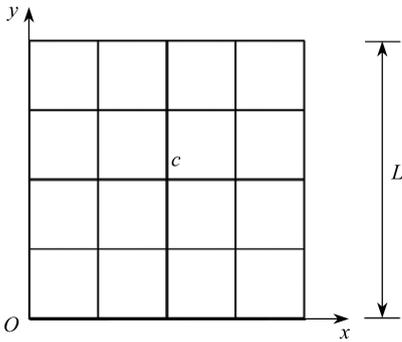


图1 交叉梁系结构
Fig. 1 The gridwork system

为了简明起见,本文以方板为例进行讨论.对于一般的矩形板,在不同方向使用各自的几何尺寸即可;而对于非规则形状的板,仍采用规则矩形网格,只要在边界上将梁截断即可^[4].考虑边长为 L 、厚度为 h 的方板,将其划分为 $N \times N$ 规则网格,其网格线构成 $(N+1) \times (N+1)$ 横竖十字交叉梁系(图1),每根梁宽 $b = L/N$, 高为 h .以下将水平方向(沿 x 方向)的梁称为横梁,竖直方向(沿 y 方向)的梁称为纵梁.记各个横梁截面的抗弯刚度为 EI_1 , 抗扭刚度为 GJ_1 , 各个纵梁截面的相应刚度记为 EI_2 和 GJ_2 .为区分起见,以下对梁的挠度和内力均冠以“~”,即分别记为 \tilde{w} , \tilde{M}_x , \tilde{M}_y 等.将交叉梁系看作连续化结构,则常微分可以用偏微分取代,由结点的平衡,可以得到交叉梁系结点处的控制微分方程^[1]:

$$\frac{EI_1}{b} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + \left(\frac{GJ_1}{b} + \frac{GJ_2}{b} \right) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{EI_2}{b} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} = q. \quad (6)$$

2 相容问题

2.1 微分方程的相容性

考察式(5)和式(6)两个不同结构的微分方程,可见形式相似,只是系数不一样.易见,若将式(6)中交叉梁系的刚度系数取为

$$\frac{EI_1}{b} = D_x, \quad \frac{EI_2}{b} = D_y, \quad \frac{GJ_1}{b} = \frac{GJ_2}{b} = H, \quad (7)$$

则式(5)和式(6)两个方程是相容的,亦即在交叉梁系网格无限加密的极限状态下,互为同解方程^[4].亦即随着交叉梁系网格加密其解收敛于薄板理论解.至此,式(7)即为微分方程的相容性条件.值得一提的是,相容性对于自由振动的特征值问题也适用,只需将以上两式中荷载项 q 分别替换为 $m\omega^2 w$ 和 $m\omega^2 \tilde{w}$ 即可,其中 m 和 ω 分别为板的均布质量和自然频率.本文算例部分将提供自由振动问题的算例.

2.2 边界条件的相容性

若要交叉梁系的解答 \tilde{w} 趋于薄板理论解 w , 除了微分方程相容之外,边界条件也须相容.本文的正交各向异性板与文献[4]的各向同性板在边界条件的相容性上并无不同,亦即:

- 1) 固支边界是完全相容的;
- 2) 简支边界是渐近相容的;
- 3) 自由边界是不相容的.

2.3 相容问题的收敛性

当板的边界由固支和简支边组合而成,则交叉梁系在控制微分方程和边界条件上都是相容的,将其称为相容问题;而含有自由边界的板与交叉梁系在边界条件是互不相容的,称为非相容问题.对于相容问题,随着交叉梁系网格的加密,梁的挠度 \tilde{w} 收敛于板的挠度 w , 即当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{w} \rightarrow w$, 且相应的各个内力也是收敛的;而对于非相容问题,交叉梁系的结果并不能收敛到板的理论解^[4].

需要强调的是,针对自由边界问题,本文给出了与 Kirchhoff 薄板理论不同的自由边界薄板解法,即不引入等效剪力假定的方法,故与 Kirchhoff 薄板理论解不相容,因此也不收敛于 Kirchhoff 薄板理论解.

3 算法实施

同文献[4],本文也采用 3D 结构力学求解器求解交叉梁系问题^[12-13].3D 求解器在算法上采用(静力和动力)精确杆件单元的矩阵位移法,可以对一般的空间杆件结构(包括交叉梁系结构)的静力问题和自由振动问题给出精确解答(其精确算法可参见文献[14]).本节将对使用 3D 求解器所需要的相关处理和算法做一讨论,特别是继文献[4]给出弯矩算法,本节给出所有类型内力的计算方法.

1) 截面刚度的选取

无论是静力分析还是频率振型计算,梁的截面刚度均按式(7)选取.

2) 均布荷载的处理

将均布荷载等效为各个梁上的线荷载 $\bar{q} = qb/2$.

3) 均布质量的处理

将均布质量等效为各个梁的线质量 $\bar{m} = mb/2$.

4) 转动惯量的处理

将线转动惯量取为 $\bar{J}_m = \bar{m}b^2/12$.

5) 边界梁的处理

为了保证相容性,对边梁不作特殊处理.

6) 非规则区域

交叉梁系法可以方便地求解非规则几何区域上的板问题,见文献[4]和本文例 2 圆形板的求解.

7) 弯矩的计算

以内部结点处弯矩为例,设水平方向左右两侧梁端的弯矩为 $\tilde{M}_{x-}, \tilde{M}_{x+}$, 竖直方向上下两侧梁端的弯矩为 $\tilde{M}_{y-}, \tilde{M}_{y+}$, 则结点处的弯矩应取两侧的平均值,并转换为单位长度的弯矩,即

$$\tilde{M}_x = \frac{\tilde{M}_{x-} + \tilde{M}_{x+}}{2b}, \tilde{M}_y = \frac{\tilde{M}_{y-} + \tilde{M}_{y+}}{2b}. \quad (8)$$

如果两个方向梁的宽度不同,则应采用各自的宽度,下同.由于交叉梁系计算出来的弯矩和挠度的关系为

$$\tilde{M}_x = -D_x \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}, \tilde{M}_y = -D_y \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2}, \quad (9)$$

与式(2)相对比,可得到换算为板的弯矩的公式:

$$M_x = \tilde{M}_x + \frac{D_1}{D_y} \tilde{M}_y, M_y = \tilde{M}_y + \frac{D_1}{D_x} \tilde{M}_x. \quad (10)$$

8) 扭矩的计算

以内部结点处扭矩为例,与弯矩的计算类似,结点处的扭矩应取两侧的平均值,并转换为单位长度的扭矩,即

$$\tilde{T}_x = \frac{\tilde{T}_{x-} + \tilde{T}_{x+}}{2b}, \tilde{T}_y = \frac{\tilde{T}_{y-} + \tilde{T}_{y+}}{2b}. \quad (11)$$

由于薄板理论只有一个扭矩 $M_{xy} (= M_{yx})$, 则结点处的扭矩应取两个方向扭矩的平均值,将其记作

$$\tilde{T}_{xy} = \frac{\tilde{T}_x + \tilde{T}_y}{2}. \quad (12)$$

由于交叉梁系计算出来的扭矩和挠度的关系为

$$\tilde{T}_{xy} = -H \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y}, \quad (13)$$

与式(2)相对比,可得到换算为板的扭矩的公式:

$$M_{xy} = -\frac{2D_{xy}}{H} \tilde{T}_{xy}. \quad (14)$$

9) 剪力的计算

注意式(3)的含 H 项中有混合导数的导数,而对于交叉梁系,其各杆没有外加扭矩荷载,各杆件扭矩均为常数,即式(13)中的混合导数 $\partial^2 \tilde{w}/(\partial x \partial y)$ 为常数,再取导后将消失,因此在交叉梁系中不考虑含 H 项。

以内部结点处剪力为例,与弯矩的计算类似,结点处的剪力应取两侧的平均值,并转换为单位长度的剪力,即

$$\tilde{Q}_x = \frac{\tilde{Q}_{x^-} + \tilde{Q}_{x^+}}{2b}, \quad \tilde{Q}_y = \frac{\tilde{Q}_{y^-} + \tilde{Q}_{y^+}}{2b}. \quad (15)$$

由于交叉梁系计算出来的剪力和挠度的关系为

$$\tilde{Q}_x = -D_x \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3}, \quad \tilde{Q}_y = -D_y \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial y^3}, \quad (16)$$

与式(3)相对比,可见式(15)即为换算为板的剪力公式

$$Q_x = \tilde{Q}_x, \quad Q_y = \tilde{Q}_y. \quad (17)$$

值得一提的是,剪力计算中虽然缺失了含 H 项,但数值算例显示仍能收敛到理论解。

为明晰,以上各类内力的计算公式汇总在表1中。

表1 内力计算公式汇总

Table1 Formulas for calculation of internal forces

	node average	formulas
bending moments	$\tilde{M}_x = \frac{\tilde{M}_{x^-} + \tilde{M}_{x^+}}{2b}, \quad \tilde{M}_y = \frac{\tilde{M}_{y^-} + \tilde{M}_{y^+}}{2b}$	$M_x = \tilde{M}_x + \frac{D_1}{D_y} \tilde{M}_y, \quad M_y = \tilde{M}_y + \frac{D_1}{D_x} \tilde{M}_x$
torques	$\tilde{T}_{xy} = \frac{\tilde{T}_{x^-} + \tilde{T}_{x^+} + \tilde{T}_{y^+} + \tilde{T}_{y^-}}{4b}$	$M_{xy} = -\frac{2D_{xy}}{H} \tilde{T}_{xy}$
shear forces	$\tilde{Q}_x = \frac{\tilde{Q}_{x^-} + \tilde{Q}_{x^+}}{2b}, \quad \tilde{Q}_y = \frac{\tilde{Q}_{y^-} + \tilde{Q}_{y^+}}{2b}$	$Q_x = \tilde{Q}_x, \quad Q_y = \tilde{Q}_y$

4 数值算例

所有算例均用3D结构力学求解器计算求解,本文方法可以求解一般的相容问题,并不受板的形状和荷载形式的限制,但为了验证本文的理论和算法,只选择了有理论解可比较的算例,包括均布荷载作用下的简支矩形板、固支圆板的弯曲问题,以及简支方板的自由振动问题,例1和例2的解析解均引自文献[1],例3的解析解引自文献[15],而频率计算的解析解可简单地自行算出,表格中的 N_x 和 N_y 分别表示 x 和 y 方向单元数。

例1 各向异性简支矩形板

文献[1]中对双向配筋的钢筋混凝土薄板的刚度建议采用 $H = \sqrt{D_x D_y}$,并对均布荷载作用下相应的简支矩形板给出了级数解,其板中心处的解可表示为

$$w_c = \alpha \frac{q \bar{b}^4}{D_y}, \quad (18a)$$

$$M_{xc} = \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{E''}{E'_x} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \frac{q \bar{a}^2}{\bar{\varepsilon}^2}, \quad (18b)$$

$$M_{yc} = \left(\beta_2 + \beta_1 \frac{E''}{E'_y} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right) q \bar{b}^2, \quad (18c)$$

其中 \bar{a}, \bar{b} 为板在 x, y 方向的边长, $\bar{\varepsilon}$ 为反映各向异性比值的参数,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (19)$$

文献[1]对于不同比值 $\bar{\varepsilon}$ 给出了系数 α, β_1, β_2 的结果,需要一提的是,文献[1]中对式(18b)中的 $\bar{\varepsilon}^2$ 误给为 $\bar{\varepsilon}$,

本文对此做了纠正.从解的结构可以看出,对于给定的比值 $\bar{\varepsilon}$, 可以有两种等效的工况用来计算系数.

工况 I: 材料各向同性,几何各向异性,即取

$$\bar{a}/\bar{b} = \bar{\varepsilon}, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1; \tag{20}$$

工况 II: 材料各向异性,几何各向同性,即取

$$\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = \bar{\varepsilon}. \tag{21}$$

本例将考虑两种比值: $\bar{\varepsilon}_1 = 1.2, \bar{\varepsilon}_2 = 2$.对于每个给定的比值,又分别采用两种工况计算解答系数,用以检验两种工况的解答是否收敛到相同的解.值得一提的是,求得交叉梁系的弯矩(式(8))后,应当用下式计算弯矩系数:

$$\beta_1 = \tilde{M}_x \bar{\varepsilon}^2, \beta_2 = \tilde{M}_y. \tag{22}$$

例 1(a) 各向异性比值 $\bar{\varepsilon} = 1.2$

为了检验收敛性,采用了一系列均匀加密网格,工况 I 和工况 II 的计算结果分别列于表 2 和表 3.可以看出,位移和弯矩系数均稳步地收敛于薄板解析解,表明本文方法对各向同性和各向异性板弯曲问题具有同等适用性.从误差量级来看,内力的精度并不比位移差,表 3 中 8×8 和 16×16 网格上弯矩解答的误差分别在 5% 和 3% 上下,可满足一般的工程设计需求.

例 1(b) 各向异性比值 $\bar{\varepsilon} = 2$

工况 I 和工况 II 的计算结果分别列于表 4 和表 5.可以看出,位移和弯矩系数均稳步地收敛于薄板解析解.由于 y 方向抗弯刚度大幅强于 x 方向抗弯刚度 ($D_y = 16D_x$), \tilde{M}_y 占主导成分, \tilde{M}_x 相对较弱,以致 β_1 在收敛于解析解时出现小幅局部扰动.

表 2 $\bar{\varepsilon} = 1.2$ 时,工况 I 的四边简支板的结果 ($\bar{a}/\bar{b} = 1.2, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1$)

Table 2 Results of simply supported square plates under uniform loads for case I with $\bar{\varepsilon} = 1.2$ ($\bar{a}/\bar{b} = 1.2, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1$)

$N_x \times N_y$	α	error $\delta / \%$	β_1	error $\delta / \%$	β_2	error $\delta / \%$
12×10	0.532 5	5.75	3.316	3.61	5.048	3.66
24×20	0.546 8	3.22	3.365	2.19	5.115	2.49
48×40	0.555 4	1.70	3.398	1.23	5.169	1.36
96×80	0.560 1	0.87	3.417	0.68	5.201	0.75
analytical solution ^[1]	0.565		3.44		5.24	

表 3 $\bar{\varepsilon} = 1.2$ 时,工况 II 的四边简支板的结果 ($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1.2$)

Table 3 Results of simply supported square plates under uniform loads for case II with $\bar{\varepsilon} = 1.2$ ($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1.2$)

$N \times N$	α	error $\delta / \%$	β_1	error $\delta / \%$	β_2	error $\delta / \%$
4×4	0.507 3	10.2	3.331	3.15	5.137	1.97
8×8	0.525 4	7.00	3.325	3.34	5.016	4.28
16×16	0.541 7	4.13	3.359	2.36	5.077	3.12
32×32	0.552 4	2.24	3.392	1.39	5.144	1.83
64×64	0.558 4	1.16	3.413	0.79	5.187	1.01
analytical solution ^[1]	0.565		3.44		5.24	

表 4 $\bar{\varepsilon} = 2$ 时,工况 I 的四边简支板的结果 ($\bar{a}/\bar{b} = 2, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1$)

Table 4 Results of simply supported square plates under uniform loads for case I with $\bar{\varepsilon} = 2$ ($\bar{a}/\bar{b} = 2, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1$)

$N_x \times N_y$	α	error $\delta / \%$	β_1	error $\delta / \%$	β_2	error $\delta / \%$
8×4	0.933 9	7.81	1.495	14.1	9.381	2.69
16×8	0.970 1	4.24	1.684	3.22	9.386	2.63
32×16	0.990 4	2.23	1.728	0.69	9.483	1.63
64×32	1.001 3	1.15	1.739	0.08	9.556	0.87
analytical solution ^[1]	1.013		1.74		9.64	

表5 $\bar{\varepsilon} = 2$ 时,工况 II 的四边简支板的结果 ($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 2$)Table 5 Results of simply supported square plates under uniform loads for case II with $\bar{\varepsilon} = 2$ ($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 2$)

$N \times N$	α	error $\delta/\%$	β_1	error $\delta/\%$	β_2	error $\delta/\%$
4×4	0.952 0	6.02	0.986	43.4	9.580	0.62
8×8	0.978 6	3.40	1.637	5.89	9.456	1.91
16×16	0.992 5	2.03	1.739	0.04	9.490	1.56
32×32	1.001 5	1.13	1.752	0.68	9.550	0.93
64×64	1.006 9	0.61	1.749	0.54	9.593	0.48
analytical solution ^[1]	1.013		1.74		9.64	

例2 各向异性固支圆形板

文献[1]对均布荷载作用下的椭圆形固支板,给出了封闭形式的解析解:

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{\bar{a}^2} - \frac{y^2}{\bar{b}^2} \right)^2, \quad (23)$$

其中 \bar{a} 和 \bar{b} 分别为椭圆的长半轴和短半轴,且

$$w_0 = \frac{q}{\frac{24D_x}{\bar{a}^4} + \frac{16H}{\bar{a}^2\bar{b}^2} + \frac{24D_y}{\bar{b}^4}}. \quad (24)$$

由此,可导出弯矩、扭矩和剪力的理论解,可用来检验扭矩和剪力的计算效果。

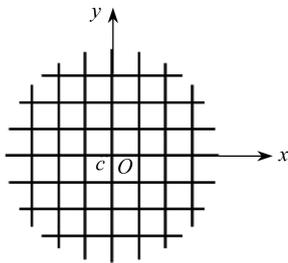


图2 圆形板的8×8网格

Fig. 2 The 8×8 grid of a circular plate

不失一般性,本例取圆形板 ($\bar{a} = \bar{b}$) 计算.图2所示为圆形板的8×8网格.本例为曲线边界的非规则区域,采用方形网格,横、竖梁的宽度相同,方便计算;由于是固定边界,无须在边界上生成边梁.本例考虑与例1相同的刚度 $H = \sqrt{D_x D_y}$.

仿照例1,分别考虑两种各向异性比值: $\bar{\varepsilon}_1 = 1.2$, $\bar{\varepsilon}_2 = 2$.对于每个给定的比值,计算板中心挠度和弯矩、内点和边界点的剪力和扭矩.计算内力时,不失一般性地设 $D_1 = 0$.各向异性比值为 $\bar{\varepsilon}_1 = 1.2$ 的计算结果分别列于表6—8;各向异性比值为 $\bar{\varepsilon} = 2$ 的计算结果分别列于表9—11.可以看出,所有情况都能稳定收敛

到板的解析解.从收敛速度上看,内点解大致为2阶收敛,而边界点大致只有1阶收敛;这一方面是由于边结点杆件少,未能从结点平均获得更高精度,另一方面是对曲线边界的近似也影响解答精度.本例表明了本文方法对非规则区域的灵活适用性和稳定有效性。

例3 各向异性简支方板

为了更广泛地检验,此例引自文献[15],解析解引自其中的表6.2.2.给定数据为 $\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = \sqrt{1/5}, \nu = 0.25, D_{xy} = 0.5D_y, D_1 = \nu D_y, H = (1 + \nu)D_y$, 承受均布荷载 q .板中心的挠度和弯矩的计算结果列于表12.同样,各个计算值都能快速稳定收敛到板的解析解。

例4 四边简支方板的频率和振型

文献[3]计算了一个各向同性四边简支矩形薄板的前10阶频率;文献[4]采用3D求解器计算了同一问题的前70阶频率,获得了更好的精度和收敛性.本文对例1中各向异性 ($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1.2$) 方板,用3D求解器计算其前70阶频率系数,频率值为频率系数乘以 $\sqrt{D_y/\bar{m}}/b^2$.

本例为相容问题,加密网格应该收敛到板的理论解.为了验证和展示收敛性,采用一系列均匀加密的网格计算了前70阶频率.表13给出了前10阶频率系数的收敛结果,图3给出了前70阶频率系数相对误差分布图,表14给出了前70阶频率系数各个网格下各自的最大误差(均等于第70阶频率系数的误差),可见收

敛很快,大致在 2 阶上下.图 4 给出了本文方法计算的第 5 阶和第 10 阶振型.

表 6 固支圆板中心挠度和弯矩的结果 ($\bar{\varepsilon} = 1.2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

Table 6 Results of central deflections and bending moments of clamped circular plates ($\bar{\varepsilon} = 1.2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

$N \times N$	w_c	error $\delta / \%$	M_{xc}	error $\delta / \%$	M_{yc}	error $\delta / \%$
4×4	2.267	5.84	4.207	1.82	9.337	8.98
8×8	2.170	1.31	4.145	0.32	8.766	2.31
16×16	2.149	0.31	4.134	0.04	8.618	0.58
32×32	2.144	0.07	4.132	0.01	8.580	0.14
64×64	2.142	0.00	4.132	0.00	8.571	0.03
analytical solution ^[1]	2.142		4.132		8.568	
multiplier	$q\bar{a}^4 / (100D_y)$		$q\bar{a}^2 / 100$		$q\bar{a}^2 / 100$	

表 7 固支圆板内点剪力和扭矩的结果 ($\bar{\varepsilon} = 1.2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

Table 7 Results of interior shear forces and torsional moments of clamped circular plates ($\bar{\varepsilon} = 1.2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

$N \times N$	$Q_x(\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$	$Q_y(\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$	$M_{xy}(\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$
4×4	18.462 3	0.64	32.775 4	3.54	2.714 7	8.75
8×8	18.036 7	1.68	31.943 9	0.92	2.962 6	0.42
16×16	18.287 5	0.31	31.662 9	0.03	2.976 1	0.04
32×32	18.329 2	0.09	31.647 6	0.02	2.975 4	0.01
64×64	18.340 8	0.02	31.652 0	0.01	2.975 2	0.00
analytical solution ^[1]	18.345	31.654	2.975			
multiplier	$q\bar{a} / 100$		$q\bar{a} / 100$		$q\bar{a}^2 / 100$	

表 8 固支圆板边界点剪力和扭矩的结果 ($\bar{\varepsilon} = 1.2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

Table 8 Results of boundary shear forces and torsional moments of clamped circular plates ($\bar{\varepsilon} = 1.2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

$N \times N$	$Q_x(\bar{a}, 0)$	error $\delta / \%$	$Q_y(0, \bar{a})$	error $\delta / \%$	$M_{xy}(\sqrt{3}\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$
4×4	37.703	2.76	59.821	5.51	4.136	19.73
8×8	36.950	0.70	61.331	3.12	4.817	6.53
16×16	36.620	0.20	62.141	1.84	4.816	6.54
32×32	36.528	0.45	62.653	1.04	5.000	2.96
64×64	36.553	0.37	62.953	0.54	5.091	1.15
analytical solution ^[1]	36.69		63.31		5.15	
multiplier	$q\bar{a} / 100$		$q\bar{a} / 100$		$q\bar{a}^2 / 100$	

表 9 固支圆板中心挠度和弯矩的结果 ($\bar{\varepsilon} = 2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

Table 9 Results of central deflections and bending moments of clamped circular plates ($\bar{\varepsilon} = 2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

$N \times N$	w_c	error $\delta / \%$	M_{xc}	error $\delta / \%$	M_{yc}	error $\delta / \%$
4×4	3.511	3.57	0.205 1	75.8	14.79	9.06
8×8	3.417	0.79	0.683 0	19.4	13.86	2.23
16×16	3.395	0.17	0.805 4	4.96	13.63	0.54
32×32	3.391	0.04	0.836 8	1.26	13.58	0.14
64×64	3.390	0.00	0.844 7	0.33	13.56	0.02
analytical solution ^[1]	3.390		0.847 5		13.56	
multiplier	$q\bar{a}^4 / (100D_y)$		$q\bar{a}^2 / 100$		$q\bar{a}^2 / 100$	

表 10 固支圆板内点剪力和扭矩的结果 ($\bar{\varepsilon} = 2, H = \sqrt{D_x D_y}$)Table 10 Results of interior shear forces and torsional moments of clamped circular plates ($\bar{\varepsilon} = 2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

$N \times N$	$Q_x(\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$	$Q_y(\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$	$M_{xy}(\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$
4×4	9.104 9	53.48	45.098	2.34	1.437 4	15.19
8×8	5.551 9	6.41	44.721	1.48	1.652 2	2.52
16×16	5.876 9	0.93	44.107	0.09	1.689 4	0.33
32×32	5.923 2	0.15	44.076	0.02	1.693 6	0.08
64×64	5.929 9	0.04	44.071	0.00	1.694 6	0.01
analytical solution ^[1]	5.932 2		44.068		1.694 9	
multiplier	$q\bar{a}/100$		$q\bar{a}/100$		$q\bar{a}^2/100$	

表 11 固支圆板边界点剪力和扭矩的结果 ($\bar{\varepsilon} = 2, H = \sqrt{D_x D_y}$)Table 11 Results of boundary shear forces and torsional moments of clamped circular plates ($\bar{\varepsilon} = 2, H = \sqrt{D_x D_y}$)

$N \times N$	$Q_x(\bar{a}, 0)$	error $\delta / \%$	$Q_y(0, \bar{a})$	error $\delta / \%$	$M_{xy}(\sqrt{3}\bar{a}/2, \bar{a}/2)$	error $\delta / \%$
4×4	18.482	55.77	79.800	9.46	2.370 8	19.24
8×8	14.532	22.49	87.166	1.10	2.793 0	4.86
16×16	12.924	8.93	85.884	2.56	2.772 4	5.56
32×32	12.253	3.28	86.990	1.30	2.866 1	2.37
64×64	11.971	0.90	87.556	0.66	2.911 3	0.83
analytical solution ^[1]	11.864		88.136		2.935 7	
multiplier	$q\bar{a}/100$		$q\bar{a}/100$		$q\bar{a}^2/100$	

表 12 均布荷载简支方板的结果(例 3, $\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = \sqrt{1/5}, \nu = 0.25, H = 1.25D_y$)

Table 12 Result of simply supported square plates under uniform loads

(example 3, $\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = \sqrt{1/5}, \nu = 0.25, H = 1.25D_y$)

$N \times N$	w_c	error $\delta / \%$	M_{xc}	error $\delta / \%$	M_{yc}	error $\delta / \%$
4×4	0.613	3.7	0.1276 8	2.61	0.3871 2	4.81
8×8	0.637	2.0	0.1293 0	1.38	0.4116 0	1.21
16×16	0.645	0.7	0.1301 8	0.70	0.4133 7	1.65
32×32	0.648	0.3	0.1306 3	0.36	0.4111 4	1.10
64×64	0.650	0.0	0.1308 6	0.18	0.4094 9	0.70
analytical solution ^[15]	0.65		0.131 1		0.406 7	
multiplier	$q\bar{a}^4/(1\ 200D_y)$		$q\bar{a}^2$		$q\bar{a}^2/100$	

表 13 四边简支方板前 10 阶频率系数的收敛比较 ($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1.2$)

Table 13 Convergence comparison of the 1st 10 frequency coefficients of a simply supported plate

($\bar{a}/\bar{b} = 1, \sqrt[4]{D_y/D_x} = 1.2$)

order k	8×8	error $\delta / \%$	16×16	error $\delta / \%$	32×32	error $\delta / \%$	64×64	error $\delta / \%$	exact solution
1	17.192	2.80	17.052	1.96	16.911	1.12	16.823	0.597	16.72
2	37.713	1.15	37.771	1.30	37.597	0.84	37.458	0.464	37.29
3	46.090	-0.52	46.575	0.52	46.547	0.46	46.463	0.281	46.33
4	66.522	-0.56	67.601	1.06	67.494	0.90	67.256	0.542	66.89
5	71.057	-0.70	71.870	0.44	71.858	0.42	71.742	0.262	71.55
6	92.493	-3.33	95.215	0.49	95.735	0.06	95.778	0.102	95.68
7	99.007	-2.13	101.749	0.58	101.938	0.77	101.673	0.504	101.16
8	112.074	-3.59	116.096	0.13	116.747	0.44	116.643	0.345	116.24
9	117.058	-2.07	119.392	0.12	119.737	0.17	119.703	0.143	119.53
10	143.185	-3.99	148.933	0.14	149.838	0.47	149.697	0.373	149.14

表 14 前 70 阶频率系数的最大误差 (=第 70 阶频率系数的误差)

Table 14 Max errors of the 1st 70 frequency coefficients (=the error of the 70th frequency coefficient)

mesh	8×8	16×16	32×32	64×64
max error of the first 70 frequency coefficients $\delta/\%$	24.8	8.0	1.9	0.42

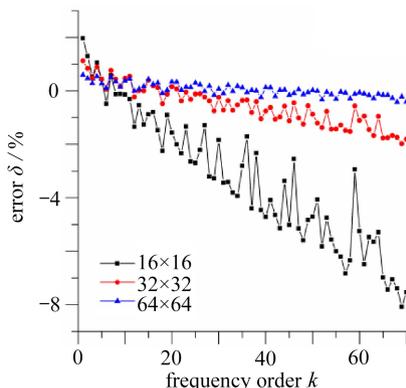
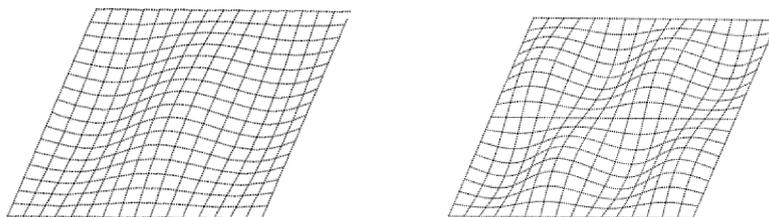


图 3 不同网格前 70 阶频率系数误差分布

Fig. 3 Error distributions of the 1st 70 frequency coefficients on different grids



(a) 第 5 阶振型

(b) 第 10 阶振型

(a) The 5th vibrational mode

(b) The 10th vibration mode

图 4 第 5 阶和第 10 阶振型 (16×16 网格)

Fig. 4 The 5th and 10th vibration modes (16×16 grid)

5 结 论

本文用交叉梁系比拟求解了正交各向异性薄板弯曲问题和自由振动问题,给出了相容性条件,明确了微分方程和边界条件同时满足相容性条件的问题为相容问题,论证了相容问题的解答随着交叉梁系网格加密可收敛到正交各向异性板的理论解,文中给出了所有类型内力的计算公式.本文方法采用降维思想,将二维问题降为一维问题,进而采用精确梁单元计算,将弹性力学问题转化为结构力学问题,结构力学的程序即可求解薄板问题,综合效率较高.

值得一提的是,虽然对薄板问题的分析可以采用有限元法,但由于薄板问题属于 C^1 连续问题,对于非规则区域往往需要采用特殊单元来保证其协调性,而且通常的位移元的内力精度是随着对挠度取导而层层递减的,譬如:三次元的弯矩只有二阶精度,而剪力却只有一阶精度.

文献[4]及本文研究的本质意义:并非要取代有限元法或其他数值方法,而在于发掘了一个用常微逼近偏微,用杆件结构逼近板结构,用结构力学求解弹性力学问题,且可以无限逼近板理论解的数值方法.文中给出了采用 3D 结构力学求解器求解的数值算例,包括矩形板、圆形板弯曲和自由振动问题,验证了理论分析的正确性,同时也展示了 3D 求解器的出色性能.

参考文献 (References):

[1] TIMOSHENKO S, WOINOWSKY-KRIEGER S. *Theory of Plates and Shells*[M]. 2nd ed. New Jersey: McGraw-Hill, 1987.

- [2] 古国纪. 交叉梁系的计算[J]. 土木工程学报, 1958, **5**(3): 165-178. (GU Guoji. The analysis of caisson-beam [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1958, **5**(3): 165-178. (in Chinese))
- [3] 张玉敏, 鲍鹏, 崔奕. 板与交叉梁系的相似性及其简化计算[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2002, **32**(1): 83-86. (ZHANG Yumin, BAO Peng, CUI Yi. The theoretical similarity between a plate and a grillage beam [J]. *Journal of Henan University (Natural Science)*, 2002, **32**(1): 83-86. (in Chinese))
- [4] 袁骊, 袁全. 交叉梁系比拟求解薄板弯曲问题的相容性及其计算[J]. 土木工程学报, 2023, **56**(3): 1-8. (YUAN Si, YUAN Quan. Compatibility in analogy of gridworks to thin plate bending and its numerical solution [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2023, **56**(3): 1-8. (in Chinese))
- [5] 王森林, 李进宝, 马红艳, 等. 基于辛叠加方法的正交各向异性矩形悬臂薄板受迫振动解析解[J/OL]. 应用数学和力学, 2023[2023-11-29]. <https://link.cnki.net/urlid/50.1060.o3.20231110.1245.002>. (WANG Senlin, LI Jinbao, MA Hongyan, et al. Analytical forced vibration solutions of orthotropic cantilever rectangular thin plates by the symplectic superposition method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023 [2023-11-29]. <https://link.cnki.net/urlid/50.1060.o3.20231110.1245.002>. (in Chinese))
- [6] 黄炎, 雷勇军, 申慧君. 各向异性矩形板自由振动的一般解析解法[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(4): 411-416. (HUANG Yan, LEI Yongjun, SHEN Huijun. Free vibration of anisotropic rectangular plates by general analytical method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(4): 411-416. (in Chinese))
- [7] 李晶晶, 程昌钧. 考虑高阶横向剪切正交各向异性板非线性弯曲的微分求积分析[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(8): 801-808. (LI Jingjing, CHENG Changjun. Differential quadrature method for bending of orthotropic plates with finite deformation and transverse shear effects [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(8): 801-808. (in Chinese))
- [8] 黄家寅. 变厚度正交各向异性矩形板非线性非对称弯曲问题的基本方程[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(7): 741-744. (HUANG Jiayin. Basic equations of the problem of the nonlinear unsymmetrical bending for orthotropic rectangular thin plate with variable thickness [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(7): 741-744. (in Chinese))
- [9] 黄家寅. 四边固定变厚度正交各向异性矩形板的非线性非对称弯曲问题的一致有效渐近解[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(7): 745-754. (HUANG Jiayin. Uniformly valid asymptotic solutions of the nonlinear unsymmetrical bending for orthotropic rectangular thin plate of four clamped edges with variable thickness [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(7): 745-754. (in Chinese))
- [10] 额布日力吐, 冯璐, 阿拉坦仓. 四边固支正交各向异性矩形薄板弯曲问题的辛叠加方法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 311-323. (EBURILITU, FENG Lu, ALATANCANG. Analytical bending solutions of clamped orthotropic rectangular thin plates with the symplectic superposition method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 311-323. (in Chinese))
- [11] 王新志, 赵永刚, 叶开沅, 等. 正交各向异性板的非对称大变形问题[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(9): 881-888. (WANG Xinzhi, ZHAO Yonggang, YEH Kaiyuan, et al. Unsymmetrical large deformation problem of orthotropic plates [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(9): 881-888. (in Chinese))
- [12] 袁骊. 结构力学 I: 基础教程(第4版)求解器[EB/OL]. V3.0. 北京: 高等教育出版社. (2018-07-13) [2023-07-29]. <https://abook.hep.com.cn/12202428>. (YUAN Si. Structural mechanical: fundamental course (4th ed) solver [EB/OL]. V3.0. Beijing: Higher Education Press. (2018-07-13) [2023-07-29]. (in Chinese))
- [13] 龙驭球, 包世华, 袁骊. 结构力学 I [M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2018. (LONG Yuqiu, BAO Shihua, YUAN Si. *Structure Mechanics I* [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2018. (in Chinese))
- [14] 袁骊. 程序结构力学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2008. (YUAN Si. *Programming Structural Mechanics* [M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese))
- [15] REDDY J N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* [M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2007.