

# 基于区间数学方法的结构参数识别\*

宋海洋<sup>1,2</sup>

- (1. 东北电力大学 建筑工程学院, 吉林 吉林 132012;  
2. 东北电力大学 吉林省电力基础设施安全评估与灾害防治重点实验室, 吉林 吉林 132012)

**摘要:** 统计能量分析方法是目前处理结构高频振动的有效方法之一,在航空、航天、船舶和机械等领域得到了广泛的应用.内损耗因子和耦合损耗因子是统计能量分析方法中非常重要的两个结构参数,这些参数可以利用试验测量得到的外部输入功率和结构模态能量通过理论方法识别出来.传统的统计能量分析参数识别方法没有考虑输入功率和模态能量的测量误差对识别结果的影响,识别结果精度较低,难以满足工程需要.该研究将区间数学方法应用于统计能量分析的参数识别,提出了一种可以考虑模态能量测量误差和输入功率测量误差的参数识别方法,揭示了模态能量和输入功率的测量误差对参数识别的影响规律,提高参数识别的准确性.该文的研究内容可以为后续的结构设计和安全性分析提供参考.

**关键词:** 区间数学; 参数识别; 统计能量分析; 结构振动

**中图分类号:** O347.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440319

## Structural Parameter Identification Based on the Interval Mathematics Method

SONG Haiyang<sup>1,2</sup>

- (1. *School of Civil Engineering and Architecture, Northeast Electric Power University, Jilin, Jilin 132012, P.R.China;*

2. *Key Lab of Electric Power Infrastructure Safety Assessment and Disaster Prevention of Jilin Province, Northeast Electric Power University, Jilin, Jilin 132012, P.R.China*)

**Abstract:** The statistical energy analysis (SEA) method was popularly employed to handle the high-frequency dynamics problems in many engineering fields such as aerospace and shipping. The damping loss factor and coupling loss factor were the major parameters in the SEA theory, and they can usually be identified with the measured external input power and structural modal energy. The measurement errors of the input power and modal energy were not considered in the traditional parameter identification, where the accuracy of the identified results was relatively low. The interval mathematics method was applied to the parameter identification in this study, and the measurement errors of the input power and modal energy were fully considered. The effects of the measurement errors on the parameter identification were revealed, and the accuracy of the identified results was improved. The work can be helpful for the structure design and safety analysis.

**Key words:** interval mathematics; parameter identification; statistical energy analysis; structural vibration

\* 收稿日期: 2023-10-22; 修订日期: 2024-01-29

基金项目: 吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH20230143KJ)

作者简介: 宋海洋(1986—),男,高级工程师,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: paper2021@163.com).

引用格式: 宋海洋. 基于区间数学方法的结构参数识别[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(5): 571-581.

## 0 引言

参数识别是一种利用理论模型和试验结果获取结构参数的有效方法,传统的参数识别方法可以分为经验法和试验法两种。经验法是指参考以往相似模型的参数来计算待识别模型的参数;试验法是指根据试验测量得到的结构响应来识别模型的参数,采用试验法识别模型参数的过程中会采用诸如最小二乘法、最大似然估计法、遗传算法等数学方法作为辅助手段。相比于经验法,由试验法识别出来的结构参数具有更高的精度和准确性。

目前关于参数识别的研究主要集中于低频振动下结构的参数识别,而对高频振动下结构参数识别的研究相对较少。20世纪60年代提出的统计能量分析方法适用于分析含有高频、高模态密度的复杂系统的耦合动力学问题,该方法已经广泛应用于航空、航天、船舶、汽车和机械等诸多领域。李征宇等<sup>[1]</sup>介绍了高频冲击载荷下结构的振动特性,发展了一种统计能量分析系统的时域能量响应预示方法。王小峰等<sup>[2]</sup>针对航空发动机风扇叶片气膜阻尼的结构设计,采用统计能量分析方法深入分析了气膜阻尼系统的振动特性。沈重等<sup>[3]</sup>基于混合单元的统计能量法对战斗机座舱振动和噪声进行了仿真分析。赵欣棠等<sup>[4]</sup>针对传统噪声分析方法在船舶初步设计阶段无法应用的问题,提出了一种基于图论和统计能量分析的传递路径分析方法。张捷等<sup>[5]</sup>提出了一种基于试验统计能量分析的高速列车车内噪声预测方法。张政等<sup>[6]</sup>针对度量系统参数的不确定性对高频振动响应的影响规律,提出了基于区间摄动的统计能量分析方法。以上这些研究主要集中在两个方面:一是利用统计能量分析方法预示工程结构的高频振动响应;二是利用统计能量分析方法预示工程结构的内部噪声量级。工程实践表明:针对航天和船舶等复杂系统采用统计能量分析方法预示的高频振动响应和内部噪声量级与试验测量结果相差较大,其根本原因在于统计能量分析方法所涉及的一些关键参数都是 $10^{-2} \sim 10^{-4}$ 数量级的小数,在实际工作中难以精确获得,参数不确定性大,导致高频动力学建模不精确,所获得的高频振动响应和噪声量级精度较低。因为统计能量分析中的关键参数直接影响后续振动响应和内部噪声的预示精度,所以采用一些理论和方法准确识别出统计能量分析中的这些参数具有重要的科学意义和应用价值。

近些年来,有学者基于统计能量分析方法对高频振动下的结构参数进行了识别,并开展了一系列的相关研究。统计能量分析方法中所涉及的结构参数主要包括内损耗因子和耦合损耗因子两种,传统的识别方法是利用试验测量得到的外部输入功率和结构自身的模态能量来识别内损耗因子和耦合损耗因子等参数。Delanghe等<sup>[7]</sup>利用试验测量得到的输入功率和模态能量对统计能量分析方法中涉及的结构参数进行了识别。Chen等<sup>[8]</sup>建立了高温结构的功率流平衡方程并对统计能量分析参数进行了识别和分析。秦朝红等<sup>[9]</sup>以飞行器典型结构件为对象开展了统计能量分析参数识别及建模技术研究。高群涛等<sup>[10]</sup>应用统计能量分析计算了水下双层加筋圆柱壳体的振动和声辐射过程,通过灰色预测来辨识系统的统计能量分析参数。以上这些研究都属于传统的统计能量分析参数识别,整个识别过程没有考虑输入功率和模态能量的测量误差对识别结果的影响,随着测量误差的逐渐累积,由传统方法所识别出来的统计能量分析参数精度较低,难以满足工程需要。

针对上述问题,本文拟采用区间数学方法来解决统计能量分析参数识别过程中的测量误差问题。近些年来,很多有效的区间数学方法被提出并被应用于处理由测量误差引起的结构不确定性问题。Ding等<sup>[11]</sup>通过区间数学方法解决了观测平台的视线测量误差等问题。Guo等<sup>[12]</sup>对传统的区间数学方法进行了改进,利用改进后的方法分析了由测量误差引起的结构不确定性问题。Zhao等<sup>[13]</sup>将带有测量误差的参数写成区间变量形式,然后对闭环控制系统的特征值进行了求解。Zhou等<sup>[14]</sup>利用区间数学方法计算了结构位移响应的包络线。

本文将区间数学方法应用于高频振动下结构的参数识别,提出了一种可以考虑模态能量测量误差和输入功率测量误差的参数识别方法,通过该方法揭示了模态能量测量误差和输入功率测量误差对参数识别的影响规律,提高了参数识别的准确性。本文首先详细介绍了高频振动下结构参数识别的具体推导过程,然后通过模拟研究和试验研究对本文所提方法的合理性和可行性进行了验证。

## 1 基于区间数学方法的结构参数识别

如图1所示,在统计能量分析方法中,一个复杂的工程结构通常被划分为一些相互耦合的子系统,子系

统间的功率流平衡方程可以写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} n_1\eta_1 + \sum_{i=2}^k n_1\eta_{1i} & -n_1\eta_{12} & \cdots & -n_1\eta_{1k} \\ -n_2\eta_{21} & n_2\eta_2 + \sum_{i=1, i \neq 2}^k n_2\eta_{2i} & \cdots & -n_2\eta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_k\eta_{k1} & -n_k\eta_{k2} & \cdots & n_k\eta_k + \sum_{i=1, i \neq k}^k n_k\eta_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi f} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中,  $\eta_i (i = 1, 2, \dots, k)$  为结构的内损耗因子, 它代表由自身的阻尼特性所引起的能量耗散;  $\eta_{ij}$  为结构的耦合损耗因子, 它代表两个子系统间的耦合强度;  $n_i$  为结构的模态密度;  $p_i$  是由结构外部的激励源所带来的输入功率,  $P_i = p_i / (2\pi f)$ ;  $f$  代表倍频程带宽的中心频率,  $\omega = 2\pi f$ ;  $E_i$  为结构的振动能量,  $e_i$  为结构的模态能量, 两者的关系为  $E_i = n_i e_i$ .

假设图 1 中的统计能量分析模型受到外部冲击载荷的激励, 整个模型共受到  $k$  次激励, 第  $m (m = 1, 2, \dots, k)$  次激励的效果如图 2 所示,  $p_{1,m}, p_{2,m}, \dots, p_{k,m}$  代表各个子系统的外部输入功率,  $e_{1,m}, e_{2,m}, \dots, e_{k,m}$  代表各个子系统的模态能量.

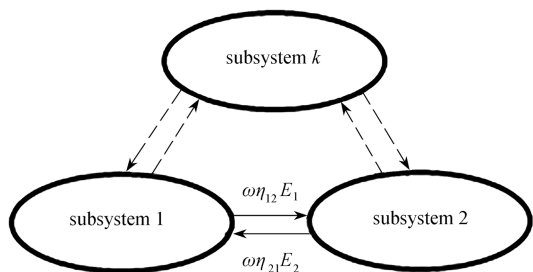


图 1 统计能量分析子系统间的能量耗散和能量传输

Fig. 1 Energy dissipation and energy transfer between SEA subsystems

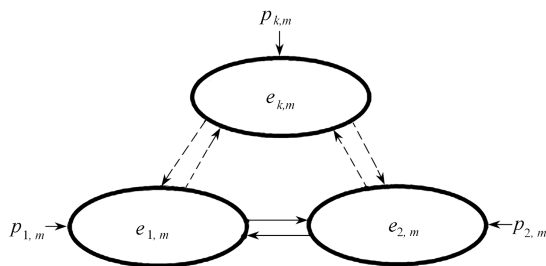


图 2 统计能量分析模型第  $m$  次激励效果图

Fig. 2 The  $m$ th excitation on the SEA model

将方程 (1) 用矩阵形式表示如下:

$$\mathbf{N}\mathbf{e} = \mathbf{P}, \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1\eta_1 + \sum_{i=2}^k n_1\eta_{1i} & -n_1\eta_{12} & \cdots & -n_1\eta_{1k} \\ -n_2\eta_{21} & n_2\eta_2 + \sum_{i=1, i \neq 2}^k n_2\eta_{2i} & \cdots & -n_2\eta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_k\eta_{k1} & -n_k\eta_{k2} & \cdots & n_k\eta_k + \sum_{i=1, i \neq k}^k n_k\eta_{ki} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,k} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k,1} & e_{k,2} & \cdots & e_{k,k} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,k} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & P_{k,2} & \cdots & P_{k,k} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

根据方程(2)可得参数矩阵  $N$ :

$$N = P e^{-1}. \quad (6)$$

当输入功率矩阵  $P$  产生微小变量  $\Delta P$ , 模态能量矩阵  $e$  产生微小变量  $\Delta e$  时, 方程(6)变为

$$(N + \Delta N) = (P + \Delta P)(e + \Delta e)^{-1}. \quad (7)$$

根据 Neumann 级数展开公式, 方程(7)中的逆矩阵可以展开为

$$(e + \Delta e)^{-1} = e^{-1} - e^{-1} \Delta e e^{-1} + e^{-1} \Delta e e^{-1} \Delta e e^{-1} - \dots. \quad (8)$$

忽略方程(8)中的高阶小项, 可得

$$(N + \Delta N) = (P + \Delta P)(e + \Delta e)^{-1} = (P + \Delta P)(e^{-1} - e^{-1} \Delta e e^{-1}) = P e^{-1} - N \Delta e e^{-1} + \Delta P e^{-1}. \quad (9)$$

联立方程(6)和方程(9), 可得  $\Delta N$  的表达式如下:

$$\Delta N = \Delta P e^{-1} - N \Delta e e^{-1}. \quad (10)$$

每个子系统的模态能量和输入功率可以通过试验测量的手段获得, 模态能量和输入功率的测量误差将会随着子系统的增多而逐渐积累. 本文采用含有上下限的区间变量来表示带有测量误差的模态能量和输入功率:

$$e'_{i,j} = [e'_{i,j}^l, e'_{i,j}^u], \quad (11)$$

$$P'_{i,j} = [P'_{i,j}^l, P'_{i,j}^u], \quad (12)$$

式中, 上标  $l$  代表区间的下限, 上标  $u$  代表区间的上限. 比如模态能量  $e_{1,1}$  和  $e_{1,2}$  的试验测量值分别是 10 J 和 20 J, 当测量误差为  $\pm 5\%$  时, 可得两个模态能量区间分别为  $e'_{1,1} = [9.5, 10.5]$  和  $e'_{1,2} = [19, 21]$ .

将方程(11)和方程(12)代入到方程(2)中, 可得

$$N' e' = P', \quad (13)$$

$N'$  是一个包含内损耗因子区间和耦合损耗因子区间的参数区间矩阵, 内损耗因子区间和耦合损耗因子区间的表达式如下:

$$\eta'_i = [\eta'_i{}^l, \eta'_i{}^u], \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (14)$$

$$\eta'_{ij} = [\eta'_{ij}{}^l, \eta'_{ij}{}^u], \quad i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k; i \neq j. \quad (15)$$

将方程(13)中的参数区间矩阵  $N'$ , 模态能量区间矩阵  $e'$  和输入功率区间矩阵  $P'$  依次分解成如下形式:

$$N' = N^c + \Delta N', \quad (16)$$

$$e' = e^c + \Delta e', \quad (17)$$

$$P' = P^c + \Delta P', \quad (18)$$

式中

$$\Delta N' = [(N^l - N^u)/2, (N^u - N^l)/2], \quad N^c = (N^l + N^u)/2, \quad (19)$$

$$\Delta e' = [(e^l - e^u)/2, (e^u - e^l)/2], \quad e^c = (e^l + e^u)/2, \quad (20)$$

$$\Delta P' = [(P^l - P^u)/2, (P^u - P^l)/2], \quad P^c = (P^l + P^u)/2. \quad (21)$$

将方程(16)–(18)代入到方程(13)中, 可得

$$(N^c + \Delta N')(e^c + \Delta e') = (P^c + \Delta P'). \quad (22)$$

利用方程(22)可得

$$(N^c + \Delta N') = (P^c + \Delta P')(e^c + \Delta e')^{-1}. \quad (23)$$

根据方程(8),  $(e^c + \Delta e')^{-1}$  能展开成如下形式:

$$(e^c + \Delta e')^{-1} = (e^c)^{-1} - (e^c)^{-1} \Delta e' (e^c)^{-1} + (e^c)^{-1} \Delta e' (e^c)^{-1} \Delta e' (e^c)^{-1} - \dots. \quad (24)$$

将方程(24)代入到方程(23)中, 可得

$$(N^c + \Delta N') = (P^c + \Delta P')(e^c + \Delta e')^{-1} = (P^c + \Delta P')((e^c)^{-1} - (e^c)^{-1} \Delta e' (e^c)^{-1}) = P^c (e^c)^{-1} + \Delta P' (e^c)^{-1} - N^c \Delta e' (e^c)^{-1}. \quad (25)$$

根据方程(25)可得

$$N^c = P^c (e^c)^{-1}, \quad (26)$$

$$\Delta N' = \Delta P' (e^c)^{-1} - N^c \Delta e' (e^c)^{-1}, \quad (27)$$

式中

$$N^c = \begin{bmatrix} n_1 \eta_1^c + \sum_{i=2}^k n_1 \eta_{1i}^c & -n_1 \eta_{12}^c & \cdots & -n_1 \eta_{1k}^c \\ -n_2 \eta_{21}^c & n_2 \eta_2^c + \sum_{i=1, i \neq 2}^k n_2 \eta_{2i}^c & \cdots & -n_2 \eta_{2k}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_k \eta_{k1}^c & -n_k \eta_{k2}^c & \cdots & n_k \eta_k^c + \sum_{i=1, i \neq k}^k n_k \eta_{ki}^c \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\Delta N^l = \begin{bmatrix} n_1 \Delta \eta_1^l + n_1 \sum_{i=2}^k (\Delta \eta_{1i}^l) & n_1 \Delta \eta_{12}^l & \cdots & n_1 \Delta \eta_{1k}^l \\ n_2 \Delta \eta_{21}^l & n_2 \Delta \eta_2^l + n_2 \sum_{i=1, i \neq 2}^k (\Delta \eta_{2i}^l) & \cdots & n_2 \Delta \eta_{2k}^l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_k \Delta \eta_{k1}^l & n_k \Delta \eta_{k2}^l & \cdots & n_k \Delta \eta_k^l + n_k \sum_{i=1, i \neq k}^k (\Delta \eta_{ki}^l) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

最终根据方程(26)和方程(27)可以识别出两个参数区间,一个是内损耗因子区间,另一个是耦合损耗因子区间.传统的统计能量分析参数识别方法没有考虑模态能量测量误差和输入功率测量误差对参数识别的影响,本文将模态能量测量误差和输入功率测量误差用区间变量的形式加以表示,识别过程充分考虑了测量误差对计算结果的影响,整个分析流程如图 3 所示.

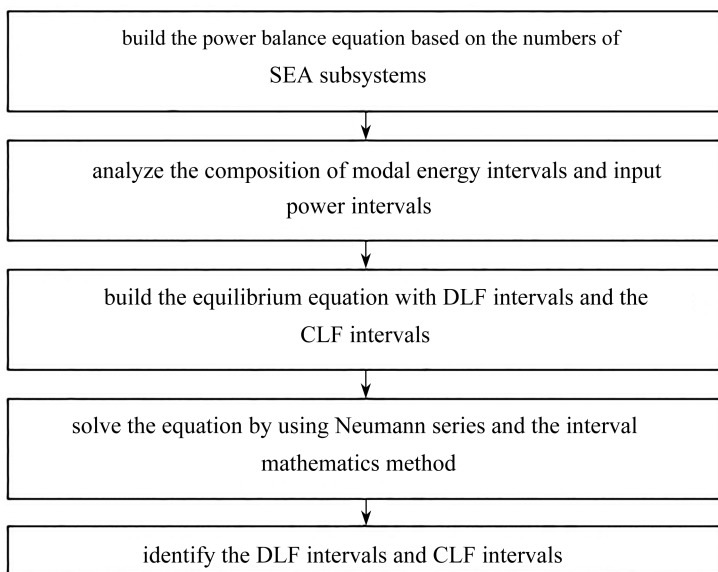


图 3 分析流程图

Fig. 3 The analytical process of the full text

## 2 算 例

### 2.1 两壳耦合结构模拟研究

图 4 给出了两个相互耦合的壳结构,左边壳体结构的直径为 0.8 m,模态密度为 0.01,右边壳体结构的直径为 1 m,模态密度为 0.012.将左边壳体结构定义为子系统 1,右边壳体结构定义为子系统 2.根据统计能量分析的功率流平衡方程可知,图 4 中两壳耦合结构包含 4 个待识别的结构参数,它们分别是两个内损耗因子

$\eta_1$  和  $\eta_2$ , 以及两个耦合损耗因子  $\eta_{12}$  和  $\eta_{21}$ . 假设两壳耦合结构受到外部冲击载荷的作用, 每个子系统的外部输入功率如表 1 所示.

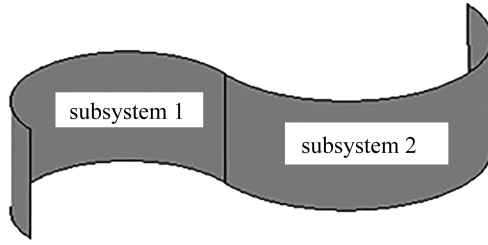


图 4 两壳耦合结构

Fig. 4 The 2-shell coupling structure

表 1 每个子系统的外部输入功率

Table 1 The exterior input power of each subsystem

$f/\text{Hz}$	$P_{1,1}/\text{W}$	$P_{2,1}/\text{W}$	$P_{1,2}/\text{W}$	$P_{2,2}/\text{W}$
1 000	0.150	0.020	0.012	0.170
2 000	0.300	0.050	0.025	0.350
3 000	0.600	0.100	0.050	0.700
4 000	1.500	0.250	0.125	1.750

简单板壳结构的输入功率和模态能量的测量误差一般在  $\pm 3\%$  到  $\pm 5\%$  之间<sup>[15]</sup>, 这里将输入功率和模态能量的测量误差选为  $\pm 3\%$ . 根据方程 (12), 可用表 2 中的区间变量来代表带有  $\pm 3\%$  测量误差的外部输入功率.

表 2 带有  $\pm 3\%$  测量误差的外部输入功率

Table 2 The exterior input power with  $\pm 3\%$  measurement errors

$f/\text{Hz}$	$P'_{1,1}/\text{W}$	$P'_{2,1}/\text{W}$	$P'_{1,2}/\text{W}$	$P'_{2,2}/\text{W}$
1 000	[0.145 50, 0.154 50]	[0.019 40, 0.020 60]	[0.011 64, 0.012 36]	[0.164 90, 0.175 10]
2 000	[0.291 00, 0.309 00]	[0.048 50, 0.051 50]	[0.024 25, 0.025 75]	[0.332 50, 0.367 50]
3 000	[0.582 00, 0.618 00]	[0.097 00, 0.103 00]	[0.048 50, 0.051 50]	[0.679 00, 0.721 00]
4 000	[1.455 00, 1.545 00]	[0.242 50, 0.257 50]	[0.121 25, 0.128 75]	[1.697 50, 1.802 50]

由于外部载荷的作用, 每个子系统会产生一定的模态能量, 每个子系统模态能量的大小如表 3 所示.

表 3 每个子系统的模态能量

Table 3 The modal energy of each subsystem

$f/\text{Hz}$	$e_{1,1}/\text{J}$	$e_{2,1}/\text{J}$	$e_{1,2}/\text{J}$	$e_{2,2}/\text{J}$
1 000	1 300	450	300	750
2 000	1 500	600	400	1 000
3 000	2 300	900	600	1 500
4 000	4 600	1 800	1 200	3 000

根据方程 (11), 可用表 4 中的区间变量来代表带有  $\pm 3\%$  测量误差的模态能量.

表 4 带有  $\pm 3\%$  测量误差的模态能量

Table 4 The modal energy with  $\pm 3\%$  measurement errors

$f/\text{Hz}$	$e'_{1,1}/\text{J}$	$e'_{2,1}/\text{J}$	$e'_{1,2}/\text{J}$	$e'_{2,2}/\text{J}$
1 000	[1 261, 1 339]	[437, 463]	[291, 309]	[728, 772]
2 000	[1 455, 1 545]	[582, 618]	[388, 412]	[970, 1 030]
3 000	[2 231, 2 369]	[873, 927]	[582, 618]	[1 455, 1 545]
4 000	[4 462, 4 738]	[1 746, 1 854]	[1 164, 1 236]	[2 910, 3 090]

根据方程 (26) 和方程 (27), 可以将结构参数识别出来. 图 5 显示了被识别出来的耦合损耗因子区间  $\eta'_{12}$ , 图 6 显示了被识别出来的内损耗因子区间  $\eta'_{11}$ .

在区间数学方法中定义如下变量:  $s = (\text{区间上限} - \text{区间下限}) / \text{区间均值}$ ,  $s$  越大表明测量误差对该参数识别结果的影响越大. 为了区分不同参数的  $s$  值, 内损耗因子的  $s$  值用  $s_d$  表示, 而耦合损耗因子的  $s$  值用  $s_c$  表示. 以图 5 和图 6 中的 2 000 Hz 为例, 计算如下:

$$s_c = \frac{0.007\ 80 - 0.005\ 28}{0.006\ 54} = 0.385,$$

$$s_d = \frac{0.016\ 6 - 0.015\ 4}{0.016} = 0.075.$$

可见  $s_c > s_d$ , 故输入功率和模态能量的测量误差对耦合损耗因子的识别结果影响更大.

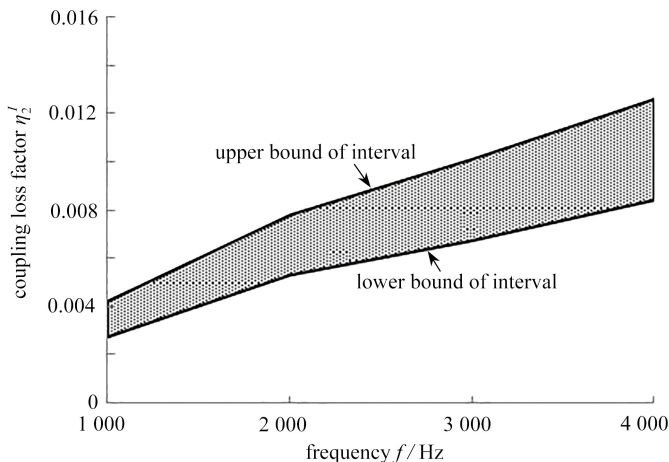


图 5 耦合损耗因子区间  $\eta'_{12}$

Fig. 5 The coupling loss factor interval  $\eta'_{12}$

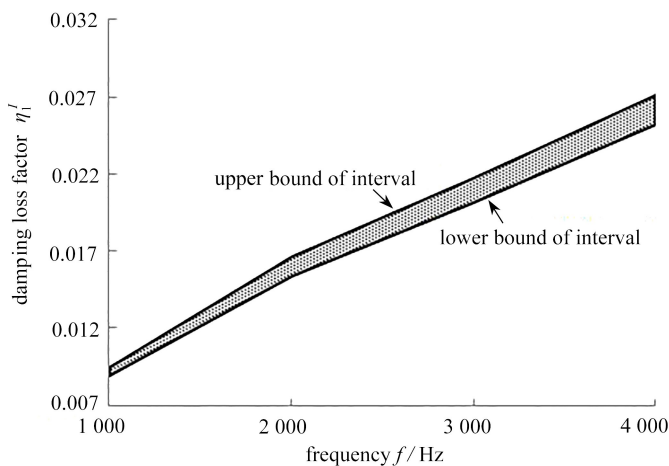


图 6 内损耗因子区间  $\eta'_1$

Fig. 6 The damping loss factor interval  $\eta'_1$

## 2.2 六板耦合结构模拟研究

通过图 7 给出的复合结构来进一步验证本文所提方法的可行性和适用性. 每一块板被当作一个统计能量分析子系统, 其中子系统 1 和子系统 2 的长度均为 1 m, 宽度为 0.5 m, 模态密度为 0.009; 子系统 3 和子系统 4 的长度为 0.5 m, 宽度为 0.5 m, 模态密度为 0.004; 子系统 5 和子系统 6 的长度为 0.7 m, 宽度为 0.5 m, 模态密度为 0.006. 现对该复合结构进行冲击激励, 复合结构中每一个子系统的外部输入功率如图 8 所示.

在外部冲击激励作用下, 每个子系统的模态能量如图 9 所示. 外部输入功率和模态能量的测量误差仍假设为  $\pm 3\%$ , 根据方程 (11) 和方程 (12) 可以获得所有子系统的输入功率区间和模态能量区间, 再根据方程 (26) 和 (27) 就可以识别出参数区间, 参数区间具体值如表 5 所示.

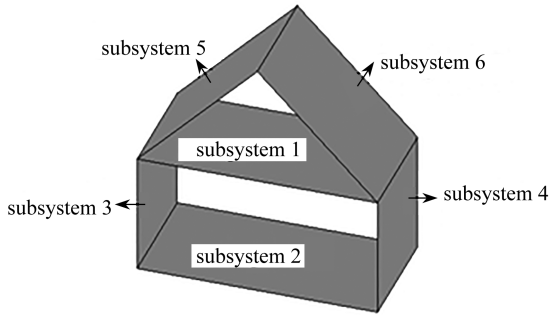


图7 六板耦合结构

Fig. 7 The composite structure with 6 plates

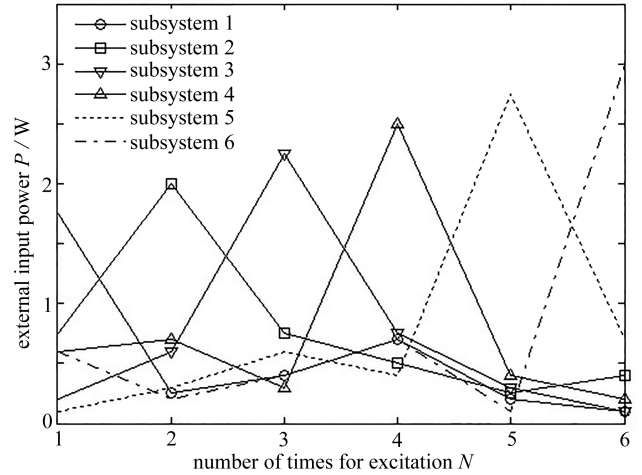


图8 每个子系统的外部输入功率

Fig. 8 The exterior input power of each subsystem

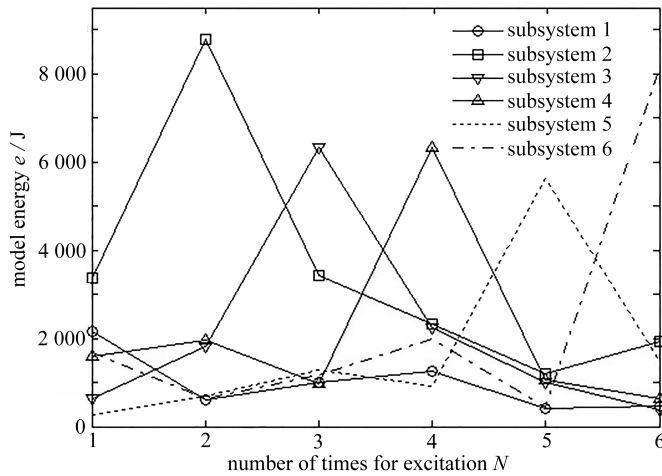


图9 每个子系统的模态能量

Fig. 9 The modal energy caused by the exterior input power

表5 识别出的参数区间

Table 5 Identified parameter intervals of the composite structure

$f/\text{Hz}$	$\eta'_{11}$	$\eta'_{13}$	$\eta'_{16}$
1 000	[0.081 8, 0.084 2]	[0.004 4, 0.008 8]	[0.002 5, 0.004 1]

## 2.3 试验研究

Mao 等<sup>[16]</sup>开展了图 10 中两钢板耦合结构的振动试验,试验的主要目的在于测量两钢板结构的内损耗因子和耦合损耗因子等参数.图 10 中两块钢板的长度均为 0.42 m,宽度均为 0.36 m,水平钢板的厚度为 0.01 m,垂直钢板的厚度为 0.004 5 m,水平钢板的模态密度为 0.000 76,垂直钢板的模态密度为 0.001 7,水平钢板被定义为子系统 1,垂直钢板被定义为子系统 2.两块钢板通过弹性绳悬挂起来,通过 PCB 模态脉冲力锤对两块钢板施加冲击载荷,同时通过安装在力锤上的负荷传感器对冲击载荷的大小进行测量.通过安装在每一块板上的 5 个加速度传感器来测量板的加速度响应,然后取 5 个加速度传感器的平均值作为最终值.整个过程的所有信号使用型号为 LMS SC310-UTP 的动态分析仪进行收集和处理.

图 10 共进行了两次激励试验,在第一次试验中,采用冲击载荷对子系统 1 进行单独激励,而不激励子系统 2,通过仪器测量可得每一个子系统在不同中心频率下的外部输入功率和模态能量,如表 6 所示.在第二次试验中,采用冲击载荷对子系统 2 进行单独激励,而不激励子系统 1,通过仪器测量可得每一个子系统在不同中心频率下的外部输入功率和模态能量,如表 7 所示.



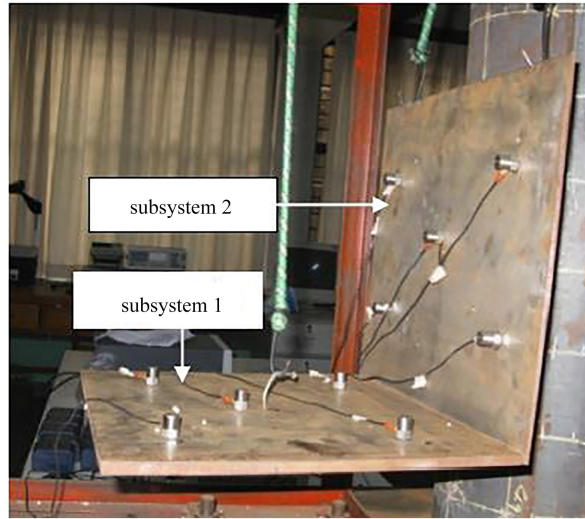


图 10 两钢板耦合结构的振动试验<sup>[16]</sup>

Fig. 10 The vibration experiment of 2 connected steel plates<sup>[16]</sup>

表 6 第一次试验测量得到的输入功率和模态能量

Table 6 The measured input power and modal energy in the 1st test

$f/\text{Hz}$	subsystem 1		subsystem 2	
	input power $P/\text{W}$	modal energy $e/\text{J}$	input power $P/\text{W}$	modal energy $e/\text{J}$
1 000	$3.20 \times 10^{-11}$	$5.06 \times 10^{-7}$	0	$3.22 \times 10^{-7}$
2 000	$2.39 \times 10^{-11}$	$1.022 \times 10^{-6}$	0	$5.500 \times 10^{-8}$

表 7 第二次试验测量得到的输入功率和模态能量

Table 7 The measured input power and modal energy in the 2nd test

$f/\text{Hz}$	subsystem 1		subsystem 2	
	input power $P/\text{W}$	modal energy $e/\text{J}$	input power $P/\text{W}$	modal energy $e/\text{J}$
1 000	0	$4.57 \times 10^{-9}$	$7.90 \times 10^{-13}$	$4.52 \times 10^{-8}$
2 000	0	$1.65 \times 10^{-10}$	$7.962 \times 10^{-14}$	$6.34 \times 10^{-9}$

将测量得到的两个子系统的输入功率和模态能量写成如下矩阵形式：

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.20 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 7.9 \times 10^{-13} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} \\ e_{2,1} & e_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.06 \times 10^{-7} & 4.57 \times 10^{-9} \\ 3.22 \times 10^{-7} & 4.52 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad f = 1\,000\text{ Hz},$$

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.39 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 7.962 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} \\ e_{2,1} & e_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.022 \times 10^{-6} & 1.65 \times 10^{-10} \\ 5.500 \times 10^{-8} & 6.34 \times 10^{-9} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad f = 2\,000\text{ Hz}.$$

Mao 等<sup>[16]</sup>采用传统的参数识别方法对图 10 中的结构参数进行了识别,识别结果如表 8 所示。

表 8 由传统方法识别的参数结果<sup>[16]</sup>

Table 8 Traditional identification results of SEA parameters<sup>[16]</sup>

$f/\text{Hz}$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_{12}$	$\eta_{21}$
1 000	0.08	0.004	0.009 0	0.007 0
2 000	0.03	0.007	0.000 8	0.000 4

当输入功率和模态能量的测量误差为 $\pm 3\%$ 时,根据方程(20)和方程(21)可得

$$\begin{cases} \Delta P' = \begin{bmatrix} [-9.6 \times 10^{-13}, 9.6 \times 10^{-13}] & [0, 0] \\ [0, 0] & [-2.37 \times 10^{-14}, 2.37 \times 10^{-14}] \end{bmatrix}, \\ e = \begin{bmatrix} [-1.517 \times 10^{-8}, 1.517 \times 10^{-8}] & [-1.371 \times 10^{-10}, 1.371 \times 10^{-10}] \\ [-9.654 \times 10^{-9}, 9.654 \times 10^{-9}] & [-1.355 \times 10^{-9}, 1.355 \times 10^{-9}] \end{bmatrix}, \end{cases} \quad f = 1\,000 \text{ Hz},$$

$$\begin{cases} \Delta P' = \begin{bmatrix} [-7.17 \times 10^{-13}, 7.17 \times 10^{-13}] & [0, 0] \\ [0, 0] & [-2.39 \times 10^{-15}, 2.39 \times 10^{-15}] \end{bmatrix}, \\ e = \begin{bmatrix} [-3.066 \times 10^{-8}, 3.066 \times 10^{-8}] & [-4.95 \times 10^{-12}, 4.95 \times 10^{-12}] \\ [-1.650 \times 10^{-9}, 1.650 \times 10^{-9}] & [-1.900 \times 10^{-10}, 1.900 \times 10^{-10}] \end{bmatrix}, \end{cases} \quad f = 2\,000 \text{ Hz}.$$

采用本文提出的方法,利用方程(26)和方程(27)可以将内损耗因子区间和耦合损耗因子区间识别出来,识别结果如表9所示。

表9 参数区间的识别结果

Table 9 Identified parameter intervals of 2 connected steel plates

$f/\text{Hz}$	$\eta'_1$	$\eta'_2$	$\eta'_{12}$	$\eta'_{21}$
1 000	[0.075 08, 0.084 92]	[0.003 75, 0.004 25]	[0.007 85, 0.010 16]	[0.006 10, 0.007 89]
2 000	[0.028 25, 0.031 75]	[0.006 60, 0.007 39]	[0.000 69, 0.000 91]	[0.000 35, 0.000 45]

表9给出了内损耗因子区间和耦合损耗因子区间的识别结果,整个识别过程充分考虑了输入功率和模态能量的测量误差对参数识别的影响,随着工程结构复杂性逐渐提高,本文给出的区间结果将有助于后续的结构设计和安全性分析。

### 3 结 论

传统的结构高频参数识别没有考虑测量误差对识别结果的影响,本文提出了一种基于区间数学理论的参数识别方法,该方法可以充分考虑模态能量和输入功率的测量误差对识别结果的影响,将带有测量误差的结构外部输入功率和结构自身的模态能量用包含上下限的区间变量加以表示,通过建立和求解统计能量分析的区间功率流平衡方程,获得了内损耗因子区间和耦合损耗因子区间,揭示了模态能量和输入功率的测量误差对参数识别结果的影响规律,通过算例分析的结果可以得出如下结论:

- 1) 通过将参数的  $s$  值和模态能量及输入功率的测量误差进行比较,可以看出模态能量和输入功率的测量误差对结构的参数识别结果有较大影响,在进行结构参数识别时应该充分考虑模态能量和输入功率的测量误差;
- 2) 耦合损耗因子的  $s_c$  值大于内损耗因子的  $s_d$  值,即模态能量和输入功率的测量误差对耦合损耗因子识别的影响大于对内损耗因子识别的影响;
- 3) 本文的研究方法更适用于简单的板壳组合结构,对于非常复杂的工程结构,在后续的工作中会使用不同的区间数学方法来提高参数识别精度。

**致谢** 本文作者衷心感谢东北电力大学博士科研启动基金项目(BSJXM-2020216)对本文的资助。

### 参考文献(References):

- [1] 李征宇, 王薇, 陈强. 基于能量法的高频冲击载荷下机械结构振动特性研究[J]. 船舶电子对抗, 2023, 46(5): 103-107. (LI Zhengyu, WANG Wei, CHEN Qiang. Research into mechanical structural vibration characteristics under high-frequency impact load based on energy method[J]. *Shipboard Electronic Countermeasure*, 2023, 46(5): 103-107. (in Chinese))
- [2] 王小峰, 崔东泽, 张鸿, 等. 带气膜阻尼悬臂平板振动特性的统计能量分析[J]. 机械设计与制造, 2023(12): 7-12. (WANG Xiaofeng, CUI Dongze, ZHANG Hong, et al. Statistical energy analysis on vibration characteristics of cantilever plate with air film damper[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2023(12): 7-12. (in Chinese))
- [3] 沈重, 陈忠明. 基于有限元-统计能量分析混合法座舱噪声特性研究[J]. 噪声与振动控制, 2022, 42(5): 200-203. (SHEN Zhong, CHEN Zhongming. Study on noise characteristics of airplane cockpits based on FEM-SEA

- hybrid method[J]. *Noise and Vibration Control*, 2022, **42**(5): 200-203. (in Chinese))
- [4] 赵欣棠, 徐恬. 基于图论和统计能量分析的船舶舱室噪声传递路径[J]. 船舶设计通讯, 2021(162): 38-44. (ZHAO Xintang, XU Tian. Transfer path of ship cabin noise based on graph theory and statistical energy analysis[J]. *Journal of Ship Design*, 2021(162): 38-44. (in Chinese))
- [5] 张捷, 姚丹, 王瑞乾, 等. 基于试验统计能量分析的高速列车车内噪声预测方法[J]. 铁道学报, 2020, **42**(11): 45-52. (ZHANG Jie, YAO Dan, WANG Ruiqian, et al. An approach for interior noise prediction of high-speed trains based on experimental statistical energy analysis[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2020, **42**(11): 45-52. (in Chinese))
- [6] 张政, 许孟辉. 基于改进区间摄动分析的统计能量分析法[J]. 噪声与振动控制, 2019, **39**(6): 25-29. (ZHANG Zheng, XU Menghui. Statistical energy analysis method based on improved interval perturbation analysis[J]. *Noise and Vibration Control*, 2019, **39**(6): 25-29. (in Chinese))
- [7] DELANGHE K, SAS P. Statistical analysis of the power injection method[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, **100**(1): 294-303.
- [8] CHEN Q, FEI Q G, LI Y B, et al. Prediction of statistical energy analysis parameters in thermal environment [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2019, **56**(3): 687-694.
- [9] 秦朝红, 任方, 韩丽, 等. 飞行器典型结构中频分析参数识别及建模技术研究[J]. 强度与环境, 2014, **41**(5): 38-44. (QIN Chaohong, REN Fang, HAN Li, et al. Parameter identification and modeling method for mid-frequency environment prediction of typical structure [J]. *Structure and Environment Engineering*, 2014, **41**(5): 38-44. (in Chinese))
- [10] 高群涛, 姚熊亮, 崔洪斌. 结构辐射噪声统计能量分析中参数的灰色预测[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2006, **27**(1): 48-52. (GAO Quntao, YAO Xiongliang, CUI Hongbin. Prediction of statistical energy analysis parameter in structure diffused noise[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2006, **27**(1): 48-52. (in Chinese))
- [11] DING W Z, LI X H, YANG H, et al. Utilizing statistical information for interval analysis: a method for analyzing the interval uncertainty of line-of-sight measurement error of space-borne observation platforms [J]. *IEEE Access*, 2020, **8**: 67868-67886.
- [12] GUO X M, MA H, ZHANG X F, et al. Uncertain frequency responses of clamp-pipeline systems using an interval-based method[J]. *IEEE Access*, 2020, **8**: 29370-29384.
- [13] ZHAO J Z, YAO G F, LIU R Y, et al. Interval analysis of the eigenvalues of closed-loop control systems with uncertain parameters[J]. *Actuators*, 2020, **9**(2): 31.
- [14] ZHOU Y T, JIANG C, HAN X. Interval and subinterval analysis methods of the structural analysis and their error estimations[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2006, **3**(2): 229-244.
- [15] LYON R H, DEJONG R G. *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*[M]. 2nd ed. The MIT Press, 1995.
- [16] MAO B Y, XIE S L, XU M L, et al. Simulated and experimental studies on identification of impact load with the transient statistical energy analysis method[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, **46**: 307-324.