

第七届“钱令希计算力学青年奖”特邀论文

数据驱动下的声学器件音质优化*

许磊, 张维声, 朱宝, 郭旭

(大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 音质是声学器件声音表现的重要衡量标准,但音质的优化过程需要对大量频点的响应进行协同优化,造成优化问题的可求解性较差.该文提出了一种数据驱动下的声学通道拓扑优化设计方法,可实现声-结构系统中的声频响快速预测,进而借助显式拓扑优化技术实现声学器件的音质优化.通过人工神经网络对结构几何参数、激励频率与声频响之间的非线性关系进行建模,以可移动变形组件(moving morphable components, MMC)法中的结构几何参数、激励频率为输入变量,以声压频响作为输出变量,通过训练多层前馈网络建立了声频响的人工神经网络模型.所得结果可以有效地将目标频带内的声压级范围差从 44.89 dB 缩小至 6.49 dB,相较于传统优化方法,求解速度约为之前的 16.3 倍,表明了当前方法对音质优化问题的快速求解具有明显效果.

关键词: 拓扑优化; 声-结构系统; 人工神经网络; 可移动变形组件法; 音质

中图分类号: O232 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440339

Data-Driven Sound Quality Optimization of Acoustic Devices

XU Lei, ZHANG Weisheng, ZHU Bao, GUO Xu

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

Abstract: Sound quality is an important measure of the sound performance of acoustic devices. However, the process of optimizing the sound quality requires a collaborative optimization of the responses at multiple frequency points, resulting in poor solvability of the optimization problem. A data-driven acoustic channel topology optimization design method was proposed to enable fast prediction of the acoustic frequency responses in the acoustic-structural system and then optimize the sound quality of acoustic devices with explicit topology optimization techniques. The non-linear relationship between structural geometry parameters, excitation frequencies and acoustic frequency responses was modelled with artificial neural networks. An artificial neural network model for acoustic frequency responses was developed by training a multilayer feedforward network with the structural geometrical parameters in the moving morphable components method and the excitation frequencies as input variables, and the acoustic pressure frequency responses as output variables. The obtained results can effectively reduce the range difference of the sound pressure level (SPL) in the target frequency band from 44.89 dB to 6.49 dB. Compared with the traditional optimization method, the solution speed is about 16.3 times as be-

* 收稿日期: 2023-11-23; 修订日期: 2023-12-24

基金项目: 国家自然科学基金(12272075)

作者简介: 许磊(1995—),男,博士生(E-mail: xulei1234@mail.dlut.edu.cn);

张维声(1982—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: weishengzhang@dlut.edu.cn).

引用格式: 许磊, 张维声, 朱宝, 郭旭. 数据驱动下的声学器件音质优化[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(3): 253-260.

fore, which shows that the current method is effective for the rapid solution of sound quality optimization problems.

Key words: topology optimization; acoustic-structural system; artificial neural network; moving morphable components method; sound quality

0 引言

近几十年来,结构设备和电子器件的声学性能逐渐成为工程设计中的一个研究热点.随着声学器件的性能需求的提升,相关设计问题也不断面临新的挑战.

为了满足声学设计要求,拓扑优化^[1-3]已被广泛地应用于声学优化设计中.2007年,Yoon等^[4]提出了一种混合有限元公式,并结合变密度法(SIMP)有效地解决了材料在结构域与声学域之间的平稳过渡,实现了参考域内的声压水平最小化设计.Du等^[5]考虑了结构与周围声学介质间发生耦合作用,通过对无阻尼振动双材料弹性结构进行拓扑设计,实现了结构振动传递到声介质的声能最小化.Lee等^[6]采用正态导数积分方程求解了薄体结构的声学问题,并使用遗传算法对薄体结构的孔洞设计进行了拓扑优化.Hu等^[7]提出了一种基于混合有限元公式和替代材料模型的浮动投影拓扑优化方法,能够有效地降低声学优化问题中由极高的质量和刚度比引起的人工局部振动模式.

尽管现阶段在声学拓扑优化设计方面已开展了诸多研究,但大多关注的是单一频率下的声压/声能最小化设计^[8-10],而对频带内音质的提升关注较少.在电子声学器件中,音质指的是在某一频带内,声音能够以一定的幅值强度平稳输出.音质优化一般将关注频带离散成一定数量的频点,并对所有频点的声学响应进行协同优化.事实上,当频带内离散的频点数量足够多时,声频响曲线的表现精度会更高.然而伴随着高精度的声曲线输出,大规模频点响应的反复优化使得问题的可求解性大幅降低.

针对上述问题,本文提出了一种基于人工神经网络的声-结构耦合系统的显式拓扑优化框架.在该框架下,采用MMC^[11]显式描述结构域与声学域的边界,并以神经网络模型代替求解耗时的有限元计算模型对声-结构系统的声频响进行预测,从而实现音质优化问题的快速求解.

1 声-结构系统优化模型

在本文中,音质优化的目标是通过改变设计域的拓扑结构来找到最优的声学结构(如图1所示),从而提高某一频带内声压频响的幅值,改善频带内声频响的均匀性.引入2014年由Guo等^[11]提出的MMC法,以声学指标 I 最小化为目标函数,优化列式可以表述为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{find } \mathbf{d} = (\mathbf{d}_1^T, \dots, \mathbf{d}_N^T)^T, \\ \min I = I(\mathbf{d}), \\ \text{s.t. } \mathbf{K}(\mathbf{d})\mathbf{U} = \mathbf{F}, \\ V(\mathbf{d}) \leq \gamma D_a, \\ \mathbf{d} \subset \mathcal{U}_d, \\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}, \quad \text{on } \Gamma_U, \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, $\mathbf{d}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为第 i 个组件的设计变量向量, N 为组件总数; \mathcal{U}_d 为 \mathbf{d} 的可行集; I 为由声压表示的目标函数; \mathbf{K} 为总体刚度矩阵; \mathbf{F} 为全局载荷向量; \mathbf{U} 为包括机械场和声场的结构响应; D_a 为给定的设计域; γ 为在0和1之间的体积分数.

式(1)中,忽略体积力,声-结构耦合系统控制方程 $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ 的离散形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & -\mathbf{K}_{up} \\ -\rho_a \omega^2 \mathbf{K}_{up}^T & \mathbf{K}_{pp} - \omega^2 \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中, $\omega = 2\pi f$ 为角频率; ρ_a 为声学材料密度; \mathbf{K}_{uu} 和 \mathbf{M}_{uu} 分别为结构刚度矩阵和结构质量矩阵; \mathbf{K}_{pp} 和 \mathbf{M}_{pp} 分别为声学刚度矩阵和声学质量矩阵; \mathbf{K}_{up} 为耦合矩阵; \mathbf{u} 和 \mathbf{p} 分别为结构位移向量和声压向量; \mathbf{f}_u 和 \mathbf{f}_p 分别

为结构载荷向量和声力向量,式(2)的详细推导过程和公式表达可参见文献[12-13].

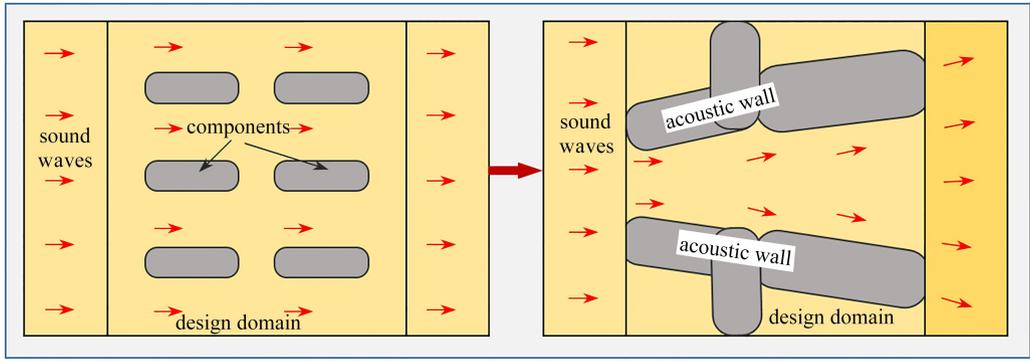


图 1 声学优化问题示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the acoustic optimization problem

对于声压级最大化问题,目标函数可以表示为

$$I_1 = - \| p_i \|_2, \quad \forall i \in [f_1, f_u], \quad (3)$$

其中, p_i 表示频带 $[f_1, f_u]$ 内频点 i 的声压频响.而对于音质优化,需要对声压幅值和均匀性同时进行优化,目标函数可以表示为

$$I_2 = \eta \| I_1^i, I_1^{\max} \|_2 - I_1^{\max}, \quad \forall i \in [f_1, f_u], \quad (4)$$

其中, η 是一个来控制频带内频率响应均匀性大小的系数, I_1^{\max} 可以表示为

$$I_1^{\max} = \left(\sum_{i=1}^{N_f} (I_1^i)^p \right)^{1/p}, \quad (5)$$

其中, N_f 是离散频率点的总数, p 是一个惩罚因子,在本文中, $p = 6$.

2 方法介绍

2.1 MMC 方法介绍

在 MMC 拓扑优化框架中,结构构型可以由一系列组件通过移动、变形、旋转等行为搭建而成,这些组件可以由拓扑描述函数显式表达.在本文中,一个 2 维结构组件的拓扑描述函数^[14]可以表示如下:

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x'}{L} \right)^m + \left(\frac{y'}{f(x')} \right)^m - 1, \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} x' \\ y' \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{cases} x - x_0 \\ y - y_0 \end{cases}, \quad (7)$$

$$f(x') = \frac{t^1 + t^2 + 2t^3}{2L^2} (x')^2 + \frac{t^2 - t^1}{2L} x' + t^3. \quad (8)$$

在这里,向量 $\mathbf{d} = (x_0, y_0, L, t^1, t^2, t^3, \theta)$ 表示组件的设计变量.其中, (x_0, y_0) 表示组件中心点的坐标, L 表示组件的半长, t^1, t^2, t^3 分别为组件两端和中间的半宽, θ 表示坐标系 $x'O'y'$ 相对于坐标系 xOy 的倾斜角, m 为一个较大的偶数,在本文中, $m = 6$.向量 \mathbf{d} 所描述的组件如图 2 所示.

对于每个组件,第 i 个组件占据材料域 Ω_i 和边界 $\partial\Omega_i$ 的拓扑描述函数如下:

$$\begin{cases} \phi_i(\mathbf{x}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_i, \\ \phi_i(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \partial\Omega_i, \\ \phi_i(\mathbf{x}) < 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in D_a \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad (9)$$

其中, \mathbf{x} 为设计域 D_a 中的任意一点并且 $\Omega_i \subset D_a, \phi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为第 i 个组件的拓扑描述函数.由此,设计域内所有结构组件的拓扑描述函数可以写为

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega, \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in D_a \setminus \Omega, \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\phi = \max(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$, $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$.

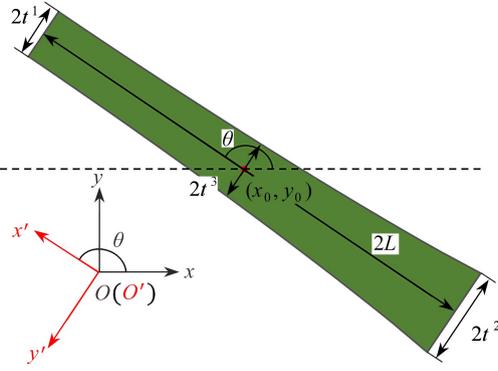


图2 一个二维结构组件

Fig. 2 A 2D structural component

2.2 灵敏度计算

为了求解优化公式,采用伴随法求出目标函数/约束函数对设计变量的灵敏度.式(4)中音质问题的目标函数 I_2 关于设计变量 x 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial x} &= \eta \frac{\partial \left(\sum_{i=f_l}^{f_u} (I_1^i - I_1^{\max})^2 \right)}{\partial x} - \frac{\partial I_1^{\max}}{\partial x} = \\ &2\eta \sum_{i=f_l}^{f_u} (I_1^i - I_1^{\max}) \left(\frac{\partial I_1^i}{\partial x} - \frac{\partial I_1^{\max}}{\partial x} \right) - \frac{\partial I_1^{\max}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\frac{\partial I_1^{\max}}{\partial x} = \left(\sum_{i=f_l}^{f_u} (I_1^i)^p \right)^{1/p-1} \sum_{i=f_l}^{f_u} \left((I_1^i)^{p-1} \frac{\partial I_1^i}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial I_1^i}{\partial x} = -2\text{Re} \left(\lambda_1 \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial x} \mathbf{d}_i \right), \quad \forall i \in [f_l, f_u]. \quad (13)$$

在本文中,由于目标函数 I 是由神经网络模型预测获得的,因此可以直接通过有限差分法来计算目标函数 I 对设计变量 x 的导数,这对复杂问题的灵敏度计算十分有效.

2.3 BP 神经网络模型原理

近些年来,数据驱动方法得到了快速发展,并在力学领域的求解计算方面开展了诸多应用^[15-17].本文通过构建基于BP神经网络的声-结构耦合系统频响预估模型,可以快速准确地预测声频响.典型的BP神经网络分为3个层次:输入层、隐藏层、输出层.每一层包含一组神经元,神经元和连接它们的各种权重组成了神经网络.通过输入一定数量的数据集,并对其进行训练,神经网络可以快速准确地预测一系列输入所对应的输出.

在本文中,以结构组件的几何参数和激励频率作为输入变量,以声压频响作为输出变量,构建用于预测声-结构耦合模型声频响的BP神经网络模型.BP神经网络模型详细的构建过程如下:

- 1) 采集数据.使用Latin超立方采样(Latin hypercube sampling, LHS)均匀产生组件几何参数 \mathbf{d} 和激励频率 f , 并与仿真计算得到的目标函数 I 一起作为数据样本.
- 2) 预处理数据.为了避免奇异样本的出现,对原始数据进行归一化处理,使得数据映射在 $[-1, 1]$ 之间.
- 3) 建立BP神经网络.BP神经网络包含1个输入层、10个隐藏层、1个输出层.输入层包含15个神经元,每个隐藏层包含200个神经元,输出层包含1个神经元.
- 4) 设置训练参数、测试性能及计算误差.设置包括学习率、一次性选取样本数、训练周期等相关参数.对建立的模型性能进行检测,通过计算均相对误差(mean relative error, MRE)对模型的预测结果进行评估.

图3为使用BP神经网络模型进行音质优化的流程图.

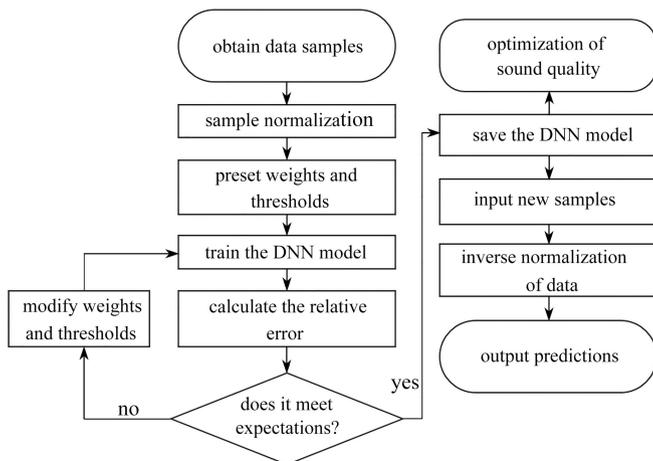


图 3 利用 BP 神经网络进行音质优化流程

Fig. 3 The flow chart for the sound quality optimization with the BP neural network

3 数值算例

3.1 有限元模型

如图 4 所示:声-结构耦合模型左侧为结构域,材料为塑料,尺寸为 0.2×10 ,上下为固定边界,载荷 $F = 1\text{ N}$;右侧为声学域并充满空气,尺寸为 20×10 ,上下为声场硬边界,右边界为声场辐射边界,左边界为声-结构耦合边界.声学设计域尺寸为 2.5×10 ,与耦合边界相距 5,点 A 为声辐射边界中点.在本文中,为了解决声压级最大化和音质优化两个不同的问题,模型尺寸单位分别采用 mm 和 cm.整个结构离散化采用 202×100 的均匀网格.

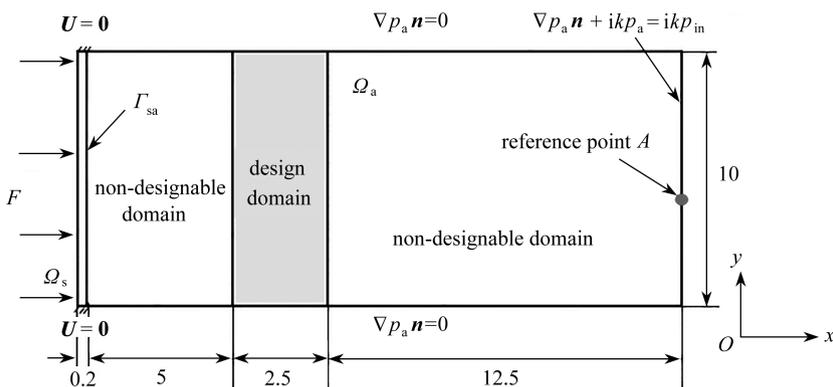


图 4 一个简化的二维声-结构耦合模型

Fig. 4 A simple 2D acoustic-structural coupled model

我们为了简化计算,随机产生 14 个几何参数生成 2 条结构组件,然后通过对称操作在设计域上方生成 2 个镜像组件,组件的内部材料为铝.材料属性如表 1 所示.

表 1 3 种材料的参数

Table 1 The 3 materials' parameters

material parameter	Young's modulus E/GPa	Poisson's ratio ν	density $\rho / (\text{kg}/\text{m}^3)$	bulk modulus K/GPa
acrylic plastic	3.2	0.35	1 190	-
air	-	-	1.2	1.41×10^{-4}
aluminum	-	-	2 650	68.9

针对声压级最大化和音质优化两个问题,24 万组单频(频率为 7 000 Hz)声学响应数据样本和 18 万组多频(频带范围为 3 000~4 000 Hz)声学响应数据样本分别被收集并用于训练 BP 神经网络,计算所得 MRE 均在 1% 以下.

3.2 声压级最大化问题

首先进行声压级最大化验证,目标函数为 I_1 .激励频率 $f = 7\text{ 000 Hz}$,体积分数 $\bar{V} = 0.5$.图 5 显示了组件的

初始布置和最终优化构型,可以发现组件在设计域上下两端形成两个声学屏障,并在中间形成了一个左窄右宽的喇叭形声学通道.在这一声学结构下,声波经过声学硬边界的反射并向目标点 A 处聚集,对声音有一定的放大效果,可以有效地提升点 A 的声压级值.图6显示了目标函数的迭代历史,可以发现整个优化过程中神经网络模型能够准确地预测声压响应,预测最优值为 -42.85 ,与真实值 -41.86 之间的误差仅为 2.36% .

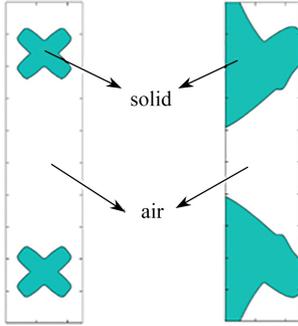


图5 组件初始布置和最终优化设计

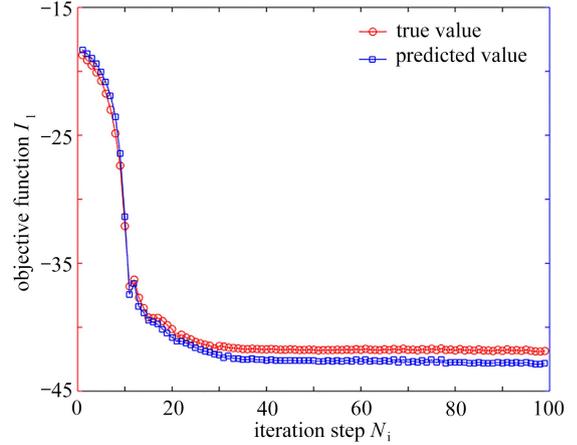
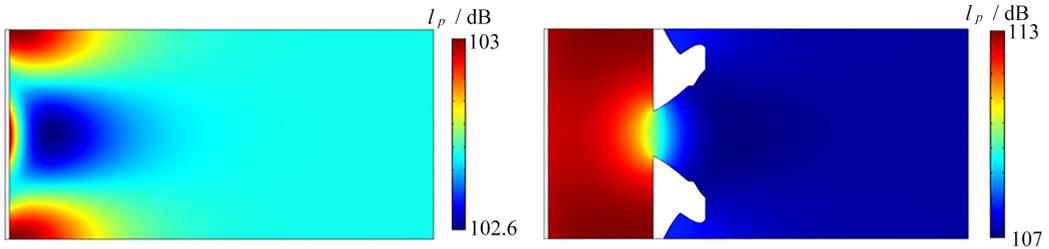


图6 目标函数 I_1 的迭代历史

Fig. 5 The initial design of components and the final optimized design

Fig. 6 The iteration history of objective function I_1

图7显示了纯空气设计与最优设计的声压级场分布.图8为纯空气设计与最优设计的声压级曲线,可以发现 $7\ 000\ \text{Hz}$ 下点 A 处的声压级由 $102.89\ \text{dB}$ 提升至 $107.43\ \text{dB}$,优化效果显著.



(a) 纯空气设计

(b) 最优设计

(a) The pure air design

(b) The optimized design

图7 $f = 7\ 000\ \text{Hz}$ 下二维结构的声压级分布

Fig. 7 The distribution of SPL (dB) of the 2D structure at $f = 7\ 000\ \text{Hz}$

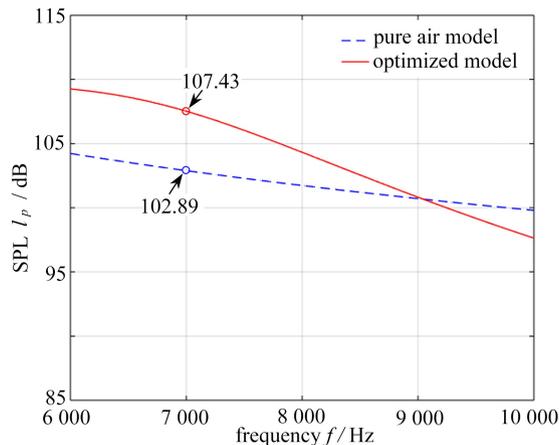


图8 纯空气设计和最优设计的声压级曲线($[6\ 000\ \text{Hz}, 10\ 000\ \text{Hz}]$)

Fig. 8 SPL curves of pure air design and the optimized design ($[6\ 000\ \text{Hz}, 10\ 000\ \text{Hz}]$)

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

3.3 音质优化问题

接下来是音质优化.在 3 300~3 700 Hz 频带范围内均匀选取 41 个频点,目标函数为 I_2 ,系数 $\eta = 0.01$.图 9 显示了最终优化构型,可以发现组件在设计域内形成了 3 个声通道,中间的声通道成左宽右窄状,上下两端各有一个不规则的狭窄声通道.其中,上下两端的声通道有利于声波向目标点 A 处聚集,能够在一定程度上提升声压级值;而中间的声通道形状比较复杂,对声波起到一定的反射和抑制作用,这一复杂的声腔结构能够有效地提高目标频带内声压级值的均匀性,有利于改善音质.图 10 为目标函数和体积约束的历史迭代过程,可以发现目标函数快速下降并在第 46 步后收敛.对最优构型进行有限元扫频计算,图 11 为纯空气设计和最优设计的声压级曲线,可以发现在 3 300~3 700 Hz 频带内,纯空气结构的声压级曲线出现了明显的波峰与波谷,声压级大小在 32.99 dB 至 77.88 dB 范围内(差值为 44.89 dB).而最优结构的声压级在 68.93 dB 至 75.42 dB 范围内(差值为 6.49 dB),声压级频响曲线更加平稳,音质得到了显著提升.另外,本算例中,200 迭代步只花费了 446 s,相比完全基于有限元与解析灵敏度的优化计算(41 个频点,200 迭代步花费 7 300 s),求解速度约为之前的 16.3 倍.对于三维声学器件模型,使用上述优化方法同样可以快速得到最优拓扑构型,并能够有效改善音质.三维算例的具体流程与二维情况相同,这里不再赘述.



图 9 最终优化构型

Fig. 9 The final optimized design

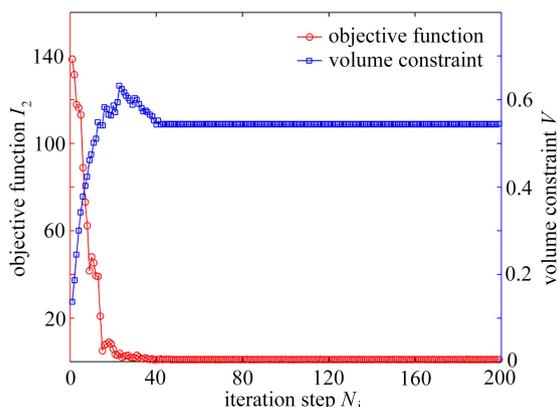


图 10 目标函数和约束函数的迭代历史

Fig. 10 The iterative histories of the objective function and the constraint function

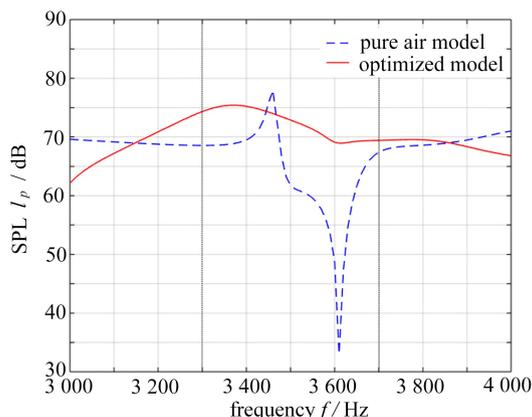


图 11 纯空气设计和最优设计的声压级曲线([3 000 Hz, 4 000 Hz])

Fig. 11 SPL curves of the pure air design and the optimized design ([3 000 Hz, 4 000 Hz])

4 结 论

本文针对音质优化问题,利用神经网络建立了声-结构系统的声频响预测模型,解决了由于结构设计参数、激励频率与声频响之间的非线性关系造成理论建模困难的问题.结合 MMC 显式拓扑优化方法的少量几何参数,极大地降低了神经网络模型的输入维度.利用 LHS 得到均匀分布的几何设计变量和激励频率,与有限元计算的声频响作为数据样本,通过训练得到了神经网络模型.数值算例验证了神经网络预测结构声频响的准确性,预测值和优化过程的真实值之间的吻合性很好.利用训练好的神经网络对声学结构进行音质优化,所得最优结构可以有效地将目标频带内的声压级范围差从 44.89 dB 缩小至 6.49 dB,声学器件音质改善明显.另外,在该方法下,目标函数可以快速收敛,相较于基于有限元与解析灵敏度的优化计算,求解速度约为之前的 16.3 倍,计算效率得到了大幅提升.

参考文献 (References):

- [1] BENDSOE M P, SIGMUND O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*[M]. Springer

- Berlin Heidelberg, 2003.
- [2] DILGEN C B, DILGEN S B, AAGE N, et al. Topology optimization of acoustic mechanical interaction problems: a comparative review[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, **60**(2): 779-801.
- [3] DESAI J, FAURE A, MICHAILIDIS G, et al. Topology optimization in acoustics and elasto-acoustics via a level-set method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **420**: 73-103.
- [4] YOON G H, JENSEN J S, SIGMUND O. Topology optimization of acoustic-structure interaction problems using a mixed finite element formulation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **70**(9): 1049-1075.
- [5] DU J B, OLHOFF N. Topological design of vibrating structures with respect to optimum sound pressure characteristics in a surrounding acoustic medium[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, **42**: 43-54.
- [6] LEE J, WANG S Y, DIKEC A. Topology optimization for the radiation and scattering of sound from thin-body using genetic algorithms[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **276**(3/5): 899-918.
- [7] HU J, YAO S, HUANG X D. Topology optimization of dynamic acoustic-mechanical structures using the ersatz material model[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **372**: 113387.
- [8] SHU L, WANG M Y, MA Z D. Level set based topology optimization of vibrating structures for coupled acoustic-structural dynamics[J]. *Computers & Structures*, 2014, **132**: 34-42.
- [9] DÜHRING M B, JENSEN J S, SIGMUND O. Acoustic design by topology optimization[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **317**(3/5): 557-575.
- [10] NIU B, OLHOFF N, LUND E, et al. Discrete material optimization of vibrating laminated composite plates for minimum sound radiation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(16): 2097-2114.
- [11] GUO X, ZHANG W S, ZHONG W L. Doing topology optimization explicitly and geometrically: a new moving morphable components based framework[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, **81**: 081009.
- [12] XIA B Z, YU D J, LIU J. Hybrid uncertain analysis for structural-acoustic problem with random and interval parameters[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(11): 2701-2720.
- [13] CHEN N, YU D J, XIA B Z, et al. Microstructural topology optimization of structural-acoustic coupled systems for minimizing sound pressure level[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, **56**: 1259-1270.
- [14] ZHANG W S, YUAN J, ZHANG J, et al. A new topology optimization approach based on moving morphable components (MMC) and the ersatz material model[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **53**: 1243-1260.
- [15] 王沐晨, 李立州, 张珺, 等. 基于卷积神经网络气动力降阶模型的翼型优化方法[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(1): 77-83. (WANG Muchen, LI Lizhou, ZHANG Jun, et al. An airfoil optimization method based on the convolutional neural network aerodynamic reduced order model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(1): 77-83. (in Chinese))
- [16] 姚明辉, 王兴志, 吴启亮, 等. 基于 RBF 神经网络的压气机叶片面压力场预测研究[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(10): 1187-1199. (YAO Minghui, WANG Xingzhi, WU Qiliang, et al. RBF neural network based prediction on blade surface pressure fields in compressors[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(10): 1187-1199. (in Chinese))
- [17] 王青山, 严波, 陈岩, 等. 基于降阶模型和数据驱动的动态结构数字孪生方法[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(7): 757-768. (WANG Qingshan, YAN Bo, CHEN Yan, et al. Digital twin method for dynamic structures based on reduced order models and data driving[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(7): 757-768. (in Chinese))