

理想 M-C 材料强度评估判据与等效塑性应变*

席丰¹, 李芳¹, 胡亚超²,
谭英华¹, 温新月¹

(1. 山东建筑大学 土木工程学院, 建筑结构加固改造与地下空间工程教育部重点实验室, 济南 250101;
2. 山东科技大学 土木工程与建筑学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 基于理想 Mohr-Coulomb (M-C) 屈服准则, 该文提出了拉伸、压缩和剪切等效应力的概念及其公式, 并给出了三个相应的强度评估条件。根据塑性功等效原则, 分别导出了与上述等效应力共轭的拉伸、压缩等效塑性应变和等效塑性剪应变, 探讨了不同的摩擦因数下等效应变的变化特征。与 Mises 等效应变不同, 所得到的 M-C 等效应变能够反映静水压力的影响, 也可退化为简单应力状态。这些等效应力和等效应变概念都具有明确的物理意义, 将能够应用于更准确、有效地评估拉、压性能不同材料的强度, 对于用简单拉伸、压缩或剪切试验标定复杂应力状态下本构模型参数也具有直接应用价值。

关键词: M-C 等效应力; M-C 等效塑性应变; 理想 Mohr-Coulomb 屈服准则; 强度评估判据
中图分类号: O344.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440345

Strength Evaluation Criteria and Equivalent Plastic Strain for Ideal M-C Materials

XI Feng¹, LI Fang¹, HU Yachao²,
TAN Yinghua¹, WEN Xinyue¹

(1. *School of Civil Engineering, Shandong Jianzhu University, Key Laboratory of Building Structural Retrofitting and Underground Space Engineering, Ministry of Education, Jinan 250101, P.R.China;*
2. *College of Civil Engineering and Architecture, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, P.R.China*)

Abstract: Based on the ideal Mohr Coulomb (M-C) yield criterion, the concepts and formulas of equivalent stresses in tension, compression, and shear, as well as the corresponding three strength evaluation conditions were presented. According to the equivalent principle of plastic work, the equivalent plastic strain and the equivalent plastic shear strain in tension and compression were derived, which are conjugated with the equivalent stress mentioned above. For different friction coefficients, the variation characteristics of these equivalent strains were discussed. Differing from the Mises equivalent strain, the M-C equivalent strain can reflect the influence of the hydrostatic pressure, and can also degenerate into a simple stress state. These concepts of equivalent stress and equivalent strain have clear physical meanings and can be applied to more accurately and effec-

* 收稿日期: 2023-12-04; 修订日期: 2024-03-16

基金项目: 山东省研究生教育优质课程建设项目 (SDYKC20158); 国家自然科学基金 (12172198)

作者简介: 席丰 (1962—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (通讯作者, E-mail: xifeng@sdjzu.edu.cn).

引用格式: 席丰, 李芳, 胡亚超, 谭英华, 温新月. 理想 M-C 材料强度评估判据与等效塑性应变 [J]. 应用数学和力学, 2024, 45(12): 1567-1576.

tively evaluate the strengths of materials with different tensile and compressive properties. They also have direct application values for calibrating constitutive model parameters under complex stress states through experiments under simple stress states.

Key words: M-C equivalent stress; M-C equivalent plastic strain; ideal M-C yield criterion; strength evaluation criterion

0 引言

等效应力与等效塑性应变是塑性理论中的重要概念^[1-2],其作用主要体现在多个方面,例如:材料的塑性强化或软化行为表征,其屈服面演化与以等效塑性应变作为内变量的塑性加载历史相关;材料的塑性流动法则,也与等效应力和等效塑性应变有关;作为特征量评估材料的强度和断裂失效行为;通过等效应力与等效塑性应变之间的关系,将复杂应力状态下材料的塑性和损伤行为与简单应力状态下的试验联系起来,检验所建立的理论并标定模型参数等.总之,等效应力与等效应变是表征材料屈服、硬化、损伤软化和断裂破坏整个塑性、断裂过程的重要物理量,准确理解才能有效地应用于结构非弹性行为数值分析.然而,一些文献和有限元程序中常有对这些概念误用的情形,例如:在考虑塑性体积可以改变的情况下,使用 Mises 等效塑性应变^[3],此时并不能退化为单向拉伸或压缩状态,所以失去了“等效”的物理意义;甚至在有限元计算中利用该等效应变分析材料的剪胀性,进而导致前后矛盾^[4].若等效应力依据材料的屈服条件定义,则被广泛应用的 Mises 等效应力就不能应用于依赖静水压力的材料塑性模型,也不能用于拉、压性能不同材料的强度评估;虽然可以将主应力作为评估指标,但对一些屈服或破坏条件并不是充分有效,甚至无法判断材料是否进入塑性.另一方面,缺乏这些相匹配的应力,也无法根据功共轭原则提出分别能够描述拉伸或压缩失效行为的等效塑性应变.

与经典的 Mises 和 Tresca 屈服条件^[1-2]不同,M-C 屈服准则一般用于与静水压力有关的岩土和脆性金属材料^[2,5].然而,实验结果也表明,延性材料在塑性变形较大时也会发生塑性体积变化^[6-7],静水压力和 Lode 角参数对材料屈服应力的影响并不可忽视^[8-9].尤其在评估损伤、断裂发生时也依赖当时的应力状态,与静水压力和偏应力大小、位置都有关系^[10-11],相应的失效判据常用作内变量的塑性等效应变或体积应变来描述^[12-15].实际上,在塑性 Poisson 比为常数的情况下,并不能实现塑性体积保持不变^[2].因此,依赖应力三轴度和 Lode 参数的 M-C 屈服准则现在已被推广应用于延性金属材料^[16-17].所以,基于 M-C 屈服准则的等效概念的探讨也具有重要意义.

还需指出:在目前广泛应用的有限元通用程序 ABAQUS 中采用混凝土损伤塑性本构模型(CDP)^[18-19],其中定义的等效塑性应变考虑了压缩和拉伸的不同情形,根据相应的累积主应变和应力加权系数确定,与 Mises 等效塑性应变并不相同.

综上所述,即使对于延性金属材料,变形较大时静水压力对屈服的影响也不可忽略.此时 Mises 等效应力及其应变概念失去“等效意义”,相应的 J_2 流动理论所依赖的单一曲线假定显然不再成立.如何确保计算结果准确、可靠;对于塑性体积可压缩材料(如混凝土)不适用 Mises 屈服准则,Mises 等效应力如何区分不同的拉压性能特征;对于塑性体积可压缩材料,Mises 等效塑性应变缺乏明确的物理意义,而最大累积正应变所需要的主方向不变条件在复杂载荷情形难以实现.

针对上述问题,本文基于 M-C 屈服准则建立相应的等效应力,并根据塑性功等效的原则,利用正交性流动法则,导出与相关等效应力共轭的塑性等效应变公式,从而尝试另外有效的表达途径.

1 关于等效应力与等效塑性应变的定义

1.1 等效概念

塑性理论给出了等效应力、等效剪应力以及相应的等效塑性应变、等效塑性剪应变的定义^[1],即

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S}, \bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{e}_p : \mathbf{e}_p, \\ T = \sqrt{\frac{1}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S}, \Gamma_p = \sqrt{2} \mathbf{e}_p : \mathbf{e}_p, \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{S} 为应力偏量张量; $\varepsilon_p, \mathbf{e}_p$ 分别为塑性应变张量及其偏量张量。

在简单应力状态, $\bar{\sigma} = \sigma_{11}, T = \tau$; 若再假定塑性体积不可压缩, 则有 $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_{11}^p, \Gamma_p = \gamma_p$. 即两类物理量都可退化为单向应力状态, 这也是“等效”概念的意义. 实际上, 这个等效应力是基于 Mises 屈服条件得到的, 所以称为 Mises 等效应力. 相应的等效塑性应变, 则是根据塑性应变能密度或单位体积的塑性功等效原则确定^[4]. 因此, 对于单向拉伸或纯剪切应力状态, 应分别满足下式:

$$\begin{cases} dW = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_p = \sigma_{11} d\varepsilon_{11}^p, \\ dW = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = T d\Gamma_p = \sigma_{13} d\gamma^p = 2\tau d\varepsilon_{13}^p. \end{cases} \quad (2)$$

设 $d\bar{\varepsilon}_p = C_\varepsilon \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}, d\Gamma_p = C_\gamma \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}$, 其中 C_ε 和 C_γ 分别为相应的等效塑性应变系数; 若塑性势函数为 G , 则根据正交性流动法则, $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, G(\boldsymbol{\sigma}) = f_0(\boldsymbol{\sigma}) = J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}$, 代入式(2), 可得到

$$C_\varepsilon = \frac{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{11}}}{\sqrt{\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, C_\gamma = \frac{2 \frac{\partial G}{\partial \sigma_{13}}}{\sqrt{\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}} = \sqrt{2}, \quad (3)$$

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p, d\Gamma_p = \sqrt{2} d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_p = \int d\bar{\varepsilon}_p, \Gamma_p = \int d\Gamma_p. \quad (5)$$

在假定塑性体积不可压条件下, 式(4)中的塑性应变张量可用其偏量表示, 如式(1), 即仅反映剪切变形. 由上述推导过程看出它与 Mises 等效应力的功共轭性, 本文称之为 Mises 等效应变和等效剪应变.

1.2 应力状态表征

首先列出推导过程及其导出式中所用到的应力张量不变量及其相关的计算公式^[20]:

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_1}{3} \mathbf{I}, J_1 = \text{tr}(\mathbf{S}) = 0, \\ J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2), J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}^3), \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 I_1 分别为应力张量及其第一不变量; $\mathbf{S}, J_1, J_2, J_3$ 为应力偏量张量及其三个不变量; \mathbf{I} 为二阶单位张量.

$$\begin{cases} q = \bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}, \gamma = \left(\frac{9}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/3} = 3(J_3/2)^{1/3}, \\ \sigma_m = \frac{1}{3} I_1, \eta = \frac{\sigma_m}{q}, \left(\frac{\gamma}{q} \right)^3 = \cos(3\theta), \end{cases} \quad (7)$$

其中, η 为应力三轴度, θ 为 Lode 角. 则在应力空间应力张量可用柱坐标 (σ_m, q, θ) 表示, 如图 1 所示.

若 σ_i 为三个主应力, 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则有^[21]

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_m + \frac{2}{3} q \cos \theta, \\ \sigma_3 = \sigma_m + \frac{2}{3} q \cos \left(\frac{4}{3} \pi - \theta \right). \end{cases} \quad (8)$$

另外, 所用到的一些导数公式为^[14]

$$\begin{cases} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}, \quad \frac{\partial q}{\partial J_2} = \frac{3}{2q}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{I}}{3q} - \frac{I_1}{2q^3} \mathbf{S}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{9}{2q^3 \sin(3\theta)} \left[\mathbf{S}^2 - \frac{\text{tr}(\mathbf{S}^2)}{3} \mathbf{I} - q \frac{\cos(3\theta)}{3} \mathbf{S} \right]. \end{cases} \quad (9)$$

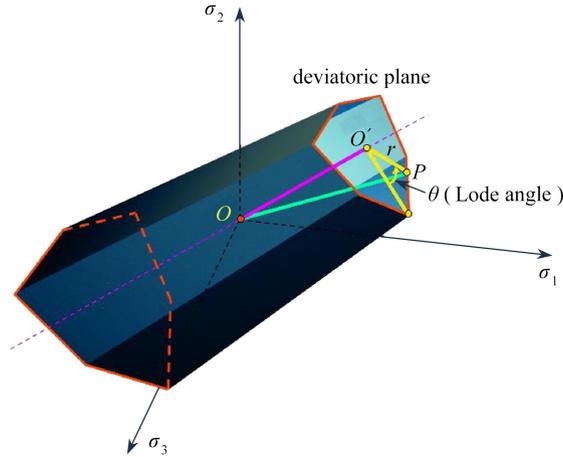


图1 主应力空间的 M-C 屈服面及应力状态表示

Fig. 1 The M-C yield surface and the representation of the stress state in the principal stress space

2 M-C 材料的等效力和等效剪应力

M-C 屈服准则为传统 Tresca 屈服准则的推广,用正应力和剪应力表示为^[1]

$$\tau_n + c_1 \sigma_n = c_2, \quad (10)$$

其中, $c_1 = \tan \varphi$, 为材料内摩擦因数, φ 为内摩擦角, c_2 为黏聚力。一般地,这两个参数都与塑性变形有关,在理想塑性情况下二者均为常数,其屈服面如图 1 所示。本文仅讨论理想塑性情形。

利用 Mohr 圆,式 (10) 可改写为下列形式^[17]:

$$(\sqrt{1+c_1^2}+c_1)\sigma_1 - (\sqrt{1+c_1^2}-c_1)\sigma_3 = 2c_2. \quad (11)$$

将式(8)代入式(11)后得到如下形式:

$$f = \left[c_1 \eta + \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] q - c_2 = f_0 - c_2 = 0. \quad (12)$$

当摩擦角为 0 时, $c_1 = 0$, 上式化为

$$f = \frac{q}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - c_2 = 0. \quad (13)$$

利用式(8),可化为 Tresca 屈服条件:

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c_2 = 0. \quad (14)$$

根据文献[4],可假设 $f_0(\sigma_{ij}) = A\sigma_e^n$, 其中 σ_e 为等效力, A 和 n 为待定参数,则式(12)为

$$\left[c_1 \eta + \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] q = A\sigma_e^n = c_2, \quad (15)$$

σ_e 可退化为不同的简单应力状态,因此也就有不同意义的等效力。

1) 拉伸等效力 σ_e'

$\sigma_{11} > 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{ij} = 0 (i \neq j), q = \sigma_{11}, \theta = 0, \eta = 1/3$, 代入式(15),则有

$$n = 1, A = \frac{c_1 + \sqrt{1+c_1^2}}{2}.$$

M-C 拉伸等效应力为

$$\sigma_e^t = \frac{2q}{c_1 + \sqrt{1+c_1^2}} \left[c_1 \eta + \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right]. \quad (16)$$

当 $c_1 = 0$ 时, $\sigma_e^t = \frac{2q}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \sigma_1 - \sigma_3$, 这是 Tresca 拉伸等效应力。

显然,当 $\eta < 1/3$ 时,式(3)—(8)不能退化为单向拉伸应力状态,因此,式(16)成立的必要条件应为 $\eta \geq 1/3$ 。

利用该等效应力和屈服条件(15),可评估材料是否发生塑性行为,即有如下判据:

$$\sigma_e^t \leq \frac{2c_2}{\sqrt{1+c_1^2} + c_1} = \sigma_s^t, \quad (17)$$

其中,等号成立时为塑性,否则为弹性, σ_s^t 为材料单向拉伸屈服强度。

式(16)表明 M-C 拉伸等效应力与摩擦因数 c_1 有关,也是三轴度和 Lode 角的函数,说明不同应力状态的影响,也反映了静水压力效应。这是假定塑性变形过程中 c_1 不变的结果。为此考察 c_1 的变化效应。对于几个给定的 $c_1 = 0, 0.2$ 等值, σ_e^t/q 随三轴度和 Lode 角变化的规律如图 2 所示。可以看出,当 $c_1 = 0$ 时, σ_e^t/q 与 η 无关,但关于 $\theta = \pi/6$ 对称,并在纯剪切时达到最大值。这实际上反映了 Tresca 和 Mises 屈服面的特征,即等截面六棱柱内接于等截面圆柱。当 $c_1 \neq 0$ 时, σ_e^t/q 随 η 单调增加,但 θ 的影响较小,关于 $\theta = \pi/6$ 对称性不再存在。

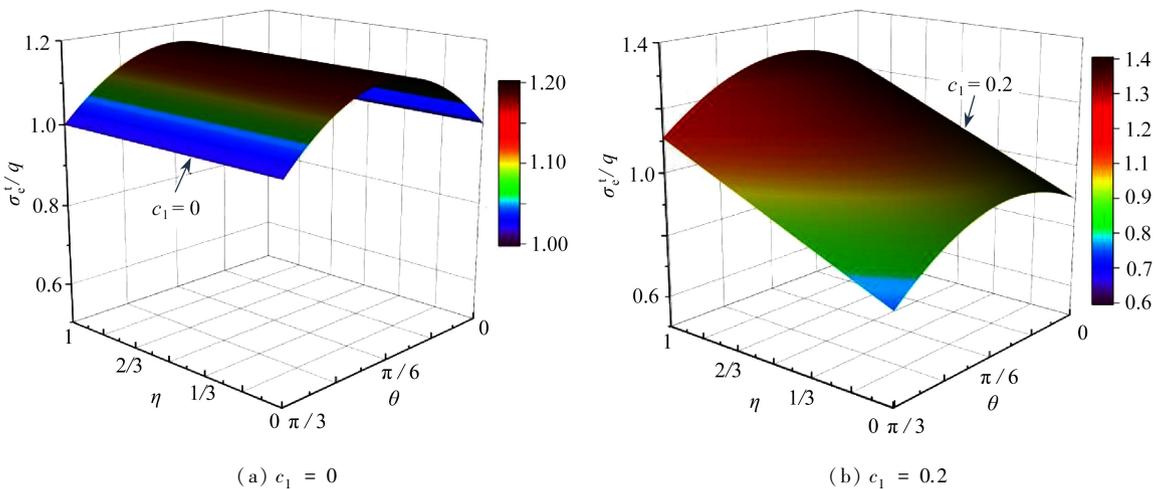


图 2 $\sigma_e^t/q-\eta-\theta$ 关系曲面

Fig. 2 Relationship surfaces of $\sigma_e^t/q-\eta-\theta$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

对于 $\theta = 0$ 的情形, σ_e^t/q 随三轴度和摩擦因数变化的曲面如图 3 所示。可以看出,除了 $c_1 = 0$ 的情形, $\sigma_e^t = q$; 当 $c_1 \neq 0$ 时,曲面变化特征是非常明显的。随着 c_1 增大,在 $\eta = 1$ 时 σ_e^t/q 也单调增大,而且在 $\theta = 0$ 的情形最明显;但在 $\eta = 0$ 时 σ_e^t/q 单调减小,即随着 η 减小, σ_e^t/q 也减小。

2) 压缩等效应力 σ_e^c

$\sigma_{33} < 0, \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{ij} = 0 (i \neq j), q = -\sigma_{33}, \theta = \pi/3, \eta = -1/3$, 代入式(15),并注意等效应力取正值,

则有 $n = 1, A = \frac{\sqrt{1+c_1^2} - c_1}{2}$. M-C 压缩等效应力为

$$\sigma_e^c = \frac{2q}{\sqrt{1+c_1^2} - c_1} \left[c_1 \eta + \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right]. \quad (18)$$

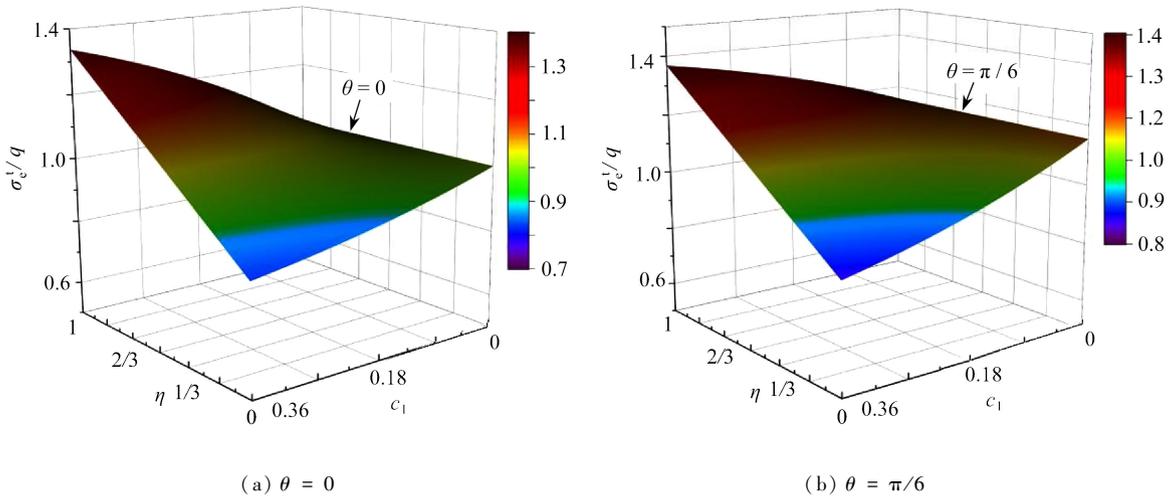


图3 $\sigma_e^l/q-\eta-c_1$ 关系曲面

Fig. 3 Relationship surfaces of $\sigma_e^l/q-\eta-c_1$

显然, 当 $\eta > -1/3$ 时, 式(18)不能退化为单向压缩应力状态, 因此, 式(18)成立的必要条件应为 $\eta \leq -1/3$.

当 $c_1 = 0$ 时, $\sigma_e^c = \frac{2q}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \sigma_1 - \sigma_3$, 这是 Tresca 压缩等效应力。

利用该等效应力和屈服条件(15), 可得到评估材料是否发生塑性行为的如下判据:

$$\sigma_e^c \leq \frac{2c_2}{\sqrt{1 + c_1^2} - c_1} = \sigma_s^c, \tag{19}$$

其中, σ_s^c 为单向压缩屈服应力。

由式(16)和(18), 二者比值为 $\frac{\sigma_e^l}{\sigma_e^c} = \frac{\sqrt{1 + c_1^2} - c_1}{\sqrt{1 + c_1^2} + c_1}$, 其变化曲线如图4所示。

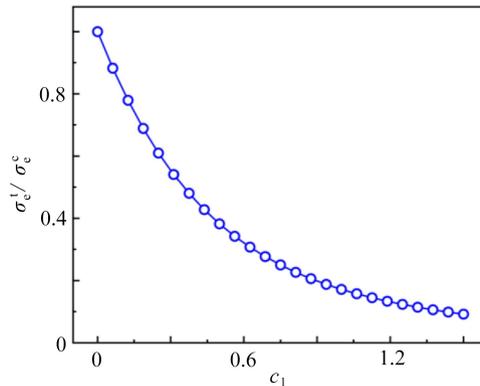


图4 $\sigma_e^l/\sigma_e^c-c_1$ 关系曲线

Fig. 4 The relationship curve of $\sigma_e^l/\sigma_e^c-c_1$

从图4可以看出: 该比值随摩擦因数增大而单调下降. 显然, 对于拉伸性能比压缩性能差的材料, 所定义的两个等效应力能够用于对拉伸强度和压缩强度的准确评估。

3) 等效剪应力 σ_e^s

纯剪切应力状态: $\sigma_{13} = \tau$, 其他 $\sigma_{ij} = 0, T = \tau, \theta = \pi/6, \eta = 0$, 代入式(15), 则有 $A = \sqrt{1 + c_1^2}$.

M-C 等效剪应力为

$$\sigma_e^s = \frac{\sqrt{3}T}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[c_1\eta + \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right]. \quad (20)$$

显然,当 $\eta \leq -1/3$ 或 $\eta \geq 1/3$ 时,式(20)不能退化为纯剪切应力状态,因此,式(20)成立的条件应为 $-1/3 < \eta < 1/3$.当 $c_1 = 0$ 时, $\sigma_e = T \cos(\pi/6 - \theta) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$,这是 Tresca 等效剪应力.

同样地,利用这一 M-C 等效剪应力和屈服条件(15),也可得到评估材料发生塑性行为的如下判据:

$$\sigma_e^s \leq \frac{c_2}{\sqrt{1+c_1^2}} = \tau_s, \quad (21)$$

其中, τ_s 为纯剪切屈服应力.

至此,得到了 M-C 材料与各自简单应力状态相应的等效应力,可以看出它们各不相同,也不同于 Mises 等效应力和等效剪应力,可以反映静水压力、应力偏量方位角和摩擦角的影响.

3 M-C 等效塑性应变

基于所得到的等效应力,利用塑性功等效原则,可求出共轭的等效塑性应变,即可退化为相应简单应力状态试验的拉伸、压缩和剪切等效塑性应变等.

1) M-C 拉伸等效塑性应变

根据塑性功等效原则,有

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}^p = \sigma_e^t d\bar{\epsilon}_t^p = \sigma_{11} d\epsilon_{11}^p. \quad (22)$$

设 $d\bar{\epsilon}_t^p = C_\epsilon^t \sqrt{d\boldsymbol{\epsilon}^p : d\boldsymbol{\epsilon}^p}$,代入式(22)并利用与屈服条件(12)相关联的流动法则,有

$$C_\epsilon^t = \frac{\frac{\partial f_0}{\partial \sigma_{11}}}{\sqrt{\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = & c_1 \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} q + \frac{3}{2q} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left[c_1 \eta + \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] + \\ & q \sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{c_1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \end{aligned} \quad (24)$$

利用式(9),则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = & \frac{3}{2q} \left[\sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] \mathbf{S} + \\ & \frac{3}{2q^2 \sin(3\theta)} \left[\sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - \frac{c_1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] \times \\ & [\text{tr}(\mathbf{S}^2) \mathbf{I} + q \cos(3\theta) \mathbf{S} - 3\mathbf{S}^2] + \frac{c_1}{3} \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = & \frac{3S_{11}}{2q} \left[\sqrt{\frac{1+c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \frac{c_1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] + \\ & \frac{3}{q^2 \sin(3\theta)} \left[\sqrt{\frac{1+c_1^2}{12}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - \frac{c_1}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] \times \\ & [\text{tr}(\mathbf{S}^2) \sigma_{11} + q \cos(3\theta) S_{11} - 3S_{1i} S_{i1}] + \frac{c_1}{3} \sigma_{11}. \end{aligned} \quad (26)$$

将式(25)、(26)代入式(23),且单轴拉伸时: $\theta = 0$, $\sigma_{11} \neq 0$,其余 $\sigma_{ij} = 0$, $S_{11} = 2/3\sigma_{11}$, $S_{22} = S_{33} = -\sigma_{11}/3$, $S_{ij} = 0 (i \neq j)$, $q = \sigma_{11} = \sigma_e$,则得到

$$C_{\varepsilon}^t = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{1+c_1^2}+c_1)}{\sqrt{1+2c_1^2+\frac{2}{3}c_1\sqrt{1+c_1^2}}}. \quad (27)$$

所以, M-C 拉伸等效塑性应变为

$$d\bar{\varepsilon}_t^p = \frac{\sqrt{1+c_1^2}+c_1}{\sqrt{1+2c_1^2+\frac{2}{3}c_1\sqrt{1+c_1^2}}} \sqrt{\frac{2}{3} d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}. \quad (28)$$

显然, 该式包含塑性应变张量的球量和偏量, 即存在体积应变和剪切应变, 也反应了摩擦角效应. 结合式(22), 方程两端都包含体积塑性功和剪切塑性功, 并与单向拉伸应力状态的塑性功相同, 因此可称为与前面定义的 σ_e^t 功共轭的拉伸等效塑性应变. 当 $c_1=0$ 时, 式(28)退化为 $d\bar{\varepsilon}_t^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}$, 即 Mises 等效塑性应变增量; 此时式(22)左端不包含体积塑性功, 这正是塑性体积不变性假定的结果.

2) M-C 压缩等效塑性应变

设 $d\bar{\varepsilon}_c^p = C_{\varepsilon}^c \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}$, 由塑性功等效原则, 有

$$C_{\varepsilon}^c = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}}. \quad (29)$$

单轴压缩时: $\sigma_{33} < 0$, 其余 $\sigma_{ij} = 0$, $S_{33} = \frac{2}{3} \sigma_{33}$, $S_{11} = S_{22} = -\frac{1}{3} \sigma_{33}$, $S_{ij} = 0 (i \neq j)$, $\theta = \pi/3$, $q = -\sigma_{33} = -\sigma_e$. 同样利用屈服条件(12)计算, 可得到

$$C_{\varepsilon}^c = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{1+c_1^2}-c_1}{\sqrt{1+2c_1^2-\frac{2}{3}c_1\sqrt{1+c_1^2}}}. \quad (30)$$

所以, M-C 压缩等效塑性应变为

$$d\bar{\varepsilon}_c^p = \frac{\sqrt{1+c_1^2}-c_1}{\sqrt{1+2c_1^2-\frac{2}{3}c_1\sqrt{1+c_1^2}}} \sqrt{\frac{2}{3} d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}. \quad (31)$$

该式包含体积应变和剪切应变, 也反应了摩擦角效应, 且与 σ_e^c 共轭.

当 $c_1 = 0$ 时, 可退化为 Mises 等效塑性应变.

3) M-C 剪切等效塑性应变

根据塑性功等效原则, 有

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_e^s d\bar{\varepsilon}_s^p = \tau dy^p = 2\tau d\varepsilon_{13}^p, \quad (32)$$

其中, σ_e^s 为 M-C 等效剪应力, 如式(20), 可退化为 $\sigma_{13} = \tau$.

设 $d\bar{\varepsilon}_p = C_{\gamma} \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}$, 代入式(33), 有

$$C_{\gamma} = \frac{2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}}. \quad (33)$$

纯剪切时: $\sigma_{13} = \tau$, 其余 $\sigma_{ij} = S_{ij} = 0$, $\eta = 0$, $\theta = \pi/6$, $q = \sqrt{3}\tau$. 同样利用屈服条件(12)计算, 可得到

$$C_\gamma = \sqrt{\frac{2(1+c_1^2)}{1+2c_1^2}}. \quad (34)$$

所以, M-C 等效塑性剪应变为

$$d\bar{\epsilon}_s^p = \sqrt{\frac{1+c_1^2}{1+2c_1^2}} \sqrt{2d\epsilon^p : d\epsilon^p}. \quad (35)$$

显然, 该式也包含塑性体积变形量, 而且与 σ_e^s 共轭. 当 $c_1 = 0$ 时, $d\bar{\epsilon}_p = \sqrt{2d\epsilon^p : d\epsilon^p}$, 为 Mises 等效塑性剪应变 Γ_p .

与 M-C 准则相应的三个等效塑性应变系数随摩擦因数 c_1 的变化如图 5 所示. 等效拉伸应变大于 Mises 等效应变, 等效压缩应变和剪切应变则分别小于相应的 Mises 应变, 相应的差别随 c_1 增大而增加.

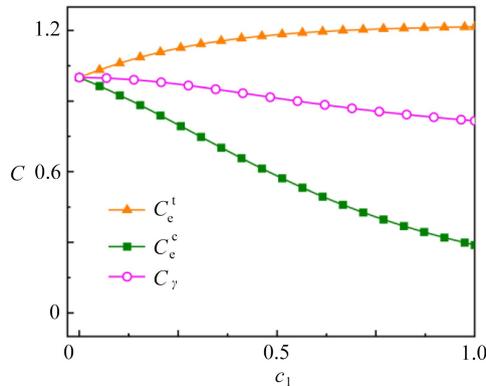


图 5 M-C 等效塑性应变系数随 c_1 的变化曲线

Fig. 5 Variations of the M-C equivalent plastic strain factor with c_1

4 结 论

本文针对理想塑性的 M-C 材料, 考虑其拉、压性能不同, 给出了能够分别退化为简单应力状态的拉伸、压缩和剪切等效应力以及相应的屈服判据; 根据塑性功等效原则, 推导出了 M-C 材料与等效应力、等效剪应力共轭的等效塑性应变公式, 这些应变不但具有明确的物理意义, 还能够退化为单轴情形. 显然, 数值计算中, 利用这些不同的等效应力概念, 才能够准确反映结构响应过程材料不同类型的强度变化; 利用这些不同的等效应变概念, 才能有效评估材料和结构的失效行为, 所得到的几点结论如下:

1) 静水压力影响材料屈服时, Mises 等效应力和等效塑性应变都不可用; M-C 等效应力反映静水压力效应, M-C 等效塑性应变则包含塑性体积变形量, 二者都与内摩擦因数 c_1 有关; 当 $c_1 = 0$ 时, 可分别退化为 Mises 等效应力和等效塑性应变.

2) 随着内摩擦因数 c_1 增大, M-C 拉伸等效塑性应变系数增大, 压缩和剪切等效塑性应变系数均单调减小, 而 M-C 拉伸等效应力与压缩等效应力的比值单调下降.

3) 三种 M-C 等效应力、等效塑性应变都可退化为简单应力状态情形, 这一特征对于用单向拉伸、压缩或剪切试验标定复杂应力状态下的本构模型参数具有直接应用价值.

4) 对于理想 M-C 材料, 根据三个不同的应力三轴度区域, 给出了材料屈服的三个判据, 即

$$\sigma_e^t \leq \frac{2c_2}{\sqrt{1+c_1^2}+c_1} = \sigma_s^t, \quad \sigma_e^c \leq \frac{2c_2}{\sqrt{1+c_1^2}-c_1} = \sigma_s^c, \quad \sigma_e^s \leq \frac{c_2}{\sqrt{1+c_1^2}} = \tau_s,$$

其中任何一式等号成立时即为塑性, 所有“<”号成立时才为弹性. 利用这几个判据可以通过数值结果的应力云图对拉压性能不同的材料进行直观、准确的强度评估.

总之, 本文定义的 M-C 等效应力反映静水压力的影响, 而共轭的等效应变则包含体积应变和塑性应变, 以此为基础所建立的流动法则及其由 M-C 等效应力与 M-C 等效塑性应变关系曲线表达的强化法则所构成

的本构模型将具有体量与偏量耦合的特征,这也是目前本领域的研究前沿,后文将给出相应的结果。

参考文献(References):

- [1] 王仁,熊祝华,黄文彬. 塑性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1982.(WANG Ren, XIONG Zhuhua, HAUNG Wenbin. *Fundamentals of Plastic Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 1982.(in Chinese))
- [2] 周喆,秦伶俐,黄文彬,等. 有限变形下的等效应力和等效应变问题[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(5): 542-550.(ZHOU Zhe, QIN Lingli, HUANG Wenbin, et al. Effective stress and strain in finite deformation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(5): 542-550.(in Chinese))
- [3] VERSHININ V V. A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, **126**: 150-162.
- [4] POURHOSSEINI O, SHABANIMASHCOOL M. Development of an elasto-plastic constitutive model for intact rocks[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2014, **66**: 1-12.
- [5] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993.(ZHANG Xueyan. *Geotechnics Plastic Mechanics* [M]. Beijing: China Communications Press, 1993.(in Chinese))
- [6] BRIDGMAN P W. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture: With Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure*[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1964.
- [7] ALGARNI M, GHAZALI S, ZAWAWI M. The emerging of stress triaxiality and Lode angle in both solid and damage mechanics: a review[J]. *Mechanics of Solids*, 2021, **56**(5): 787-806.
- [8] STOUGHTON T B, YOON J W. A pressure-sensitive yield criterion under a non-associated flow rule for sheet metal forming[J]. *International Journal of Plasticity*, 2004, **20**(4/5): 705-731.
- [9] ARETZ H. A consistent plasticity theory of incompressible and hydrostatic pressure sensitive metals[J]. *Mechanics Research Communications*, 2007, **34**(4): 344-351.
- [10] BAI Y, WIERZBICKI T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence[J]. *International Journal of Plasticity*, 2008, **24**(6): 1071-1096.
- [11] JOHNSON G R, COOK W H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, **21**(1): 31-48.
- [12] HAN Peihua, CHENG Peng, YUAN Shuai, et al. Characterization of ductile fracture criterion for API X80 pipeline steel based on a phenomenological approach[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, **164**: 107254.
- [13] VERSHININ V V. Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, **67/68**: 127-138.
- [14] PAREDES M, WIERZBICKI T. On mechanical response of zircaloy-4 under a wider range of stress states: from uniaxial tension to uniaxial compression[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, **206**: 198-223.
- [15] BAI Yuanli, WIERZBICKI T. Application of extended Mohr-Coulomb criterion to ductile fracture[J]. *International Journal of Fracture*, 2010, **161**(1): 1-20.
- [16] DA SILVA SANTOS I, SARZOSA D F B, PAREDES M. Ductile fracture modeling using the modified Mohr-Coulomb model coupled with a softening law for an ASTM A285 steel[J]. *Thin-Walled Structures*, 2022, **176**: 109341.
- [17] GRANUM H, MORIN D, BØRVIK T, et al. Calibration of the modified Mohr-Coulomb fracture model by use of localization analyses for three tempers of an AA6016 aluminium alloy[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, **192**: 106122.
- [18] ABAQUS Inc. ABAQUS Analysis User's Manual v[Z]. 2023.
- [19] LI X X. Parametric study on numerical simulation of missile punching test using concrete damaged plasticity (CDP) model[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2020, **144**: 103652.
- [20] CHEN W F. *Constitutive Equations for Engineering Materials: Plasticity and Modeling*[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1994.
- [21] 赵亚溥. 近代连续介质力学[M]. 北京: 科学出版社, 2016.(ZHAO Yapu. *Modern Continuum Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2016.(in Chinese))