

高阶等参元在薄膜结构自由振动中的应用*

乔海青¹, 鲍四元¹, 邓子辰², 王博²

(1. 苏州科技大学 土木工程学院, 江苏 苏州 215011;
2. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(我刊编委邓子辰来稿)

摘要: 薄膜结构是工程中广泛应用的结构之一,其自振特性的理论解与三角函数族有关,采用常规低阶单元分析时,有限元解精度不高.虽然 h 型有限元法将结构的网格细化后可提高有限元解的精度,但是其前处理相对困难,如果细化网格时出现畸变网格,那么有限元解的精度可能降低.基于 p 型有限元法构造两种用于研究薄膜结构自由振动特性的四边形高阶等参元,即节点数为 16 的 Q16 等参元和节点数为 13 的 Q13 等参元.不同形状和不同边界条件的薄膜结构算例表明,所提单元较常规低阶等参元有较快的收敛速率和较高的精度及计算效率.

关键词: 薄膜自由振动; p 型有限元; 自振特性

中图分类号: O327 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450025

Application of High-Order Isoparametric Elements in Free Vibration of Membrane Structures

QIAO Haiqing¹, BAO Siyuan¹, DENG Zichen², WANG Bo²

(1. *School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215011, P.R.China;*

2. *School of Mechanics and Civil Engineering, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, P.R.China)*

(Contributed by DENG Zichen, M.AMM Editorial Board)

Abstract: The membrane is one of the most widely used structures in engineering. Because the theoretical solution of the structure's natural vibration characteristics is related to the trigonometric function family, the accuracy of the finite element solution is not very high by the conventional low-order element analysis. Although the h -type finite element method can improve the accuracy of the finite element solution with refined meshing of the structure, the corresponding pre-processing is relatively difficult, and the accuracy of the finite element solution may be reduced if the refined mesh is distorted. Based on the p -type finite element method, 2 quadrilateral high order isoparametric elements, i.e., isoparametric element Q16 with 16 nodes and isoparametric element Q13 with 13 nodes, were constructed to study the free vibration characteristics of membranes. Examples of membranes with different shapes and different boundary conditions show that, the proposed elements have fas-

* 收稿日期: 2024-01-31; 修订日期: 2024-04-29

基金项目: 国家自然科学基金(12172282);中央高校基本科研业务费

作者简介: 乔海青(1999—),男,硕士生(E-mail: 2640403550@qq.com);

鲍四元(1980—),男,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: bsiyuan@126.com).

引用格式: 乔海青, 鲍四元, 邓子辰, 王博. 阶等参元在薄膜结构自由振动中的应用[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(2): 187-198.

ter convergence rates, higher computational accuracies and efficiencies than conventional low-order isoparametric elements.

Key words: membrane free vibration; p -type finite element; vibration characteristic

0 引言

薄膜结构是一种在很多领域广泛应用的柔性结构,如在声学控制领域内基于共振原理制造吸收低频噪声的零件;在建筑领域应用于工厂、交通和商业设施等;在航空航天领域内,薄膜结构因其具有面积大、质量轻、易于收展等优点,在航天任务中具有广阔的应用前景.为了使动力设计更为合理,准确地分析薄膜结构的自振特性十分必要,例如避免结构出现共振现象.在这之前,学者们已应用不同方法研究了薄膜结构的自振特性.林文静等^[1-2]分别基于有限元法和解析法研究了不同形状薄膜结构的自由振动频率.Wu等^[3]提出了高阶质量矩阵的无网格方案,并应用于杆结构和薄膜结构的振动分析.Liu等^[4]结合了2D无限元法和有限元法分析了多孔薄膜结构.袁驷等^[5]提出了二维自由振动问题的自适应有限元分析法.孙浩涵等^[6]对于膜自由振动问题建立了频率和模态同时进行误差控制的自适应有限元法.Houmat^[7]基于含三角函数的 p 型有限元法分析了薄膜结构的自振特性.在研究膜振动问题的四边形单元时,Milsted等^[8]基于四项的多项式和若干项三角函数项构造位移场,得到高精度单元,其中三角函数项可根据精度需要调节为任意多个.为了充分利用网格最外层单元节点以提高计算效率,Liu等^[9]将无限元法和有限元法结合用于薄膜结构的自振特性分析.另外,基于微分求积法和有限元结合的方法,Fantuzzi等^[10]分析了不同形状和不同密度薄膜结构的自振特性.

基于有限元法分析薄膜结构时,常规位移等参元一般采用低阶多项式插值.为了得到满足精度要求的结果,需通过加密网格来实现,即应用 h 型有限元.由于 h 型有限元法涉及重划网格等问题,造成其前处理过程困难.此外,基于低阶等参元分析复杂薄膜结构时,得到的有限元解易受单元形状的影响.相对而言, p 型有限元法中的高阶等参元有更快的收敛速度和更高的计算精度,在适当网格条件下甚至能达到指数级收敛速度.与低阶等参元相比,虽然 p 型高阶等参元的单元刚度(或质量)矩阵阶次高,元素在对应的整体组装矩阵中分布程度密集,但是由于其网格较简单,从而整体刚度矩阵的规模较小,总体上可大大节省求解的计算时间.

p 型有限元法中等参元^[11-12]的插值多项式阶次较常规等参元有所提高,这使得其高阶等参元表现出较高的精度、较快的收敛速率和一定的抗畸变性能.近年来,叶康生等^[13]基于 p 型有限元法提出了Poisson方程的超收敛求解算法,该方法使该问题计算结果的精度和收敛速度的阶次有所提高.章敏等^[14]基于 h - p 型有限元法分析了L型钢板的受力特性.陆阳春等^[15]基于 p 型有限元法分析了断裂力学领域中的计算复合型应力强度因子,数值结果表现出较高精度及数值稳定性.陈峻等^[16]则基于 p 型有限元法分析了水工平面钢闸门的局部屈曲特性.李文武等^[17]基于比例边界有限元法分析了复合梁的自由振动频率,所构造的单元也属于 p 型单元.以上研究说明 p 型有限元法在分析问题时有较大的优势.

另外,Zienkiewicz等^[18]提出的升阶谱有限元实际上属于 p 型有限元,Bardell^[19]对升阶谱有限元法存在的数值问题做了进一步的研究.郭茂等^[20]基于微分求积升阶谱方法的基本思想构造了金字塔域内的微分求积升阶谱单元,所提的高阶金字塔单元具有高效率 and 网格划分简单的特性.相关研究说明从升阶谱有限元角度构造的 p 型有限元具有高效性.

本文基于 p 型有限元法分别构造了高阶等参元Q16和Q13,分析了薄膜结构的自由振动问题,研究了所提高阶等参元的计算精度、收敛速率等,并与低阶等参元做对比.本文具体安排如下:首先基于 p 型有限元法构造了16节点和13节点四边形等参元;然后给出薄膜自由振动问题应用Q16和Q13单元的求解理论;最后通过算例测试Q16和Q13单元的计算精度、收敛速率和计算效率.

1 单元的位移场模式

本节介绍两种四边形高阶等参元,其总节点数分别为16和13,并记为Q16单元和Q13单元.首先,基于

p 型有限元法思想建立 Q16 等参单元,其映射关系见图 1(a),除 4 个角点外,每边有 2 个节点,其内部还有 4 个节点.在等参元的等参坐标系下,假设 Q16 单元在与 xOy 面垂直方向上的位移场为

$$w = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\eta\xi + a_4\eta^2 + a_5\xi^2 + a_6\eta^2\xi + a_7\eta\xi^2 + a_8\eta^3 + a_9\xi^3 + a_{10}\eta\xi^3 + a_{11}\eta^3\xi + a_{12}\eta^2\xi^2 + a_{13}\eta^3\xi^2 + a_{14}\eta^2\xi^3 + a_{15}\eta^3\xi^3, \quad (1)$$

其中,等参坐标 ξ, η 的范围是 $[-1, 1]$.按照有限元法的一般步骤,即将单元节点的等参坐标和节点对应的位移代入式(1),解出系数 $a_i (i = 0, 1, \dots, 15)$ 后得单元形函数的表达式.具体分组如下:

单元中角节点号记为 1,2,3 和 4,其对应的形函数分别为

$$\begin{cases} N_{1,2} = \frac{1}{256}(\pm\xi - 1)(9\xi^2 - 1)(\eta - 1)(9\eta^2 - 1), \\ N_{3,4} = \frac{1}{256}(\pm\xi + 1)(9\xi^2 - 1)(\eta + 1)(9\eta^2 - 1), \end{cases} \quad (2)$$

单元边上各点的编号为 5,6, ..., 12,其对应的形函数中 $N_{5,6}$ 为

$$N_{5,6} = -\frac{9}{256}(\xi^2 - 1)(\pm 3\xi - 1)(\eta - 1)(9\eta^2 - 1), \quad (3)$$

其他形函数 N_7, \dots, N_{12} 形式类似,限于篇幅这里略去.

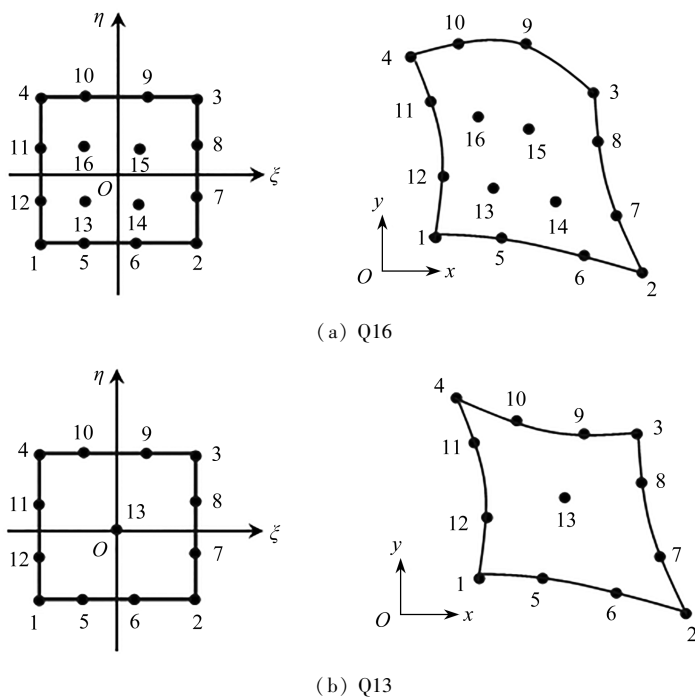


图 1 单元的映射关系

Fig. 1 Mapping relationships of the elements

单元内部节点号为 13,14,15 和 16,其对应的形函数分别为

$$\begin{cases} N_{13,14} = \frac{81}{256}(\xi^2 - 1)(\pm 3\xi - 1)(\eta^2 - 1)(3\eta - 1), \\ N_{15,16} = \frac{81}{256}(\xi^2 - 1)(\pm 3\xi + 1)(\eta^2 - 1)(3\eta + 1), \end{cases} \quad (4)$$

同理,Q16 单元对应的坐标映射关系为

$$x = \sum_{i=1}^{16} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{16} N_i y_i, \quad (5)$$

其中, (x_i, y_i) 是单元插值点的物理坐标.

为了减少总节点个数,将 Q16 单元的内部节点个数改为 1 个,构造节点数为 13 的四边形等参元,记为 Q13 单元,如图 1(b) 所示.除映射矩形单元的 4 个角点外,每边有 2 个边上节点,而其内部节点设置在单元中心处.Q13 单元中假设垂直 xOy 面方向的位移场为

$$w = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\eta\xi + a_4\eta^2 + a_5\xi^2 + a_6\eta^2\xi + a_7\eta\xi^2 + a_8\eta^3 + a_9\xi^3 + a_{10}\eta\xi^3 + a_{11}\eta^3\xi + a_{12}\eta^2\xi^2. \quad (6)$$

按照有限元法分析的一般步骤,可求出 Q13 单元的形函数.其形函数形式如下:

单元角点对应的形函数为

$$\begin{cases} N_{1,2} = \frac{1}{32}(\pm\xi - 1)(\eta - 1)(9\eta^2 \pm 10\xi\eta + 10\xi + 9\xi^2 \pm 10\xi), \\ N_{3,4} = \frac{1}{32}(\pm\xi + 1)(\eta + 1)(9\eta^2 \pm 10\xi\eta - 10\xi + 9\xi^2 \mp 10\xi), \end{cases} \quad (7)$$

单元边上各点对应的形函数为

$$\begin{cases} N_{5,6} = -\frac{9}{32}(\xi - 1)(\xi + 1)(\eta - 1)(\eta \pm 3\xi), \\ N_{7,8} = \frac{9}{32}(\eta - 1)(\eta + 1)(\xi + 1)(\pm 3\eta - \xi), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} N_{9,10} = -\frac{9}{32}(\xi - 1)(\xi + 1)(\eta + 1)(\eta \pm 3\xi), \\ N_{11,12} = \frac{9}{32}(\eta - 1)(\eta + 1)(\xi - 1)(\pm 3\eta - \xi), \end{cases} \quad (9)$$

单元内部点对应的形函数为

$$N_{13} = (\xi - 1)(\xi + 1)(\eta + 1)(\eta - 1). \quad (10)$$

同理, Q13 单元坐标的映射关系为

$$x = \sum_{i=1}^{13} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{13} N_i y_i, \quad (11)$$

其中, (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 13$) 是单元插值点的物理坐标.

2 薄膜自由振动的求解理论

薄膜结构是一类不可抗弯曲变形和剪切变形的平面薄片,完全依靠薄膜张力来承受横向荷载.在建立力学模型时,假设薄膜是一个完全柔性的等厚度薄片,在任何方向受均匀拉力.薄膜结构的振动控制方程为

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

这里 T 是单位长度的张力 (kN/m), ρ 是单位面积的质量 (kg/m^2), w 是面外位移 (或称为竖向位移).

结构自由振动分析时,将薄膜区域空间离散,且假设为简谐振动模式,对应的单元位移表达式为

$$\begin{cases} w(x, y, t) = w(x, y) e^{j\omega t}, \\ w(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \bar{\mathbf{w}}, \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\bar{\mathbf{w}}$ 是插值点的位移幅值列向量, $\bar{\mathbf{w}} = [w_1 \quad \dots \quad w_r]^T$, 插值函数向量 $\mathbf{N} = [N_1 \quad \dots \quad N_r]$ (对于 Q16 单元 $r = 16$, 而 Q13 单元时, $r = 13$), ω 是固有频率, $j = \sqrt{-1}$. 膜结构的势能泛函为

$$\Pi = \frac{T}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{\rho}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (14)$$

将式 (13) 代入式 (14), 并对 $\bar{\mathbf{w}}$ 取变分可得

$$\iint_A T \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) \bar{\mathbf{w}} dA - \omega^2 \iint_A \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}} dA = 0. \quad (15)$$

单元的刚度矩阵和质量矩阵形式分别为

$$\mathbf{K} = \iint_A T \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) dA, \quad (16)$$

$$\mathbf{M} = \iint_A \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA. \quad (17)$$

综合式(15)—(17)得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

考虑物理坐标和等参坐标的偏导映射关系,结合式(16)得刚度矩阵如下:

$$\mathbf{K} = \iint_A \frac{T}{|\mathbf{J}|} (\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{C}) d\xi d\eta, \quad (19)$$

并记 $\mathbf{K} = T\mathbf{K}^e$, 其中 \mathbf{J} 是 Jacobi 矩阵, 矩阵 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 的形式分别为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

由式(17)得等参坐标下的质量矩阵为

$$\mathbf{M} = \iint_A \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (22)$$

并记 $\mathbf{M} = \rho \mathbf{M}^e$. 为便于表示和标准化分析, 引入无量纲 λ 和 Ω , λ 称为特征值, Ω 称为自振频率参数, 且存在

关系 $\lambda = \Omega^2$, $\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho}{T}}$; 式(18)转化为如下形式:

$$(\mathbf{K}^e - \Omega^2 \mathbf{M}^e) \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

对于原结构组装的结构, 其总体刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}$ 和总体质量矩阵 $\bar{\mathbf{M}}$ 满足

$$(\bar{\mathbf{K}} - \Omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

其中, \mathbf{w} 是所有节点位移组成的列向量. 求解对应的广义特征值问题后可得结构的自振频率, 将特征向量代入式(13)可得对应的位移, 即结构振型.

在求解单元刚度矩阵和质量矩阵过程中采用 Gauss 积分方法. 一般地, n 个 Gauss 积分点可达 $2n-1$ 次多项式精度. 为满足积分精度的要求, 当网格划分均为矩形时, 使用 Q16 和 Q13 时单元矩阵的数值积分均取 4×4 个 Gauss 积分点; 而当网格出现角度畸变和曲边畸变时, 单元 Jacobi 矩阵行列式不为常数, 使用 Q16 和 Q13 时单元矩阵的数值积分建议均采用 5×5 个 Gauss 积分点计算, 为了统一, 本文所有算例均采用 5×5 个 Gauss 积分点策略. 此外, 算例中提及的 Q4 (Lagrange 型单元)、Q8 (serendipity 型单元) 和 Q9 (Lagrange 型单元) 等参元是经典有限元法中常用的单元. 全文算例结果除标注引用外, 其他结果均为自行编程得到. 与 Q4、Q8 和 Q9 单元相关的计算结果也是自行编程得到, 其中 Q4、Q8 和 Q9 单元中的积分策略分别采用 2×2 、 3×3 和 3×3 个 Gauss 积分点.

3 算例

3.1 矩形薄膜

图 2 所示是三边固定一边自由的方膜结构, 该薄膜结构的厚度为 1 mm, 薄膜单位面积的质量是 $\rho = 2.7$

kg/m^2 , 单位长度张力为 $T = 1 \text{ kN/m}$. 表 1 列出该结构的前 10 阶自振频率结果. 该问题自振频率的理论解公式^[21]为

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{2m-1}{2L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

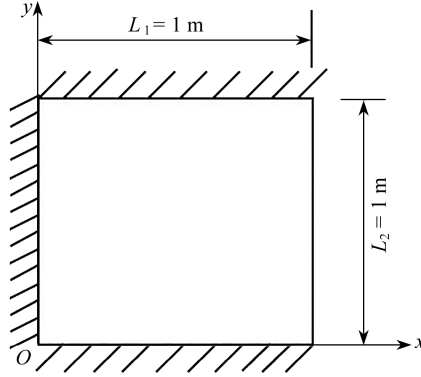


图 2 三边固定一边自由的方膜

Fig. 2 A square membrane with 3 fixed sides and 1 free

结构网格划分时 x 和 y 方向均等分为若干段, 具体分别有划分为 4, 16, 100 和 900 个单元网格的情况, 另有沿中线对称分为 2 个单元的简单网格情况. 基于所提 Q13 单元, 方膜自振频率的计算结果见表 1, 其中利用已有的较低阶四边形单元 Q9、Q8 和 Q4 计算的结果也列在表 1 中. 而按照 Q16 单元所得方膜自振频率的结果见表 2.

表中, “N-F” 代表自振频率的阶次, N_e 代表计算结构所用的单元数, u_{dof} 代表自由度. 分析知, 所构造的高阶等参元 Q16 和 Q13 单元在粗网格 (即单元划分很少) 情况下可得比低阶等参元好的计算精度和收敛速率. 由表 1 和表 2 知, 用 16 个 Q16 或 Q13 单元所得自振频率结果的精度比 Q4 等参元用 900 个单元所得结果精度高. 就计算时间而言, 在 Intel (R) Core (TM) i5-8300H, 8.00 GB 的个人电脑上, 使用 16 个 Q13 单元和 Q16 单元求解分别花费 24.66 s 和 77.45 s, 而运行 900 个 Q4 单元则花费 182.17 s, 这说明 Q13 单元的计算效率较高. 图 3 给出了基于 100 个 Q16 单元该结构的前 6 阶振型.

表 1 三边固定一边自由方膜的前 10 阶自振频率 (基于 Q13、Q9、Q8 和 Q4) (单位: Hz)

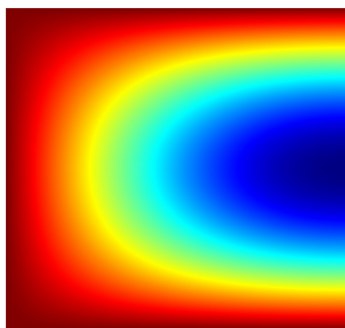
Table 1 The 1st 10 natural frequencies of the 3-sides-fixed and one-side-free membrane based on Q13, Q9, Q8 and Q4 (unit: Hz)

N-F (m, n)	element type							exact ^[21]
	Q13				Q9	Q8	Q4	
	$N_e = 2$ ($u_{\text{dof}} = 6$)	$N_e = 4$ ($u_{\text{dof}} = 18$)	$N_e = 16$ ($u_{\text{dof}} = 84$)	$N_e = 100$ ($u_{\text{dof}} = 570$)	$N_e = 100$ ($u_{\text{dof}} = 380$)	$N_e = 100$ ($u_{\text{dof}} = 280$)	$N_e = 900$ ($u_{\text{dof}} = 870$)	
1 ($m = 1, n = 1$)	0.342	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
2 ($m = 2, n = 1$)	0.556	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549
3 ($m = 1, n = 2$)	0.647	0.631	0.627	0.627	0.627	0.627	0.628	0.627
4 ($m = 2, n = 2$)	0.831	0.768	0.761	0.761	0.761	0.761	0.762	0.761
5 ($m = 3, n = 1$)	0.904	0.829	0.820	0.819	0.820	0.820	0.821	0.819
6 ($m = 1, n = 3$)	1.399	0.949	0.926	0.926	0.926	0.926	0.929	0.926
7 ($m = 3, n = 2$)	-	1.048	0.975	0.974	0.974	0.974	0.977	0.974
8 ($m = 2, n = 3$)	-	1.064	1.021	1.021	1.021	1.021	1.024	1.021
9 ($m = 4, n = 1$)	-	1.164	1.109	1.108	1.109	1.109	1.113	1.108
10 ($m = 3, n = 3$)	-	1.265	1.190	1.188	1.189	1.189	1.193	1.188
time cost /s	3.25	5.85	24.66	122.75	46.69	42.19	182.17	-

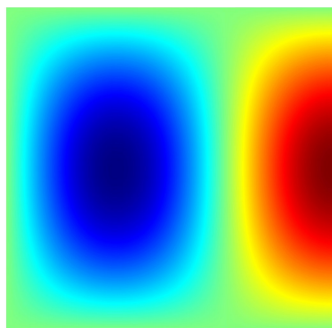
表 2 三边固定一边自由方膜的前 10 阶自振频率(基于 Q16、Q9、Q8 和 Q4) (单位: Hz)

Table 2 The 1st 10 natural frequencies of the 3-sides-fixed and one-side-free membrane based on Q16, Q9, Q8 and Q4 (unit: Hz)

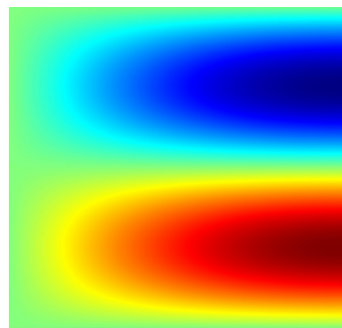
N-F (m, n)	element type							exact ^[21]
	Q16				Q9	Q8	Q4	
	$N_e = 2$ ($u_{dof} = 12$)	$N_e = 4$ ($u_{dof} = 30$)	$N_e = 16$ ($u_{dof} = 132$)	$N_e = 100$ ($u_{dof} = 870$)	$N_e = 100$ ($u_{dof} = 380$)	$N_e = 100$ ($u_{dof} = 280$)	$N_e = 900$ ($u_{dof} = 870$)	
1($m = 1, n = 1$)	0.342	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
2($m = 2, n = 1$)	0.550	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549
3($m = 1, n = 2$)	0.646	0.627	0.627	0.627	0.627	0.627	0.628	0.627
4($m = 2, n = 2$)	0.776	0.761	0.761	0.761	0.761	0.761	0.762	0.761
5($m = 3, n = 1$)	0.828	0.820	0.820	0.819	0.820	0.820	0.821	0.819
6($m = 1, n = 3$)	0.993	0.926	0.926	0.925	0.926	0.926	0.929	0.926
7($m = 3, n = 2$)	1.160	0.974	0.974	0.974	0.974	0.974	0.977	0.974
8($m = 2, n = 3$)	1.282	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.024	1.021
9($m = 4, n = 1$)	1.719	1.109	1.109	1.108	1.109	1.109	1.113	1.108
10($m = 3, n = 3$)	1.804	1.189	1.189	1.188	1.189	1.189	1.193	1.188
time cost /s	9.55	19.37	77.45	428.38	46.69	42.19	182.17	-



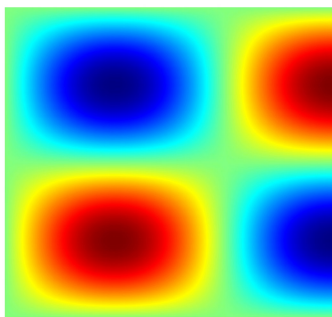
(a) 第 1 阶振型
(a) Mode 1



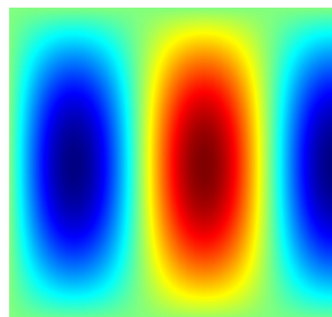
(b) 第 2 阶振型
(b) Mode 2



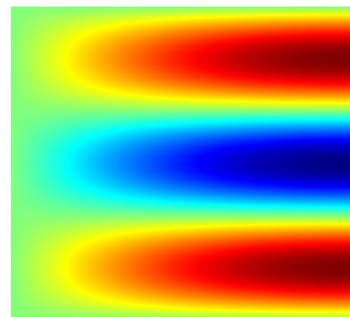
(c) 第 3 阶振型
(c) Mode 3



(d) 第 4 阶振型
(d) Mode 4



(e) 第 5 阶振型
(e) Mode 5



(f) 第 6 阶振型
(f) Mode 6

图 3 三边固定一边自由方膜前 6 阶振型

Fig. 3 The 1st 6 modes of a membrane with 3 sides fixed and one side free

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

3.2 含裂缝方膜

考察一含裂缝方膜的问题,结构模型见图 4(a),薄膜结构的厚度为 1mm。材料参数同算例 1。由于该结构对称,计算时取结构的一半进行分析,即矩形 DOABC,见图 4(b),其中 AD=2 m, AB=1 m。这个问题可被定义为如下方程形式:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{in } \Omega = (-1, 1) \times (0, 2), \\ u = 0, & \text{in } \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DO}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{in } \overline{OA}. \end{cases} \quad (26)$$

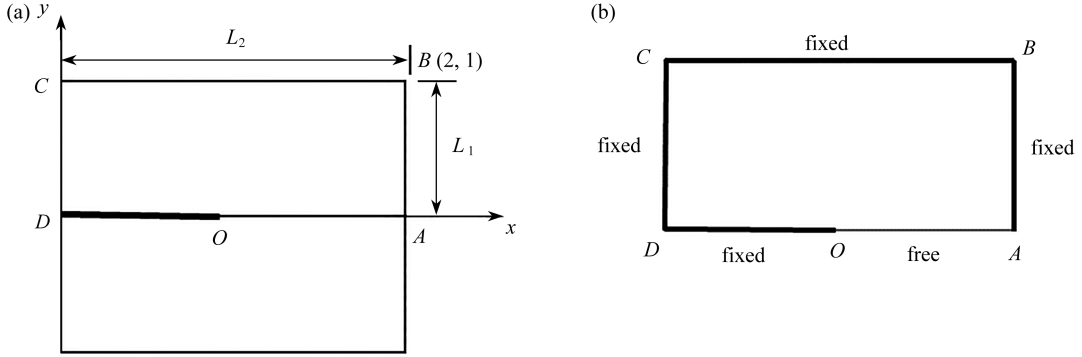


图4 裂缝薄膜结构

Fig. 4 A square membrane with an inside crack

分别考虑划分网格为 2, 4, 16, 64 和 225 个单元的情形. 材料参数同算例 1, 该问题采用无量纲分析, 其特征值的结果被列在表 3 和表 4 中, 表中参考解取自文献[5, 22], 结果表明 Q13 和 Q16 在少量单元划分情况下结果精度高, 如 64 个 Q13 单元结果优于 225 个 Q8 或 Q9 单元结果, 也优于 900 个 Q4 单元的结果. 这再次说明 Q13 和 Q16 单元具有较高的计算效率. 图 5 所示是该结构基于 64 个 Q16 单元的前 3 阶振型.

表 3 裂缝薄膜的前 5 阶特征值(基于 Q13、Q9、Q8 和 Q4 单元)

Table 3 The 1st 5 eigenvalues of the cracked membrane based on Q13, Q9, Q8 and Q4

N-F	element type							
	Q13				Q9	Q8	Q4	exact
	$N_e = 2$ ($u_{dof} = 6$)	$N_e = 4$ ($u_{dof} = 15$)	$N_e = 16$ ($u_{dof} = 78$)	$N_e = 64$ ($u_{dof} = 348$)	$N_e = 225$ ($u_{dof} = 855$)	$N_e = 225$ ($u_{dof} = 630$)	$N_e = 900$ ($u_{dof} = 855$)	
1	8.842 2	8.726 3	8.539 2	8.454 6	8.563 7	8.580 8	8.464 7	8.371 3 ^[22]
2	16.999 2	16.815 2	16.648 5	16.645 6	16.644 3	16.644 4	16.685 5	16.645 3 ^[22]
3	31.107 5	28.807 3	27.996 6	27.977 9	27.979 7	27.979 7	28.098 2	27.977 7 ^[5]
4	33.498 5	32.188 4	31.024 0	30.759 0	31.049 5	31.093 7	30.916 2	30.536 4 ^[5]
5	63.512 3	44.514 7	42.798 4	42.551 3	42.696 7	42.718 2	42.845 3	42.447 9 ^[5]
time cost /s	3.42	5.53	19.91	77.70	244.89	125.58	178.03	

表 4 裂缝薄膜的前 5 阶特征值(基于 Q16、Q9、Q8 和 Q4 单元)

Table 4 The 1st 5 eigenvalues of the cracked membrane based on Q16, Q9, Q8 and Q4

N-F	element type							
	Q16				Q9	Q8	Q4	exact
	$N_e = 2$ ($u_{dof} = 12$)	$N_e = 4$ ($u_{dof} = 27$)	$N_e = 16$ ($u_{dof} = 126$)	$N_e = 64$ ($u_{dof} = 540$)	$N_e = 225$ ($u_{dof} = 855$)	$N_e = 225$ ($u_{dof} = 630$)	$N_e = 900$ ($u_{dof} = 855$)	
1	8.652 0	8.597 0	8.476 5	8.423 8	8.563 7	8.580 8	8.464 7	8.371 3 ^[22]
2	16.940 1	16.792 6	16.647 4	16.645 4	16.644 3	16.644 4	16.685 5	16.645 3 ^[22]
3	29.159 8	28.500 7	27.994 8	27.977 8	27.979 7	27.979 7	28.098 2	27.977 7 ^[5]
4	32.424 9	31.835 6	30.853 0	30.676 6	31.049 5	31.093 7	30.916 2	30.536 4 ^[5]
5	45.050 7	43.884 1	42.725 3	42.513 4	42.696 7	42.718 2	42.845 3	42.447 9 ^[5]
time cost /s	9.20	17.15	66.36	269.39	244.89	125.58	178.03	

3.3 环扇形薄膜

图 6 所示是圆心角为 90° 的环扇形薄膜结构, 内、外半径分别为 0.5 m 和 1 m, 薄膜结构的厚度为 1 mm,

材料参数同算例 1,其周边全固定.应用 Q13 和 Q16 单元得该结构前 10 阶自振频率参数,结果分别见表 5 和表 6.

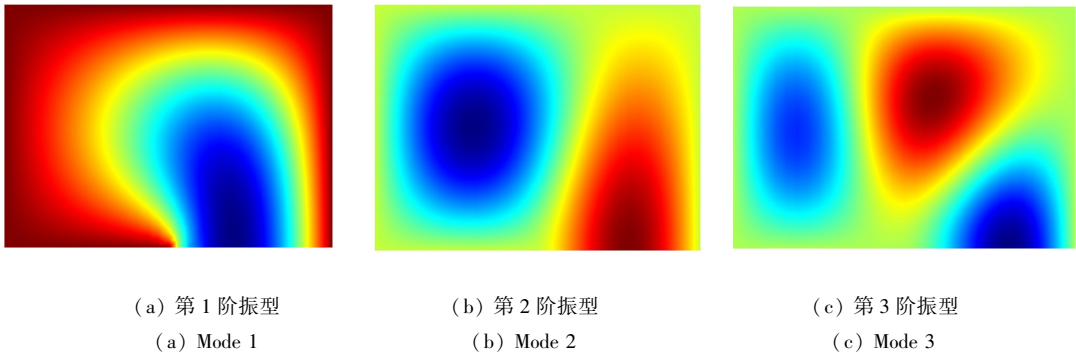


图 5 裂缝薄膜前 3 阶振型

Fig. 5 The 1st 3 modes of a square membrane with an inside crack

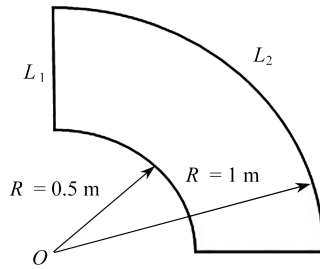


图 6 环扇形薄膜

Fig. 6 An annular membrane

表 5 环扇形薄膜的前 10 阶自振频率参数(基于 Q13、Q9、Q8 和 Q4 单元)

Table 5 The 1st 10 natural vibration frequency parameters of an annular membrane (based on Q13, Q9, Q8 and Q4)

N-F	element type									exact ^[7]
	Q13						Q9	Q8	Q4	
	$N_e = 4$ ($u_{dof} = 10$)	$N_e = 8$ ($u_{dof} = 22$)	$N_e = 12$ ($u_{dof} = 49$)	$N_e = 25$ ($u_{dof} = 121$)	$N_e = 36$ ($u_{dof} = 181$)	$N_e = 64$ ($u_{dof} = 337$)	$N_e = 225$ ($u_{dof} = 841$)	$N_e = 225$ ($u_{dof} = 616$)	$N_e = 400$ ($u_{dof} = 361$)	
1	6.842 6	6.842 3	6.814 1	6.813 8	6.813 8	6.813 8	6.813 9	6.813 9	6.826 0	6.814 0
2	8.313 3	8.301 0	8.267 3	8.266 8	8.266 7	8.266 7	8.266 9	8.266 8	8.291 6	8.267 0
3	10.338 0	10.237 7	10.191 6	10.190 2	10.189 4	10.189 0	10.189 8	10.189 6	10.257 0	10.189 0
4	12.537 2	12.407 7	12.323 0	12.320 4	12.314 5	12.311 9	12.314 5	12.314 1	12.467 2	12.311 0
5	13.281 4	13.270 6	12.929 4	12.855 7	12.855 6	12.855 5	12.856 2	12.855 8	12.916 8	12.856 0
6	14.330 5	14.168 6	13.816 7	13.742 7	13.742 4	13.742 3	13.743 1	13.742 6	13.809 4	13.742 0
7	15.739 4	14.739 1	14.546 8	14.576 8	14.516 6	14.505 1	14.511 6	14.511 0	14.802 0	14.502 0
8	16.943 0	15.710 6	15.198 1	15.112 3	15.110 6	15.110 1	15.111 4	15.110 7	15.207 8	15.110 0
9	20.438 0	17.245 1	16.806 1	16.829 1	16.794 4	16.715 3	16.727 9	16.727 0	17.017 1	16.706 0
10	24.941 9	17.922 7	16.987 4	16.854 1	16.845 1	16.841 8	16.844 7	16.843 8	17.216 0	16.841 0
time cost /s	28.13	55.09	83.25	174.13	257.67	462.43	447.65	333.32	104.52	-

由表 5 可知,以理论解为基准,环扇形划分为 12 个 Q13 单元(周向等分为 6 段,径向等分为 2 段)时,前 3 阶参数的相对误差极小,分别约为 0.001 5%,0.003 6%,0.025 5%;第 4~6 阶自振频率参数的相对误差均不超过 0.6%;而 7~10 阶频率的相对误差分别约为 0.308 9%,0.583 1%,0.599 2%,0.869 3%。而划分为 36 个 Q13 单元时(周向和径向均等分为 6 段),前十阶自振频率参数的相对误差都很小,除第 7 阶和第 9 阶的相对误差分别为 0.100 7%和 0.529 2%,其他均不超过 0.01%;而划分为 64 个单元(周向和径向均等分为 8 段)时,前 6 阶自振频率参数的相对误差较小,均不超过 0.06%。

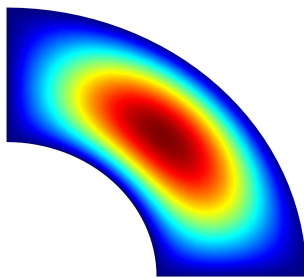
类似地,由表6可知,环扇形分别划分为12、36和64个单元时,采用Q16单元所得前三阶自振频率参数的精度较Q13单元略高,且高阶自振频率参数误差随着网格的不断增加而逐步减少,如64个Q16单元计算所得第10阶自振频率参数的相对误差仅为0.004%。

总体而言,同等网格下Q16单元的精度高于Q13单元.但按照所耗计算量而言,同等精度下Q13单元的效率更高,因为其所对应的计算自由度数更少.图7给出了基于64个Q16单元计算所得该结构前6阶振型(其中环扇形区域划分为64个单元)。

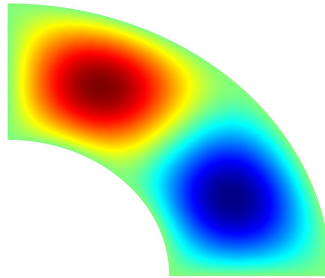
表6 环扇形薄膜的前10阶自振频率参数(基于Q16、Q9、Q8和Q4单元)

Table 6 The 1st 10 natural vibration frequency parameters of an annular membrane (based on Q16, Q9, Q8 and Q4)

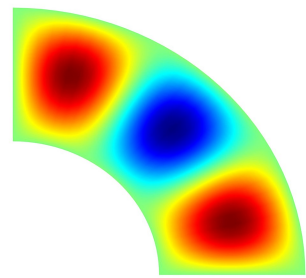
N-F	element type									exact ^[7]
	Q16						Q9	Q8	Q4	
	$N_e = 4$ ($u_{\text{dof}} = 22$)	$N_e = 8$ ($u_{\text{dof}} = 46$)	$N_e = 12$ ($u_{\text{dof}} = 85$)	$N_e = 25$ ($u_{\text{dof}} = 196$)	$N_e = 36$ ($u_{\text{dof}} = 289$)	$N_e = 64$ ($u_{\text{dof}} = 529$)	$N_e = 225$ ($u_{\text{dof}} = 841$)	$N_e = 225$ ($u_{\text{dof}} = 616$)	$N_e = 400$ ($u_{\text{dof}} = 361$)	
1	6.842 2	6.842 2	6.814 1	6.813 8	6.813 8	6.813 8	6.813 9	6.813 9	6.826 0	6.814 0
2	8.300 3	8.300 0	8.267 1	8.266 8	8.266 7	8.266 7	8.266 9	8.266 8	8.291 6	8.267 0
3	10.233 1	10.228 9	10.190 6	10.190 1	10.189 3	10.189 0	10.189 8	10.189 6	10.257 0	10.189 0
4	12.412 6	12.355 9	12.317 8	12.320 0	12.314 4	12.311 9	12.314 5	12.314 1	12.467 2	12.311 0
5	13.267 0	13.267 1	12.929 4	12.855 7	12.855 6	12.855 5	12.856 2	12.855 8	12.916 8	12.856 0
6	14.114 2	14.114 1	13.815 0	13.742 6	13.742 4	13.742 3	13.743 1	13.742 6	13.809 4	13.742 0
7	14.667 0	14.549 7	14.522 7	14.574 9	14.516 1	14.505 1	14.511 6	14.511 0	14.802 0	14.502 0
8	15.460 1	15.457 0	15.182 3	15.111 1	15.110 3	15.110 0	15.111 4	15.110 7	15.207 8	15.110 0
9	17.101 6	16.762 2	16.803 9	16.823 3	16.792 9	16.715 2	16.727 9	16.727 0	17.017 1	16.706 0
10	17.270 9	17.220 1	16.917 5	16.848 8	16.843 9	16.841 7	16.844 7	16.843 8	17.216 0	16.841 0
time cost /s	72.13	144.05	214.37	444.51	661.42	1176.72	447.65	333.32	104.52	-



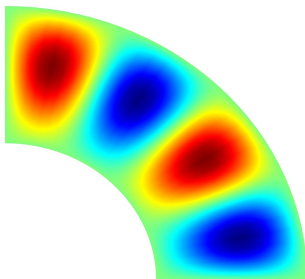
(a) 第1阶振型
(a) Mode 1



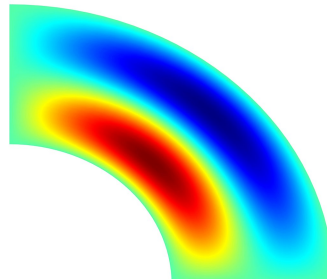
(b) 第2阶振型
(b) Mode 2



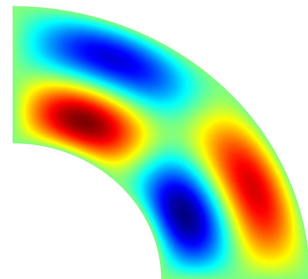
(c) 第3阶振型
(c) Mode 3



(d) 第4阶振型
(d) Mode 4



(e) 第5阶振型
(e) Mode 5



(f) 第6阶振型
(f) Mode 6

图7 环扇形薄膜前6阶振型

Fig. 7 The 1st 6 modes of the annular membrane

4 总 结

为研究薄膜自由振动问题的高精度算法,本文基于 p 型有限元思想构造了两种四边形等参元 Q16 和 Q13.然后,本文应用所构建的 p 型等参元分析若干算例,并将所提单元得到的自振特性结果与较低阶等参元 Q4, Q8 和 Q9 得到的结果进行了对比,表明了构造的 p 型单元的优点,即在单元数较少的情况下可获得较高的计算精度,同时收敛速率快,网格前处理简单.综上,所提出的高阶等参单元虽构造相对复杂,但具备高效率和高精度的优势,因而具有进一步研究和推广的价值.

参考文献(References):

- [1] 林文静,陈树辉.薄膜横向振动的有限元分析[J].应用力学学报,2011,28(1):44-49.(LIN Wenjing, CHEN Shuhui. A triangle element for finite element analysis of membranes[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2011, 28(1): 44-49.(in Chinese))
- [2] 林文静,陈树辉,李森.圆形薄膜自由振动的理论解[J].振动与冲击,2009,28(5):84-86.(LIN Wenjing, CHEN Shuhui, LI Sen. Analytical solution of the free vibration of circular membrane[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(5): 84-86.(in Chinese))
- [3] WU J C, WANG D D, LIN Z. A meshfree higher order mass matrix formulation for structural vibration analysis [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2018, 18(10): 1850121.
- [4] LIU D S, LIN I H. Vibration analysis of the multiple-hole membrane by using the coupled diem-Fe scheme[J]. *Journal of Mechanics*, 2016, 32(2): 163-173.
- [5] 袁驹,孙浩涵.二维自由振动问题的自适应有限元分析初探[J].工程力学,2020,37(1):17-25.(YUAN Si, SUN Haohan. A preliminary study on adaptive finite element analysis of two-dimensional free vibration problems[J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(1): 17-25.(in Chinese))
- [6] 孙浩涵,袁驹.以频率误差控制为目标的自由振动问题自适应有限元分析[J].振动与冲击,2023,42(4):106-115.(SUN Haohan, YUAN Si. Adaptive finite element analysis of free vibration problems with frequency error control alone as the objective[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, 42(4): 106-115.(in Chinese))
- [7] HOUMAT A. Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p -version of the finite-element method[J]. *Thin-Walled Structures*, 2006, 44(9): 943-951.
- [8] MILSTED M G, HUTCHINSON J R. Use of trigonometric terms in the finite element method with application to vibrating membranes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, 32(3): 327-346.
- [9] LIU D S, CHEN Y W. Application of craig-bampton reduction technique and 2D dynamic infinite element modeling approach to membrane vibration problems[J]. *Journal of Mechanics*, 2019, 35(4): 513-525.
- [10] FANTUZZI N, TORNABENE F, VIOLA E. Generalized differential quadrature finite element method for vibration analysis of arbitrarily shaped membranes[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 79: 216-251.
- [11] BABUSKA I, SZABO B A, KATZ I N. The p -version of the finite element method[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1981, 18(3): 515-545.
- [12] IHLENBURG F, BABUŠKA I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number part I: the h -version of the FEM[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 1995, 30(9): 9-37.
- [13] 叶康生,孟令宁.二维泊松方程问题 Lagrange 型有限元 p 型超收敛算法[J].工程力学,2022,39(2):23-36.(YE Kangsheng, MENG Lingning. A p -type superconvergent recovery method for fe analysis with Lagrange elements on two-dimensional Poisson equations[J]. *Engineering Mechanics*, 2022, 39(2): 23-36.(in Chinese))
- [14] 章敏,张大卫,张建铭. H-P 型有限单元法在 L 型钢模型优化设计中的应用[J].湖北工程学院学报,2016,36(6):87-92.(ZHANG Min, ZHANG Dawei, ZHANG Jianming. Application of H-P type finite element method in L-shaped steel model optimization design[J]. *Journal of Hubei Engineering University*, 2016, 36(6): 87-92.(in Chinese))
- [15] 陆阳春,张建铭.基于 p 型有限元法和围线积分法计算复合型应力强度因子[J].应用力学学报,2020,37(1):

- 168-175, 479-480.(LU Yangchun, ZHANG Jianming. Extraction of stress intensity factors based on p -version finite element method and contour integral method[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2020, **37**(1): 168-175, 479-480.(in Chinese))
- [16] 陈峻, 张建铭. 基于 p 型有限元法的平面钢闸门局部屈曲系数计算[J]. 水电能源科学, 2020, **38**(12): 173-175. (CHEN Jun, ZHANG Jianming. Calculation of local buckling coefficient in plane steel gate based on p -version finite element method[J]. *Water Resources and Power*, 2020, **38**(12): 173-175.(in Chinese))
- [17] 李文武, 王为. 基于比例边界有限元的复合梁自由振动频率计算[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(7): 936-948. (LI Wenwu, WANG Wei. Natural vibration frequencies of laminated composite beams based on the scaled boundary finite element method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(7): 936-948.(in Chinese))
- [18] ZIENKIEWICZ O C, GAGO J P D S R, KELLY D W. The hierarchical concept in finite element analysis[J]. *Computers & Structures*, 1983, **16**(1/2/3/4): 53-65.
- [19] BARDELL N S. The application of symbolic computing to the hierarchical finite element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, **28**(5): 1181-1204.
- [20] 郭茂, 刘波. 一种基于微分求积升阶谱有限元方法的正交有理金字塔基函数[C]//北京力学会第26届学术年会论文集. 北京: 北京力学会, 2020: 3.(GUO Mao, LIU Bo. An orthogonal rational pyramid Basis function based on differential quadrature ascending spectral finite element Method[C]//*Proceedings of the 26th Annual Conference of Beijing Force Society*. Beijing: Beijing Mechanical Society, 2020: 3. (in Chinese))
- [21] PARK J, PARK I, LEE U. Transverse vibration and waves in a membrane: frequency domain spectral element modeling and analysis[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**: (5): 1-14.
- [22] LI Z C. Error analysis of the Trefftz method for solving Laplace's eigenvalue problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **200**(1): 231-254.