

一维有限元的 EEP 单元及其自适应分析*

杨 帅, 袁 驹

(清华大学 土木工程系 土木工程安全与耐久教育部重点实验室, 北京 100084)

摘要: 对 $m (> 1)$ 次单元, 基于单元能量投影 (element energy projection, 简称 EEP) 法提出的简约格式位移解 u^* 具有比常规有限元解 u^h 至少高一阶的精度, 据此提出了 EEP 单元概念, 并给出以 EEP 单元作为最终解的自适应有限元求解策略. 通过编制相应的计算程序分析了一维非自伴随问题, 计算结果与理论预期吻合较好, 验证了自适应求解策略的有效性和可靠性. 研究表明: 该法可以给出按最大模度量、逐点满足误差限的解答, 相较于常规单元, 最终的求解单元数更少.

关键词: 一维有限元; 单元能量投影 (EEP); EEP 单元; 自适应有限元法

中图分类号: O342 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450036

EEP Elements for the 1D Finite Element Method and the Adaptivity Analysis

YANG Shuai, YUAN Si

(Key Laboratory of Civil Engineering Safety and Durability, Ministry of Education,
Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P.R.China)

Abstract: For the elements of degree $m (> 1)$, simplified form solution u^* based on the element energy projection (EEP) method has at least 1-order higher accuracy than conventional finite element solution u^h . As a result, the EEP element, with simplified form EEP solution u^* in as the final solution, was proposed, and a corresponding adaptive finite element analysis strategy for EEP elements was developed. By means of the developed algorithm, the 1D 2-point boundary value problem was analyzed, and the computation results are in good agreement with theoretical solutions, verifying the effectiveness and reliability of the proposed adaptivity strategy. The theoretical study and numerical experiments show that, the proposed method provides an EEP element solution satisfying the preset error tolerances in the maximum norm with fewer elements and less adaptive steps compared to conventional finite elements.

Key words: 1D problem; element energy projection (EEP); EEP element; adaptive finite element method

0 引 言

自适应有限元法 (adaptive finite element method, 简称 AFEM) 是提升求解质量和效率的一种有效方

* 收稿日期: 2024-02-18; 修订日期: 2024-05-08

基金项目: 国家自然科学基金 (51878383; 51378293)

作者简介: 杨帅 (1997—), 男, 博士生 (通讯作者. E-mail: s-yang20@mails.tsinghua.edu.cn);

袁驹 (1953—), 男, 教授, 博士.

引用格式: 杨帅, 袁驹. 一维有限元的 EEP 单元及其自适应分析[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(1): 1-11.

法^[1-5],也是数值计算方法研究的热点,近年来,拓展至但不限于奇异摄动对流扩散问题^[6]、非对称线性椭圆型偏微分方程^[7]和断裂力学^[8-9]等方面,自适应有限元法的主要做法是反复利用前一次网格及其解答的信息,通过可靠的误差估计手段对有限元解答的精度进行评估,并结合有效的网格细化技术调整网格,以获得优化的网格,直至满足用户事先给定的误差限。

单元能量投影(EEP)法是袁驷等^[10]基于数学理论和力学概念,提出的新型有限元超收敛后处理算法,基于其超收敛的优良特性,一整套自适应有限元分析方法已得到充分的发展和应用,该算法基于位移超收敛解估计误差,指导网格细分,可给出按最大模度量的、逐点满足误差限的解答^[11],在二维及三维线性问题^[12]中取得了一系列成功,并已成功推广至初值问题^[13]和部分非线性^[14]问题。

根据一维有限元法理论,若问题足够光滑,则 m 次多项式单元在单元内部位移解一般具有 h^{m+1} 的收敛阶,而端结点位移可具有 h^{2m} 的超收敛阶^[3]。EEP 理论揭示了一维有限元的误差主要来源于“固端解”,即单元内部,因此纵使单元端结点位移精确(称为精确单元),有限元解在单元内部仍存在误差。进而由 EEP 理论对一维有限元提出了三种消减单元内部误差的 EEP 计算格式^[15]: ① 精确单元的精确格式,可以给出单元内部精确解。② 近似单元的简约格式,在单元内部可以给出比有限元解至少高一阶的超收敛解。③ 近似单元的凝聚格式,在单元内部可以给出同端结点相同的 h^{2m} 阶的超收敛解。近期,笔者进一步提出了第 4 种计算格式: ④ 在简约格式基础上的加强格式^[16],对于三次以上的单元,在单元内部可以给出比简约格式至少高一阶的超收敛解。

综上,如果对各种解答按精度排序的话,则有:有限元解<简约格式<加强格式<凝聚格式<精确格式。其中,简约格式与有限元解相比具有本质性、转折性的转变,它是最简单的消减单元内部误差的 EEP 格式,不仅比有限元解在精度上高一阶,可有效地用于估计有限元解的误差,还使得单元间导数变得连续。图 1 给出了一典型问题的误差分布,可见,简约格式解的误差要比有限元解的误差小得多,也更加光滑,最大误差也从单元内部转移到单元端结点。到目前为止,所有基于 EEP 技术的自适应有限元分析的算法,均选取有限元解作为最终解,采用 EEP 简约格式解作为误差估计器,用其指导自适应网格细分。

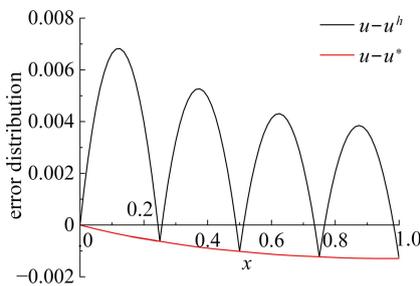


图 1 误差分布

Fig. 1 The error distribution

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

本文旨在提升最终解的质量和性能,提出以 EEP 简约格式解 u^* 作为最终解的单元为 EEP 单元;同时,进一步将 EEP 单元作为自适应求解的最终目标,提出用加强格式解作为误差估计器的自适应有限元求解策略和算法。这一算法充分发挥了简约格式解 u^* 的良好性质,有效改善了最终解的性态,减少了最终网格的单元数量。本文给出的算例表明,所提出的求解策略和算法高效可靠、冗余度小、效果颇佳。

1 问题描述与超收敛解

以二阶非自伴随两点边值问题作为模型问题,进行相应的公式推导和算法说明。不失一般性,该算法流程可推广至更加复杂的常微分方程组问题。

1.1 两点边值模型问题

二阶非自伴随两点边值模型问题描述如下:

$$\begin{cases} Lu \equiv - (pu')' + ru' + qu = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 p, r, q 均为 x 的函数,且 $p \geq p_0 > 0, p_0$ 为常数, $r, q \geq 0, L$ 为上式定义的线性非自伴随微分算子,定义与问题(1)相应的双线性型和线性型如下:

$$a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + ru'v + quv) dx, \quad (f, v) = \int_0^1 fvdx. \quad (2)$$

记 H_E^1 为所有满足本质边界条件且直到一阶导数均平方可积的函数空间,则问题(1)的 Galerkin 法归结为求解 $u \in H_E^1$ 使得

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_E^1. \quad (3)$$

1.2 有限元解

对求解域进行常规有限元离散,考虑两端结点坐标为 \bar{x}_1, \bar{x}_2 的标准单元,其长度为 h ,在单元内任取一点 \bar{x}_a ,将单元区间 I 分为两段: $I_1 = [\bar{x}_1, \bar{x}_a]$ 和 $I_2 = [\bar{x}_a, \bar{x}_2]$.记 u^h 为有限元试探函数,相应的 v^h 为有限元检验函数,标准单元上的试探函数和检验函数采用相同的形函数插值得到.在满足本质(位移)边界条件和单元间连续条件下,将所有单元试探函数集成,得到有限元试探解空间 $S^h \subset H_E^1$.则问题(1)的 Galerkin 有限元解归结为求解 $u^h \in S^h$,使得

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h), \quad \forall v^h \in S^h. \quad (4)$$

由式(4)得到的有限元解答 u^h ,在单元内部具有至少 h^{m+1} 阶的收敛精度,将有限元解 u^h 作为最终解的单元称为常规单元.

1.3 EEP 简约格式解

在得到常规有限元解答 u^h 后,可以按照简约格式位移的计算公式^[12]得出 EEP 简约格式解(以下简称简约格式解):

$$u_a^* = u_a^h + \frac{h}{p_a} \left(\bar{N}_{1a} \int_{I_1} (f - Lu^h) \bar{N}_2 dx + \bar{N}_{2a} \int_{I_2} (f - Lu^h) \bar{N}_1 dx \right), \quad (5)$$

其中,上标“*”表示 EEP 简约格式解, \bar{N}_1 和 \bar{N}_2 表示标准线性形函数,下标“a”代表 \bar{x}_a 处.对 $m(\geq 1)$ 次单元,简约格式解 u^* 具有 $h^{\min(m+2, 2m)}$ 阶的收敛精度^[17].本文将简约格式解 u^* 作为最终解的单元称为 EEP 单元.

1.4 EEP 加强格式解

在得到简约格式解答 u^* 后,可以按照文献[16]提出的公式计算如下的 EEP 加强格式解(以下简称加强格式解):

$$u_a^{**} = u_a^* + \frac{h}{p_a} \left(\bar{N}_{1a} \int_{I_1} (f - Lu^*) \bar{N}_2 dx + \bar{N}_{2a} \int_{I_2} (f - Lu^*) \bar{N}_1 dx \right), \quad (6)$$

其中,上标“**”表示 EEP 加强格式解,其余符号同式(5).可知 u^{**} 具有 $h^{\min(m+3, 2m)}$ 阶精度^[16],对 $m(\geq 3)$ 次单元,比简约格式解 u^* 要高一阶精度,凭借这一点,考虑用 u^{**} 作为误差估计器估计和检验 u^* 的误差,进而提出本文的自适应有限元求解策略.

2 自适应求解策略

由第 1 节可知,EEP 加强格式解比简约格式解具有更高阶精度,因此将其作为对简约格式解 u^* 的误差估计器,指导自适应网格细分是自然合理的.这也是本文自适应算法的核心理论和技术.

2.1 EEP 单元自适应求解策略

自适应求解的最终目标为:在解析解 u 未知的情况下,事先给定误差限 T_l ,寻求一个优化的有限元网格 π^* ,使得该网格上的简约格式解答 u^* 按照最大模度量满足误差限,即逐单元满足

$$\max |u - u^*| \leq T_l. \quad (7)$$

由于 u 未知,因此式(7)不能作为停机准则使用.实际计算时,用加强格式解 u^{**} 代替 u 来估计 u^* 的误差,则

有停机准则为

$$\max |u^{**} - u^*| \leq T_l. \quad (8)$$

由于加强格式的收敛阶仅在单元次数 $m \geq 3$ 时比简约格式高,因此 EEP 单元自适应求解策略的适用条件为单元次数 $m \geq 3$. EEP 单元自适应求解策略可以概括为如下四个步骤:

(i) 有限元解. 在当前网格下(初始网格由用户给定)对给定问题进行常规有限元计算,得到各单元的有限元解 u^h .

(ii) 简约格式解. 利用简约格式位移的超收敛公式(5)计算各单元解 u^* .

(iii) 加强格式解. 利用加强格式位移的超收敛公式(6)计算各单元解 u^{**} .

(iv) 网格细分. 逐单元检验式(8)是否满足;若某单元不满足,则将该单元细分为两个单元,对所有单元检验后得到新网格,并返回步骤(i);若全部单元都满足式(8),则求解过程结束.

2.2 自适应求解小结

1) EEP 单元自适应求解策略在实施时一般取单元次数 $m \geq 3$, 以在理论上确保自适应的成功;对于线性元和二阶元,虽然提出的自适应求解策略理论上并不能提供保障,但可以通过引入结点位移修正技术来弥补这一缺陷^[18],此部分不作为重点内容,因此不展开讨论.

2) 对于奇异问题,本文方法虽然暂时缺少理论证明,但通过大量的数值算例验证依然有效,且能取得不错效果.

3) 本文虽以一维 Galerkin 有限元为例进行推导和介绍自适应求解策略,但对于四阶常微分方程(组)问题,数学上给出证明其端结点位移精度能够达到 h^{2m-2} 阶^[19-20],单元内部位移精度达到 h^{m+1} 阶^[3,19-20],因此本文方法同样适用.

3 数值算例

本文提出的自适应求解策略已编制成 Maple 和 Fortran 90 程序,大量的数值试验结果验证了方法的有效性和可靠性,见表 1—表 12. 本节给出若干典型算例,用以展示本法的优势. 同时与文献[11]中提出的常规自适应求解策略方法进行对比,表 1、4、7、10 中给出了文献[11]方法的计算结果;表 2、5、8、11 中给出了本文方法的计算结果. 为了进一步对比,表 3、6、9、12 给定了新的误差限,以与 m 次 EEP 单元具有相同收敛阶的常规单元作对照计算.

为明确起见,在以下算例中,统一采用最大模对绝对误差进行控制,为方便,引入“误差比”,即误差与误差限之比,记作 $\bar{e}^h = (u - u^h)/T_l$. 类似地,本文 EEP 单元的最大模的误差比记为 $\bar{e}_{\max}^* = \max |u - u^*|/T_l$, 而常规单元自适应求解策略的最大误差比记作 $\bar{e}_{\max}^h = \max |u - u^h|/T_l$. 当最大误差比 ≤ 1 时,自适应求解完全成功. 统一取 1 个单元作为初始网格, T_l 表示给定的误差限, m 表示单元次数,计算过程中取单元次数 $3 \leq m \leq 5$, N_e 表示自适应最终单元数, h_{\max} 和 h_{\min} 分别表示最大、最小单元的尺寸, N_{adp} 表示自适应求解步数, N_{dof} 为自适应最终自由度数.

3.1 自适应求解结果

3.1.1 梯度局部变化问题

模型问题中取 $p = 1, r = 10, q = 1, f = 1$, 边界条件为 $u(0) = 0, u'(1) = 0$, 问题的解析解为

$$u = (\alpha_1 e^{\alpha_1 + \alpha_2 x} - \alpha_2 e^{\alpha_1 x + \alpha_2})/\beta + 1, u' = (e^{\alpha_1 x + \alpha_2} - e^{\alpha_1 + \alpha_2 x})/\beta, \quad (9)$$

其中, $\beta = \alpha_2 e^{\alpha_2} - \alpha_1 e^{\alpha_1}$, $\alpha_{1,2} = (r \pm \sqrt{r^2 + 4})/2$, 图像如图 2 所示. 因解析解大部分近似一条直线上行,右端末尾弯折成水平线,有较大的梯度变化,被俗称为“钢筋弯钩”问题.

误差限取为 $T_l = 1 \times 10^{-8}$, 表 1—表 3 给出了采用两种自适应求解策略计算的结果以及对比结果;图 3 和图 4 分别为单元次数取 $m = 3$ 时,两种策略的单元分布示意图和自适应最终网格误差分布图. 可见:两种方案都可以给出满足误差限要求的解答;而对于相同误差限,相同收敛阶数的单元,本文方法可以以更少的自由度数 and 自适应迭代次数完成求解,且随着单元次数降低,收益越来越高.

表 1 常规单元自适应求解策略结果 ($T_l = 1 \times 10^{-8}$)

Table 1 Results of the conventional element adaptive strategy ($T_l = 1 \times 10^{-8}$)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	26	79	6	0.125 0	0.015 6	0.804 0
4	11	45	5	0.250 0	0.031 3	0.862 9
5	7	36	4	0.250 0	0.062 5	0.562 6

表 2 EEP 单元自适应求解策略结果 ($T_l = 1 \times 10^{-8}$)

Table 2 Results of the EEP element adaptive strategy ($T_l = 1 \times 10^{-8}$)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	15	46	5	0.125 0	0.031 3	0.796 7
4	9	37	4	0.250 0	0.062 5	0.458 0
5	6	31	3	0.250 0	0.125 0	0.228 7

表 3 常规单元和 EEP 单元结果对比 ($T_l = 1 \times 10^{-10}$)

Table 3 Comparison of results between conventional elements and EEP elements ($T_l = 1 \times 10^{-10}$)

element type	convergence order	N_e	N_{dof}	N_{adp}	$\bar{e}_{max}^h (\bar{e}_{max}^*)$
quartic conventional element ^[11]	h^5	30	121	6	0.870 0
cubic EEP element	h^5	36	109	6	0.932 0

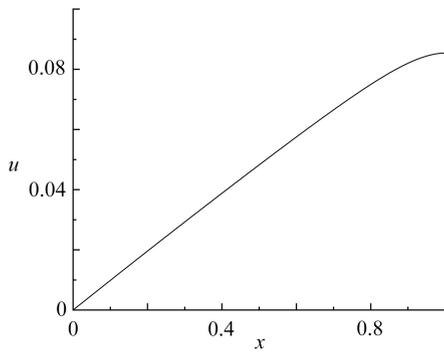


图 2 问题的解析解

Fig. 2 The analytical solution to the problem

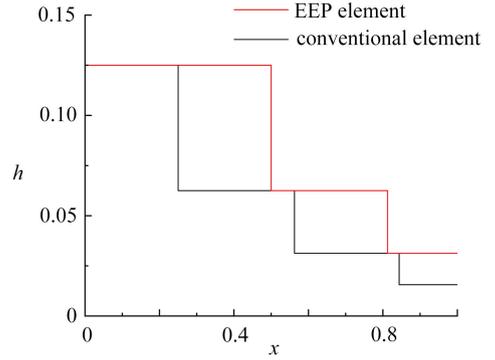
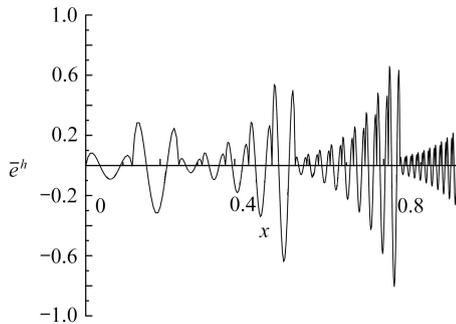
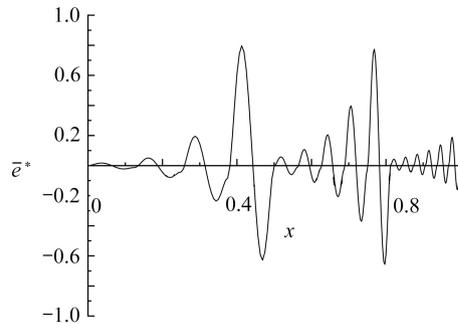


图 3 单元分布示意图

Fig. 3 The element distribution diagram



(a) 常规单元
(a) Conventional elements



(b) EEP 单元
(b) EEP elements

图 4 三次单元自适应误差图

Fig. 4 Error distributions of cubic elements

3.1.2 奇异摄动问题

模型问题中取 $p = -\varepsilon, r = 2x + 1, q = 2, f = 1$, 边界条件为 $u(0) = 0, u(1) = 0$. 本文给出两种不同 ε 取值的案例以展示本文方法的优势, 解析解在图 5 中给出.

案例1(case 1) 当取 $\varepsilon = 0.1$ 时,问题的边界层效应较小,误差限取 $T_l = 1 \times 10^{-7}$:

$$u = \frac{-e^{-\frac{5}{2}(2x+1)^2}}{2\left(\operatorname{erf}\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}i\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}i\right)\right)} \left((e^{\frac{45}{2}} - e^{\frac{5}{2}}) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}i + \sqrt{10}ix\right) + \right. \\ \left. (e^{\frac{5}{2}(2x+1)^2} - e^{\frac{45}{2}}) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}i\right) - (e^{\frac{5}{2}(2x+1)^2} - e^{\frac{5}{2}}) \operatorname{erf}\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}i\right) \right). \quad (10)$$

案例2(case 2) 当取 $\varepsilon = 0.01$ 时,问题的边界层效应加剧,误差限取 $T_l = 1 \times 10^{-8}$:

$$u = [(-e^{-100x(x+1)} + e^{-100(x+2)(x-1)}) \operatorname{erf}(5i(2x+1)) - \operatorname{erf}(5i)e^{-100(x+2)(x-1)} + \\ \operatorname{erf}(15i)e^{-100x(x+1)} + \operatorname{erf}(5i) - \operatorname{erf}(15i)] / [-2\operatorname{erf}(15i) + 2\operatorname{erf}(5i)], \quad (11)$$

其中误差函数 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, i 为虚数单位.

表4—表9给出采用两种自适应策略计算本例的结果以及对比结果;图6—图9分别为单元次数取 $m = 3$ 时,两种策略的单元分布示意图和自适应最终网格误差分布图,可以得到与3.1.1小节相似的结论.

表4 常规单元自适应求解策略结果(案例1)

Table 4 Results of the conventional element adaptive strategy (case 1)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	48	145	7	0.061 3	0.009 4	0.829 6
4	19	77	6	0.148 5	0.020 4	0.810 9
5	9	46	5	0.240 0	0.040 5	0.733 2

表5 EEP单元自适应求解策略结果(案例1)

Table 5 Results of the EEP element adaptive strategy (case 1)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	27	82	7	0.091 0	0.018 8	0.971 3
4	15	61	5	0.113 8	0.047 5	0.430 5
5	9	46	4	0.250 0	0.067 5	0.232 0

表6 常规单元和 EEP 单元结果对比 ($T_l = 1 \times 10^{-9}$)

Table 6 Comparison of results between conventional elements and EEP elements ($T_l = 1 \times 10^{-9}$)

element type	convergence order	N_e	N_{dof}	N_{adp}	$\bar{e}_{\text{max}}^h (\bar{e}_{\text{max}}^*)$
quartic conventional element ^[11]	h^5	45	181	7	0.838 8
cubic EEP element	h^5	66	199	8	0.891 9

表7 常规单元自适应求解策略结果(案例2)

Table 7 Results of the conventional element adaptive strategy (case 2)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	125	376	11	0.030 9	5.9×10^{-4}	1.037 8
4	50	201	10	0.061 9	1.3×10^{-3}	0.845 2
5	31	156	9	0.091 1	2.6×10^{-3}	0.758 3

表8 EEP单元自适应求解策略结果(案例2)

Table 8 Results of the EEP element adaptive strategy (case 2)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	81	244	11	0.036 4	1.4×10^{-3}	1.019 3
4	42	169	10	0.064 4	2.2×10^{-3}	0.723 5
5	30	151	8	0.072 6	7.5×10^{-3}	0.673 5

表 9 常规单元和 EEP 单元结果对比 ($T_l = 1 \times 10^{-10}$)

Table 9 Comparison of results between conventional elements and EEP elements ($T_l = 1 \times 10^{-10}$)

element type	convergence order	N_e	N_{dof}	N_{adp}	$\bar{\epsilon}_{\text{max}}^h (\bar{\epsilon}_{\text{max}}^*)$
quartic conventional element ^[10]	h^5	121	485	11	0.948 2
cubic EEP element	h^5	200	601	13	0.959 3

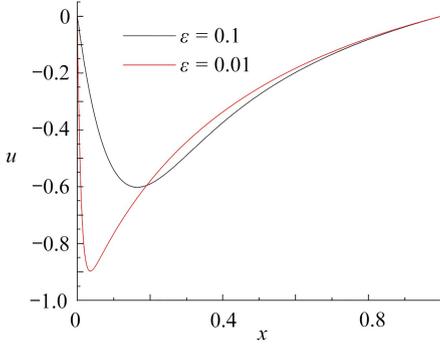


图 5 3.1.2 小节问题的解析解

Fig. 5 Analytical solutions to the problem of section 3.1.2

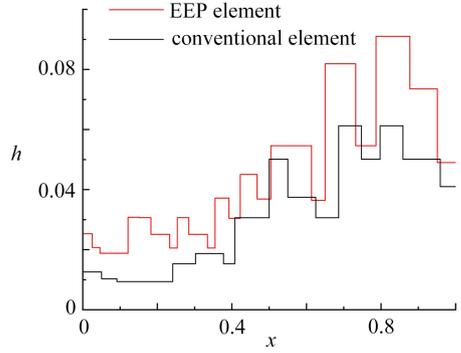
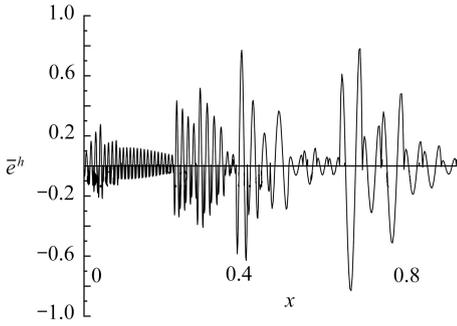
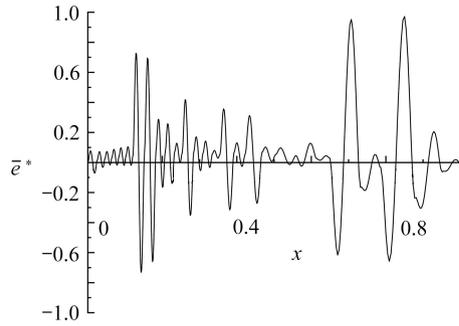


图 6 案例 1 的单元分布示意图

Fig. 6 Element distributions of case 1



(a) 常规单元
(a) Conventional elements



(b) EEP 单元
(b) EEP elements

图 7 案例 1 的三次单元自适应误差图

Fig. 7 Error distributions of cubic elements of case 1

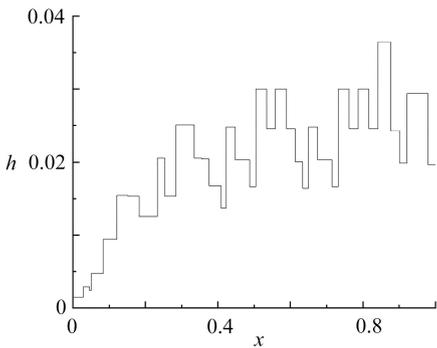


图 8 案例 2 的三次 EEP 单元分布

Fig. 8 The cubic EEP element distribution of case 2

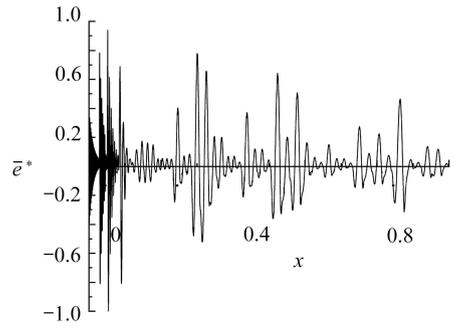


图 9 案例 2 的三次 EEP 单元误差图

Fig. 9 The error distribution of cubic EEP elements of case 2

3.1.3 奇异问题

模型问题中取 $p = 1, r = 1, q = 1$, 给定解析解为 $u = \sqrt{x} - x$, 荷载 f 由方程反求, 边界条件为 $u(0) = u(1) = 0$, 本例在 $x = 0$ 处存在一定的奇异性, 解析解如图 10 所示, 误差限取 $T_l = 1 \times 10^{-3}$.

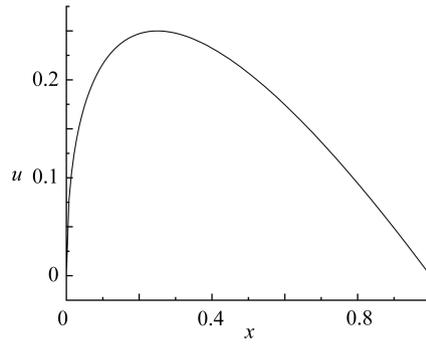


图 10 3.1.3 小节问题的解析解

Fig. 10 The analytical solution to the problem of section 3.1.3

表 10—表 12 给出了采用两种自适应求解策略计算本例的结果,图 11 和图 12 分别为单元次数取 $m = 3$ 时,两种策略的单元分布示意图和自适应最终网格误差分布图,可见本文方法对于奇异问题可以给出满足误差限的解答.由于奇异问题误差的收敛阶数只与奇异因子相关,因此提升单元次数带来的收益十分有限,而简约格式解中本就包含具有奇异性的荷载项 f , 这为求解带来了额外的收益,求解所需的自由度数和自适应迭代次数大幅减少,效果提升十分明显.

表 10 常规单元自适应求解策略结果 ($T_l = 1 \times 10^{-3}$)Table 10 Results of the conventional element adaptive strategy ($T_l = 1 \times 10^{-3}$)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	10	31	9	0.650 0	7.9×10^{-5}	0.740 0
4	9	37	8	0.650 0	2.3×10^{-4}	0.706 8
5	8	41	7	0.650 0	6.4×10^{-4}	0.894 2

表 11 EEP 单元自适应求解策略结果 ($T_l = 1 \times 10^{-3}$)Table 11 Results of the EEP element adaptive strategy ($T_l = 1 \times 10^{-3}$)

m	N_e	N_{dof}	N_{adp}	h_{max}	h_{min}	\bar{e}_{max}^h
3	3	10	2	0.660 0	0.129 2	0.456 3
4	3	13	2	0.630 0	0.144 3	0.252 8
5	2	11	1	0.620 0	0.380 0	0.649 1

表 12 常规单元和 EEP 单元结果对比 ($T_l = 1 \times 10^{-4}$)Table 12 Comparison of results between conventional elements and EEP elements ($T_l = 1 \times 10^{-4}$)

element type	convergence order	N_e	N_{dof}	N_{adp}	$\bar{e}_{\text{max}}^h (\bar{e}_{\text{max}}^*)$
quartic conventional element ^[11]	h^5	13	53	12	0.866 5
cubic EEP element	h^5	5	16	4	0.459 2

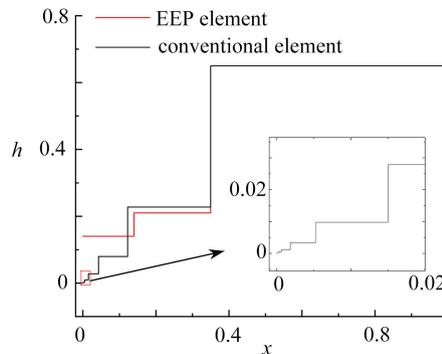


图 11 3.1.3 小节单元分布示意图

Fig. 11 The element distribution diagram of section 3.1.3

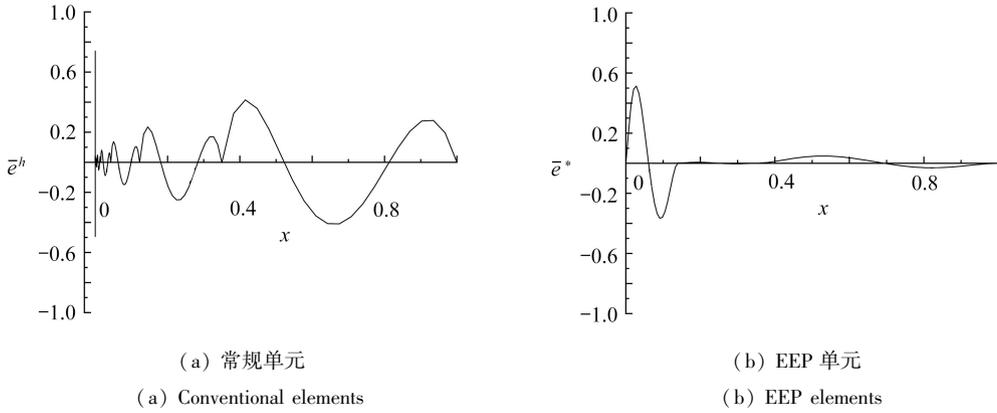


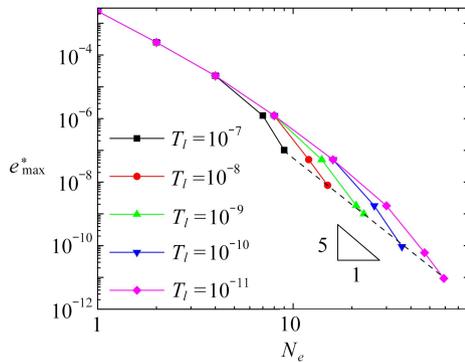
图 12 3.1.3 小节三次单元自适应误差图

Fig. 12 Error distributions of cubic elements of section 3.1.3

3.2 自适应收敛率

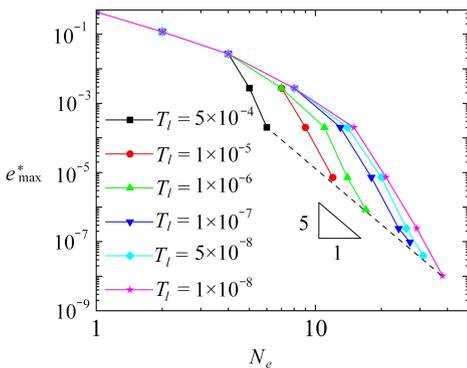
本文参照文献[21]定义的自适应收敛率, 针对以上算例的不同误差限采用三次 EEP 单元进行计算, 整理统计后得到了如图 13 所示的自适应收敛率结果。

对于足够光滑的问题, EEP 单元自适应求解策略可以达到 h^{m+2} 阶的最佳自适应收敛率, 比常规单元自适应求解策略高一阶. 对于奇异问题, EEP 单元自适应求解策略可以达到 $h^{m+\alpha+1}$ 阶的最佳自适应收敛率, 也比常规单元自适应求解策略高一阶。



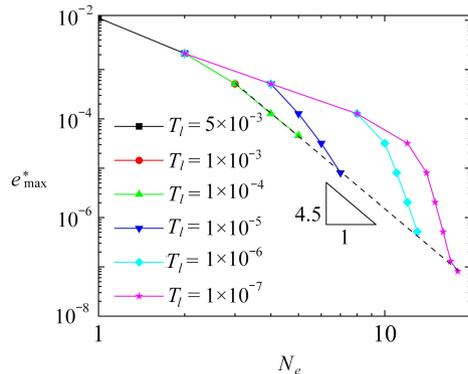
(a) 3.1.1 小节中的算例

(a) Example in section 3.1.1



(b) 3.1.2 小节中的算例

(b) Example in section 3.1.2



(c) 3.1.3 小节中的算例

(c) Example in section 3.1.3

图 13 自适应收敛率

Fig. 13 Adaptive convergence rates

4 结 论

由本文的理论分析和数值试验结果,可以得到以下结论:

- 1) 提出的 EEP 单元无论在精度还是在误差分布以及自适应迭代步数方面都比常规单元具有更好的性能,因此将 EEP 单元作为最终解是值得推荐的选择。
- 2) 提出的 EEP 单元自适应求解策略对 $m \geq 3$ 次单元有效且高效,同时有理论作为保障.对于同样的问题,本文方法可以以更少的自由度数、更少的自适应迭代步数完成自适应求解。
- 3) 提出的自适应求解策略虽然对于线性元和二次元在理论上缺乏保障,但可以通过引入结点修正技术^[19]来弥补这一缺陷,以此作为对本文方法的补充。
- 4) EEP 加强格式与凝聚格式不同,不需要构造凝聚形函数,对于无法构造凝聚形函数的方法(如有限元线法)也同样适用,因此提出的自适应求解策略是一个通用的方法,未来有望拓展至二维问题。

参考文献(References):

- [1] BABUŠKA I, RHEINBOLDT W C. A-posteriori error estimates for the finite element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, **12**(10): 1597-1615.
- [2] BABUŠKA I, RHEINBOLDT W C. Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1979, **17**: 519-540.
- [3] STRANG W G, FIX G J. *An Analysis of the Finite Element Method*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- [4] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, part 1: the recovery technique [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **33**(7): 1331-1364.
- [5] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, part 2: error estimates and adaptivity [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **33**(7): 1365-1382.
- [6] KU J, STYNES M. A posteriori error estimates for a dual finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2024, **64**(1): 7.
- [7] BRUNNER M, INNERBERGER M, MIRAÇI A, et al. Adaptive FEM with quasi-optimal overall cost for non-symmetric linear elliptic PDEs[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2024, **44**(3): 1560-1596.
- [8] WANG C, PING X, WANG X. An adaptive finite element method for crack propagation based on a multifunctional super singular element[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, **247**: 108191.
- [9] 裘沙沙, 刘星泽, 宁文杰, 等. 断裂相场模型的三维自适应有限元方法[J]. *应用数学和力学*, 2024, **45**(4): 391-399. (QIU Shasha, LIU Xingze, NING Wenjie, et al. A three-dimensional adaptive finite element method for phase-field models of fracture [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(4): 391-399. (in Chinese))
- [10] 袁骊, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. *工程力学*, 2004, **21**(2): 1-9. (YUAN Si, WANG Mei. An element-energy-projection method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional fem[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(2): 1-9. (in Chinese))
- [11] 袁骊, 和雪峰. 基于 EEP 法的一维有限元自适应求解[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(11): 1280-1291. (YUAN Si, HE Xuefeng. Self-adaptive strategy for one-dimensional finite element method based on EEP method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(11): 1280-1291. (in Chinese))
- [12] YUAN S, WU Y, XING Q. Recursive super-convergence computation for multi-dimensional problems via one-dimensional element energy projection technique [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2018, **39**(7): 1031-1044.
- [13] YUAN S, YUAN Q. Condensed Galerkin element of degree m for first-order initial-value problem with $O(h^{2m+2})$ super-convergent nodal solutions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2022, **43**(4): 603-614.
- [14] JIANG K, YUAN S, XING Q. An adaptive nonlinear finite element analysis of minimal surface problem based

- on element energy projection technique[J]. *Engineering Computations*, 2020, **37**(8): 2847-2869.
- [15] 袁弼,王旭,邢沁妍,等. 具有最佳超收敛阶的 EEP 法计算格式: I 算法公式[J]. 工程力学, 2007, **24**(10): 1-5.(YUAN Si, WANG Xu, XING Qinyan, et al. A scheme with optimal order of super-convergence based on eep method: I formulation[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(10): 1-5.(in Chinese))
- [16] 袁弼,杨帅. 一维 Galerkin 有限元 EEP 超收敛计算的加强格式[J/OL]. 工程力学, 2023(2023-12-20)[2024-05-08]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.o3.20231218.1834.008.html>. (YUAN Si, YANG Shuai. Enhanced form for EEP super-convergence calculation in one-dimensional Galerkin finite element method[J/OL]. *Engineering Mechanics*, 2023(2023-12-20)[2024-05-08]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.o3.20231218.1834.008.html>. (in Chinese))
- [17] 袁弼,邢沁妍. 一维 Ritz 有限元超收敛计算的 EEP 法简约格式的误差估计[J]. 工程力学, 2014, **31**(12): 1-3. (YUAN Si, XING Qinyan. An error estimate of EEP super-convergent solutions of simplified form in one-dimensional Ritz FEM[J]. *Engineering Mechanics*, 2014, **31**(12): 1-3.(in Chinese))
- [18] 黄泽敏,袁弼. 线法二阶常微分方程组有限元分析的结点精度修正及其超收敛计算[J]. 工程力学, 2022, **39**(S1): 9-14.(HUANG Zemin, YUAN Si. Nodal accuracy improvement and super-convergent computation in FEM analysis of FEMOL second order ODEs[J]. *Engineering Mechanics*, 2022, **39**(S1): 9-14.(in Chinese))
- [19] 张林. 固支梁有限元解的超收敛性及最大模估计[J]. 复旦学报(自然科学版), 1996, **35**(4): 421-429.(ZHANG Lin. Superconvergence and maximum norm estimation of FEM solution for the bending clamped beam[J]. *Journal of Fudan University (Natural Science)*, 1996, **35**(4): 421-429.(in Chinese))
- [20] 赵新中,陈传森. 梁问题有限元逼近的新估计及超收敛[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2000, **23**(4): 6-11. (ZHAO Xinzhong, CHEN Chuanniao. New estimates of finite element approximation to beam problem and superconvergence[J]. *Journal of Natural Science of Hunan Normal University*, 2000, **23**(4): 6-11.(in Chinese))
- [21] 孙浩涵,袁弼. 基于 EEP 超收敛解的自适应有限元法特性分析[J]. 工程力学, 2019, **36**(2): 17-25.(SUN Hao-han, YUAN Si. Performance of the adaptive finite element method based on the element-energy-projection technique[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(2): 17-25.(in Chinese))