

基于指定应力方法的混凝土开裂的 三维数值模拟*

张晓庆, 王家林, 易志坚, 张拓, 王敏

(重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

(我刊编委易志坚来稿)

摘要: 基于指定应力方法,根据线弹性理论推导出了—种新的混凝土开裂的空间有限元列式,根据该有限元公式编制了相应的 C++ 计算程序.通过 3 个算例,将该文算法与理论结果以及 ABAQUS 中 XFEM 计算结果进行对比,验证了该文开裂算法的正确性.与常规开裂算法相比,该文开裂算法开裂积分点的应力一旦指定为零(开裂状态),在后续计算中将不会出现非零,不需要迭代过程去调整为零,大大减少了迭代次数和每次迭代过程中需要处理的数据量;相较于 ABAQUS 中的 XFEM 算法只能使用—阶单元,本文开裂算法可以使用二阶单元进行开裂计算,在其他计算环境相同的情况下对开裂区域和开裂状态的判断更准确,这为商业有限元软件采用二阶单元进行更精细的开裂计算提供了一种新的途径和算法.

关键词: 指定应力方法; 有限元; 混凝土开裂; 三维数值模拟

中图分类号: O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450161

3D Numerical Simulation of Concrete Cracking Based on Specified Stress Method

ZHANG Xiaoqing, WANG Jialin, YI Zhijian, ZHANG Tuo, WANG Min

(School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University,
Chongqing 400074, P.R.China)

(Contributed by YI Zhijian, M.AMM Editorial Board)

Abstract: Based on the specified stress method, a new spatial finite element formulation for concrete cracking was derived according to the linear elasticity theory. This formulation was used to create a calculation program with the C++ language. The accuracy of the proposed cracking algorithm was validated through 3 numerical examples, where the theoretical results were compared with the ABAQUS XFEM calculations. Beyond conventional cracking algorithms, the proposed cracking algorithm has the advantage that once the stress at the cracking integration point is specified as zero (in the cracking state), it will remain zero in subsequent calculations. There is no need for an iterative process to adjust it to zero, which means significant reduction of the number of iterations and the amount of data processing required in each iteration. In comparison to the ABAQUS XFEM algorithm, which is limited to the 1st-order elements, the proposed cracking algorithm can utilize the 2nd-order elements for crack calculation, and allows for a more accurate determination of the cracked regions and states

* 收稿日期: 2024-05-31; 修订日期: 2024-07-04

作者简介: 张晓庆(1987—),女,博士生(通讯作者. E-mail: kindzhxq@163.com).

引用格式: 张晓庆,王家林,易志坚,张拓,王敏.基于指定应力方法的混凝土开裂的三维数值模拟[J].应用数学和力学,2024,45(12):1541-1554.

under the same computational conditions. This work provides a new approach and algorithm for commercial finite element software to conduct more refined crack calculations with the 2nd-order elements.

Key words: specified stress methods; finite element; concrete cracking; 3D numerical simulation

0 引言

混凝土因抗压强度高、施工方便、价格低廉等特性成为当前用途最广、用量最大的建筑材料,相关资料显示,中国每年混凝土用量约9亿 m^3 ,居世界前列^[1].尽管混凝土应用广泛,但作为一种复合材料,其力学性能复杂,具有离散性大、均匀性差、抗拉强度低等显著特点.混凝土结构在受拉时表现为准脆性,当拉应力超过某个极值时,便会出现裂缝,而裂缝是混凝土结构的严重病害,裂缝的出现与扩展会影响材料强度和结构刚度,进而不同程度上影响结构的承载能力,严重时还会造成工程事故,威胁到人们的生命以及财产安全,所以对混凝土结构的开裂分析研究一直是学术界和工程界关注的重要问题之一.

自1967年最早的钢筋混凝土结构开裂模型(离散裂缝模型)^[2]被提出以来,学者们就从没停止过对混凝土结构的开裂研究,随之出现了很多有效的混凝土开裂模型,如:弥散裂缝模型^[3]、虚拟裂缝模型^[4]、钝化带裂缝模型^[5]、基于扩展有限元^[6-7]的裂缝模型以及上述裂缝模型的改进和组合模型^[8-9]等.其中,弥散裂缝模型应用最为广泛^[10-19],当前主流的商业有限元软件如ABAQUS、ANASYS等都采用此模型.该模型的实质是将实际的混凝土裂缝“弥散”到整个混凝土单元中,将混凝土材料处理为各向异性材料,利用混凝土的材料本构关系来模拟裂缝的影响^[20],无需预设裂缝和网格重构,且可以通过调整单元的本构矩阵来考虑对象的非线性行为(材料非线性和几何非线性),计算效率和精度较高^[1].但由于该模型将裂缝弥散到整个单元中,所以裂缝概念模糊且无法反映裂缝的具体形态特征^[21].20世纪90年代末提出的扩展有限元方法(XFEM),自提出以来很快就成为了开裂模拟的一个研究热点,并被应用到了混凝土结构的开裂计算中^[22-31],目前ABAQUS、LS-DYNA等已经包含了XFEM的断裂分析模块.该方法的基本思想是采用水平集函数来描述裂缝位置和路径,用扩充的带有不连续性质的形函数基来代表计算域内的间断^[32],并通过断裂力学的开裂准则预测裂纹的扩展方向.XFEM可以在规则网格上计算形状复杂的裂纹,模拟裂纹扩展时,不需要对网格进行重剖分,节省了计算成本,可以在粗网格上获得精确解答,可以用于大型有限元并行计算,其程序可以写入商用有限元软件^[32].但由于XFEM起步较晚,在混凝土结构中的应用尚有许多问题需要深入研究,例如,已有的研究大多局限于线弹性问题,较少考虑结构破坏过程中的材料和几何非线性,影响了计算结果的准确性;开裂面上尚不能引入单元间的接触-碰撞检索计算,难以模拟结构破坏倒塌的全过程;过多关注裂缝尖端的应力集中问题,且开裂准则所需参数较多、计算过程复杂,不能模拟多裂纹扩展以及裂纹交叉的情况^[1].另外,还有一些学者研究了基于其他计算方法(如无网格法、非连续数值方法、数值流行方法等)的开裂模型,并应用于混凝土结构工程领域^[33-36],这些开裂模型都有各自的优缺点,相较弥散裂缝模型和扩展有限元开裂模型应用较少,在此不再赘述.

指定应力方法是指针对有限元分析中对应力或内力有指定条件的问题,引入非弹性应变作为实现指定应力条件的附加未知量,建立以位移和未知非弹性应变作为独立变量的变分原理和虚功方程,得到指定应力问题的有限元平衡方程,从而对指定应力问题进行求解^[37].在常规的有限元方法和软件中,应力和内力是计算结果,而指定应力方法的有限元计算结果中应力等于指定值,可以直接模拟应力已知或有指定条件的问题,如通过指定开裂后裂缝界面的应力为零来模拟开裂,采用该方法只要没有形成新的开裂面(裂纹没有扩展),一次计算即可准确模拟现有的裂纹面,无需迭代.本文基于指定应力方法,根据线弹性理论推导出了—种新的混凝土开裂的空间有限元列式,编制了相应的C++开裂计算程序,并通过3个算例将本文算法与理论结果以及ABAQUS中XFEM计算结果进行对比,验证了本文开裂算法的正确性.

1 指定应力方法的三维有限元列式推导

1.1 通用有限元列式

用有限元法分析三维问题时,每个节点有3个位移分量,即

$$\boldsymbol{\delta}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T.$$

根据有限元分片插值的原理,选取合适的形函数 N , 可以构建出结构单元内的位移形式为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \boldsymbol{\delta}_i, \quad (1)$$

式中, $\{u \quad v \quad w\}^T$ 为单元内部任意点处的位移; n 为单元的节点数; N_i 为构建的形函数; $\boldsymbol{\delta}_i$ 为单元节点 i 的位移。

对于单元内的任意点,由几何方程有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}_e, \quad (2)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变向量, \mathbf{B} 为常规的应变矩阵, $\boldsymbol{\delta}_e$ 为常规单元节点位移向量。

根据指定应力方法的定义^[37],单元内各点的总应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 可以分解为弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 、已知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ (由温度或者塑性变形等因素引起的) 和未知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, 即有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (3)$$

设单元内未知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 可由某些未知独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$ 表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{B}^0 \boldsymbol{\delta}^0, \quad (4)$$

式中, \mathbf{B}^0 为单元内非弹性应变与独立参数间的广义几何矩阵。

由式(1)—(3)可知, 弹性应变可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}^p = [\mathbf{B} \quad -\mathbf{B}^0] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_e \\ \boldsymbol{\delta}^0 \end{Bmatrix} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\mathbf{B}} \bar{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (5)$$

式中

$$\bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \quad -\mathbf{B}^0] \quad (6)$$

为扩展几何矩阵,

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_e \\ \boldsymbol{\delta}^0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

为扩展“位移”向量。

由物理方程,可得

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (8)$$

其中, \mathbf{D} 为弹性矩阵。

根据文献[37],关于指定应力问题的虚应变能为

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 dV, \quad (9)$$

式中, V 为问题的求解域; σ_{ij} 为弹性应力张量; $\delta \varepsilon_{ij}^e$ 为弹性虚应变张量; V_σ 为指定应力区域; σ_{ij}^0 为非弹性应力张量; $\delta \varepsilon_{ij}^0$ 为未知非弹性虚应变张量。

根据式(4)和(5),单元的未知非弹性虚应变和弹性虚应变可分别表示为

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{B}^0 \delta \boldsymbol{\delta}^0, \quad (10)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \bar{\mathbf{B}} \delta \bar{\boldsymbol{\delta}}, \quad (11)$$

式中, $\delta \boldsymbol{\delta}^0$ 为未知独立参数的虚量, $\delta \bar{\boldsymbol{\delta}}$ 为扩展虚“位移”向量。

将式(10)和(11)代入式(9),可得

$$\delta U = \int_V (\delta \bar{\boldsymbol{\delta}})^T \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_\sigma} (\delta \boldsymbol{\delta}^0)^T (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV. \quad (12)$$

与经典有限元一致,单元节点等效荷载的虚功可以表示为

$$\delta W = (\delta \boldsymbol{\delta}_e)^T \mathbf{F}_e, \quad (13)$$

式中, $\delta \boldsymbol{\delta}_e$ 为虚单元节点位移; \mathbf{F}_e 为等效荷载。

将式(12)和(13)代入虚功方程 $\delta U = \delta W$, 整理可得

$$(\delta \bar{\boldsymbol{\delta}})^T \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = (\delta \bar{\boldsymbol{\delta}})^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_e \\ - \int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV \end{array} \right\}. \quad (14)$$

由 $\delta \bar{\boldsymbol{\delta}}$ 的任意性可得

$$\int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_e \\ - \int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV \end{array} \right\}. \quad (15)$$

将式(8)代入式(15), 整理后可得

$$\int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \bar{\boldsymbol{\delta}} dV = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_e \\ - \int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV \end{array} \right\} + \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV. \quad (16)$$

式(16)可写为如下通用的有限元求解方程:

$$\bar{\mathbf{K}}_e \bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{F}}_e, \quad (17)$$

式中

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dV, \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_e \\ - \int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV \end{array} \right\} + \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV. \quad (19)$$

式(19)中等式右端第一项第二行表示指定应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 在未知独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$ 上的等效荷载向量, 第二项表示已知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 在扩展自由度向量 $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ 上的等效荷载向量.

将式(6)代入式(18), 单元刚度矩阵可进一步表示为

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_V [\mathbf{B} \quad -\mathbf{B}^0]^T \mathbf{D} [\mathbf{B} \quad -\mathbf{B}^0] dV = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & -\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^0 \\ -(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B} & (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^0 \end{bmatrix} dV. \quad (20)$$

由式(20)可以看出, 单元刚度矩阵由弹性和非弹性部分组成. 对于 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0$ 的指定应力条件, 根据结构特点和计算需求, 选取合适的独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$, 即可获得 \mathbf{B}^0 , 将 \mathbf{B}^0 代入式(19)、(20), 便可求得单元刚度矩阵以及等效荷载的具体表达式. 按单元平衡方程(17)组装为整体结构的平衡方程后, 可求解整体平衡方程确定所有未知独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$, 进而代入式(4)得到满足具有指定应力条件的非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$.

1.2 引入非弹性应变的有限元列式

设某单元有指定应力, 考虑指定应力直接定义在积分点上, 则在积分点处的非弹性应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_i^0 = \{ \sigma_{xi}^0 \quad \sigma_{yi}^0 \quad \sigma_{zi}^0 \quad \tau_{xyi}^0 \quad \tau_{yzi}^0 \quad \tau_{zxi}^0 \}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

其中, N 为单元内积分点个数.

相应地, 积分点上的非弹性应变可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^0 = \{ \varepsilon_{xi}^0 \quad \varepsilon_{yi}^0 \quad \varepsilon_{zi}^0 \quad \gamma_{xyi}^0 \quad \gamma_{yzi}^0 \quad \gamma_{zxi}^0 \}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

为简化推导, 令单元内的独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$ 为

$$\boldsymbol{\delta}^0 = - \{ \varepsilon_{x1}^0 \quad \varepsilon_{y1}^0 \quad \varepsilon_{z1}^0 \quad \gamma_{xy1}^0 \quad \gamma_{yz1}^0 \quad \gamma_{zx1}^0 \quad \dots \\ \varepsilon_{xN}^0 \quad \varepsilon_{yN}^0 \quad \varepsilon_{zN}^0 \quad \gamma_{xyN}^0 \quad \gamma_{yzN}^0 \quad \gamma_{zxN}^0 \}^T, \quad (23)$$

由式(4)、(22)、(23)可将单元内积分点 i 处未知的非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_i^0$ 表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^0 = \mathbf{B}_i^0 \boldsymbol{\delta}^0, \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{B}_i^0 = [\mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \dots \quad -\mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \dots \quad \mathbf{0}_{6 \times 6}], \quad (25)$$

$\mathbf{0}_{6 \times 6}$ 为 6×6 阶的零矩阵, $\mathbf{I}_{6 \times 6}$ 为 6×6 阶的单位阵, 即 \mathbf{B}_i^0 由 N 个 6×6 的方阵组成, 除第 i 个方阵为负的单位阵

外,其他方阵均为零矩阵.

将式(25)代入式(20),整理可得本文使用的单元刚度矩阵的具体表达式为

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & -\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^0 \\ -(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B} & (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^0 \end{bmatrix} dV = \sum_{i=1}^N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & -\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i^0 \\ -(\mathbf{B}_i^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B} & (\mathbf{B}_i^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i^0 \end{bmatrix} |J|_i w_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B}^T \mathbf{D} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \cdots \\ \mathbf{D} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} |J|_i w_i \right), \quad (26)$$

其中, $|J|_i$ 为积分点 i 对应的 Jacobi 矩阵的行列式值, w_i 为各个积分点的积分因子,如对于空间等参单元,采用 $3 \times 3 \times 3$ 的 Gauss 积分点方案时, $w_i = w_j w_k w_l$, $w_{j(k)(l)}$ 为积分点坐标对应的权系数.式(26)最后一项矩阵中省略部分均为零元素.

由式(21)和(25)可得单元内指定应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 的等效荷载为

$$-\int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV = -\sum_{i=1}^N (\mathbf{B}_i^0)^T \boldsymbol{\sigma}_i^0 |J|_i w_i = \begin{Bmatrix} |J|_1 w_1 \sigma_{x1}^0 \\ |J|_1 w_1 \sigma_{y1}^0 \\ |J|_1 w_1 \sigma_{z1}^0 \\ |J|_1 w_1 \tau_{xy1}^0 \\ |J|_1 w_1 \tau_{yz1}^0 \\ |J|_1 w_1 \tau_{zx1}^0 \\ \vdots \end{Bmatrix}_{6M \times 1}, \quad (27)$$

其中, M 为单元内有指定应力的积分点个数, $0 \leq M \leq N$.

相应地,与未知独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$ 对应的已知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的等效荷载为

$$-\int_V (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV = -\sum_{i=1}^N (\mathbf{B}_i^0)^T \boldsymbol{\sigma}_i^p |J|_i w_i = \begin{Bmatrix} |J|_1 w_1 \sigma_{x1}^p \\ |J|_1 w_1 \sigma_{y1}^p \\ |J|_1 w_1 \sigma_{z1}^p \\ |J|_1 w_1 \tau_{xy1}^p \\ |J|_1 w_1 \tau_{yz1}^p \\ |J|_1 w_1 \tau_{zx1}^p \\ \vdots \end{Bmatrix}_{6M \times 1}. \quad (28)$$

2 基于指定应力方法的混凝土开裂算法

本节基于最大拉应力准则讨论混凝土的开裂算法,即假设裂纹在垂直于最大拉应力方向的平面内形成,在裂纹形成的瞬间,只释放垂直于开裂面的正应力和平行于开裂方向的剪应力,其他应力保持不变.

本文采用指定应力方法模拟混凝土开裂是基于混凝土结构的积分点应力进行计算的,若积分点的最大拉应力没有达到混凝土的抗拉强度,即没有达到开裂状态,则没有指定应力,与之对应的非弹性应变为 0;若超过抗拉强度,则指定该最大主应力方向的应力为 0,通过求解平衡方程(17)求得与指定应力(开裂状态)对应的结构位移状态和未知非弹性应变,从而达到模拟开裂的效果.

2.1 空间应力状态下的混凝土开裂

对于空间等参单元,设积分点 i 的主应力为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 当最大主应力 σ_1 超过混凝土的抗拉强度 f_t 时,该积分点在最大主应力方向开裂,积分点 i 由空间应力状态蜕变为垂直于开裂方向的平面应力状态.基于指定应力方法,通过指定积分点 i 在主应力坐标系下的最大主应力和 3 个切应力为 0 来模拟空间应力状态下混凝土的开裂.此时,积分点 i 在主应力坐标系下的应力为 $\boldsymbol{\sigma}_i = \{0 \quad \sigma_{2i}^0 \quad \sigma_{3i}^0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$, σ_{2i}^0 和 σ_{3i}^0 未知,对

应的非弹性应变为 $\{\varepsilon_{ii}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, ε_{ii}^0 未知(通过求解平衡方程(17)得到未知独立参数 δ^0 , 将 δ^0 代入式(4)可得到 ε_{ii}^0 , 将 δ^0 代入式(17)可求得 σ_{2i}^0 和 σ_{3i}^0). 则积分点 i 在整体坐标系下的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e + \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ii}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$ 为整体坐标系下的弹性应变, \mathbf{R} 为空间坐标变换矩阵^[38],

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

l_i, m_i, n_i 为整体坐标轴在主应力坐标系的方向余弦.

根据式(24)和(25), 独立参数 $\delta^0 = -\{\varepsilon_{ii}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 时, 单元内积分点 i 处的非弹性应变可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^0 = \mathbf{B}_i^T \mathbf{R} \delta^0 = \mathbf{B}^0 \delta^0. \quad (31)$$

将式(31)代入式(20), 可得针对自由度 $\{\delta^e \ -\varepsilon_{ii}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 的单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & -\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^0 \\ -(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B} & (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^0 \end{bmatrix} dV = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \end{bmatrix} dV. \quad (32)$$

将式(32)通过 Gauss 积分展开, 得到有多个积分点有指定应力时的单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{R} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \cdots \\ \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} dV. \quad (33)$$

由应变、弹性矩阵在整体坐标系下和主应力坐标系下的变换关系^[38]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R} \boldsymbol{\varepsilon}', \quad \mathbf{D}' = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R},$$

可得主应力坐标系下的应力和整体坐标系下的应力有如下关系:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (34)$$

由式(19)、(31)和(34), 可得指定应力在未知独立参数 $\delta^0 = -\{\varepsilon_{ii}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 上的等效节点荷载如下:

$$-\int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}_i^0 dV = \int_{V_\sigma} \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{xi}^0 \\ \sigma_{yi}^0 \\ \sigma_{zi}^0 \\ \tau_{xyi}^0 \\ \tau_{yzi}^0 \\ \tau_{zxi}^0 \end{Bmatrix} dV = \int_{V_\sigma} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{2i}^0 \\ \sigma_{3i}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dV = \begin{Bmatrix} 0 \\ |\mathbf{J}|_i w_i \sigma_{2i}^0 \\ |\mathbf{J}|_i w_i \sigma_{3i}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

相应地, 已知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 在 $\delta^0 = -\{\varepsilon_{ii}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 上的等效节点荷载为

$$-\int_V (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV = \int_{V_\sigma} \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{xi}^p \\ \sigma_{yi}^p \\ \sigma_{zi}^p \\ \tau_{xyi}^p \\ \tau_{yzi}^p \\ \tau_{xzi}^p \end{Bmatrix} dV = \begin{Bmatrix} 0 \\ |J|_i w_i \sigma_{2i}^p \\ |J|_i w_i \sigma_{3i}^p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

2.2 平面应力状态下的混凝土开裂

与空间应力状态类似,当处于平面应力状态的积分点 i 的最大主应力超过混凝土的抗拉强度 f_t 时,积分点 i 由平面应力状态蜕变为平行裂纹方向的单轴应力状态.通过指定积分点 i 在空间主应力坐标系下的 2 个主应力和 3 个切应力为 0 来模拟平面应力状态下混凝土的开裂.此时,积分点 i 在主应力坐标系下的应力为 $\boldsymbol{\sigma}_i = \{0 \ 0 \ \sigma_{3i}^0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, σ_{3i}^0 未知,对应的应变为 $\{\varepsilon_{1i}^0 \ \varepsilon_{2i}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, ε_{1i}^0 和 ε_{2i}^0 未知.

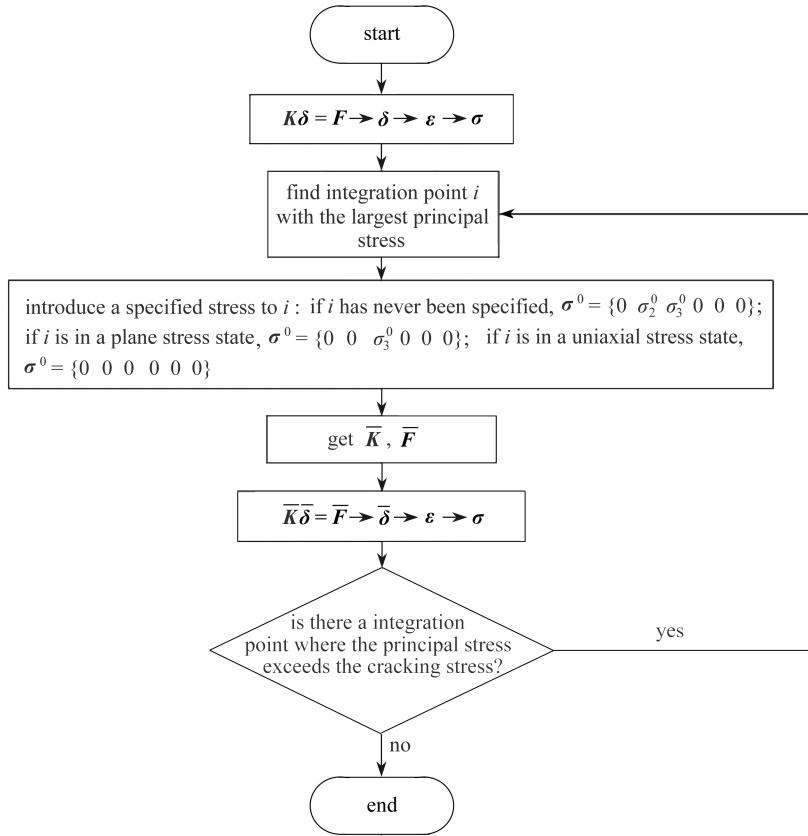


图 1 基于指定应力方法的混凝土开裂计算流程

Fig. 1 The calculation flowchart for concrete cracking based on the specified stress method

类似式(29)–(36)的推导过程,可得指定应力在未知独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0 = -\{\varepsilon_{1i}^0 \ \varepsilon_{2i}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 上的等效节点荷载为

$$-\int_{V_\sigma} (\mathbf{B}^0)^T \boldsymbol{\sigma}_i^0 dV = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ |J|_i w_i \sigma_{3i}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (37)$$

已知非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 在 $\boldsymbol{\delta}^0 = -\{\varepsilon_{1i}^0 \ \varepsilon_{2i}^0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 上的等效节点荷载为

$$-\int_V (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ | \mathbf{J} |_i w_i \boldsymbol{\sigma}_{3i}^p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

另外,对于单轴应力状态下的混凝土,当某积分点的轴向应力达到最大拉应力时,轴向方向开裂,此时该积分点完全破坏,应力全部指定为零,非弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 由未知独立参数 $\boldsymbol{\delta}^0$ 求得。

此处需要说明的是,本文模拟混凝土开裂采用的弹性本构模型,且没有考虑温度等因素的影响,所以在后续数值算例的计算程序中式(36)、(38)对应的等效荷载为0。

基于指定应力方法的混凝土开裂算法流程如图1所示。

3 数值算例

为了验证本文开裂算法的正确性和有效性,将该算法在 Visual Studio 2022 上通过编程语言 C++ 编制成有限元计算程序,通过3个算例将本文算法与理论结果以及 ABAQUS 2022 中 XFEM 计算结果进行对比。

3.1 非均质轴拉结构

算例1 为了验证本文算法的正确性,首先计算一个简单的模型,对如图2所示的受均匀拉伸荷载的矩形悬臂梁进行开裂分析。材料选用 C30 混凝土,其弹性模量 $E = 26.8 \text{ GPa}$, Poisson 比 $\nu = 0.18$, 抗拉强度 $f_{t0} = 2.5 \text{ MPa}$ 。为了检验本文算法的有限元计算结果是否正确,先对无裂纹的情况进行模拟,在 ABAQUS 中建立有限元模型,采用空间8节点完全积分单元(C3D8)进行网格划分,在梁的右端施加 $u = 0.001 \text{ m}$ 的位移荷载,采用 ABAQUS 和本文算法计算梁右端角点的位移,结果如表1所示(因为梁的右端为 x 方向的位移荷载,所以取 y 方向的位移(U_2)和 z 方向的位移(U_3)进行对比)。从表1可知,ABAQUS 的单元数对该悬臂梁算例的角点位移基本没有影响,且本文算法采用1个单元的计算结果与 ABAQUS 结果基本一致,为了计算方便,采用1个 C3D8 单元来对该悬臂梁进行开裂分析。

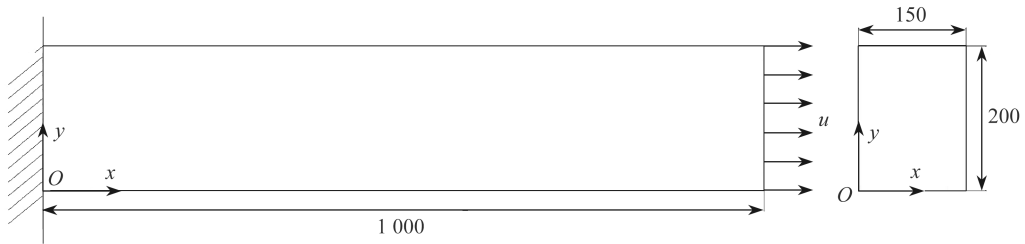


图2 受轴向拉伸荷载的矩形悬臂梁(单位: mm)

Fig. 2 The rectangular cantilever beam subject to axial tensile load (unit: mm)

表1 有限元位移计算结果对比

Table 1 Comparison of calculation results of finite element displacements

No. of node	ABAQUS (1 element)		ABAQUS (2 elements)		ABAQUS (20 elements)		the present (1 element)	
	U_2	U_3	U_2	U_3	U_2	U_3	U_2	U_3
1	-3.60E-5	-6.95E-20	-3.60E-5	-3.22E-18	-3.60E-5	-1.92E-17	-3.60E-5	-1.62E-18
2	-7.45E-19	-2.43E-18	-3.05E-20	-1.61E-18	-2.03E-17	-1.99E-17	9.83E-19	8.27E-19
3	-3.60E-5	2.70E-5	-3.60E-5	2.70E-5	-3.60E-5	2.70E-5	-3.60E-5	2.70E-5
4	9.20E-19	2.70E-5	-1.12E-18	2.70E-5	-2.03E-17	2.70E-5	-9.23E-19	2.70E-5

对于图2这种受轴向均匀拉伸荷载的悬臂梁,结构各点的应力相同,为了模拟裂纹在结构中的扩展,假设材料是非均质的,引入一个函数 $f(x, y, z)$ 来表征结构各点强度的差异性。为简化计算,假设

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{3X},$$

$$X = \max (|x_i|_{\max}, |y_i|_{\max}, |z_i|_{\max}),$$

其中, x_i, y_i, z_i 为结构某一点 i 的坐标, 则结构中某一点的强度可以表示为

$$f_i(x, y, z) = f_{i0}(1 + f(x, y, z)).$$

8 个积分点的强度及其对应的开裂位移按升序排列如表 2 所示, 表 2 中的开裂位移荷载是根据几何方程 $\varepsilon = u/L$ 和物理方程 $f_i = E\varepsilon$ 计算得到的. 根据表 2, 选择 4 种荷载工况对悬臂梁进行开裂模拟, 得到每种工况开裂的积分点个数以及裂纹扩展顺序, 结果如表 3 所示. 由表 2 和表 3 可知: 当位移荷载 (7.90×10^{-5} m) 小于所有积分点的开裂位移荷载时, 没有积分点开裂; 当位移荷载 (1.30×10^{-4} m) 大于所有积分点的开裂位移荷载时, 所有积分点全部开裂; 并且积分点的开裂个数及其裂纹扩展顺序与积分点的开裂位移荷载及强度排序完全一致, 说明本文开裂算法对非均质混凝土的开裂模拟是正确有效的.

表 2 积分点的强度及其开裂位移荷载

Table 2 The strengths of the integral points and the corresponding cracking displacement loads

No.	strength f_i / Pa	cracking displacement load u_c / m
6	2.14E6	7.99E-5
4	2.29E6	8.53E-5
2	2.33E6	8.71E-5
0	2.48E6	9.25E-5
7	3.10E6	1.16E-4
5	3.25E6	1.21E-4
3	3.30E6	1.23E-4
1	3.44E6	1.28E-4

表 3 4 种荷载工况下的开裂积分点个数及裂纹扩展路径

Table 3 The numbers of crack integral points and crack propagation paths four load conditions

	displacement load u / m			
	7.90E-5	8.00E-5	1.00E-4	1.30E-4
number of crack integral points	0	1	4	8
crack propagation path	-	6	6→4→2→0	6→4→2→0→7→5→3→1

3.2 均质受弯结构

算例 2 对如图 3 所示的承受均布荷载的悬臂 T 梁进行开裂模拟. 用 ABAQUS 建立有限元模型, 仍然采用 C3D8 单元进行网格划分, 均布荷载 $q = 60\ 000$ Pa. 采用 ABAQUS 中的 XFEM 算法模拟结构的裂纹扩展, 断裂能取为 124 N/m, 其他材料参数同算例 1.

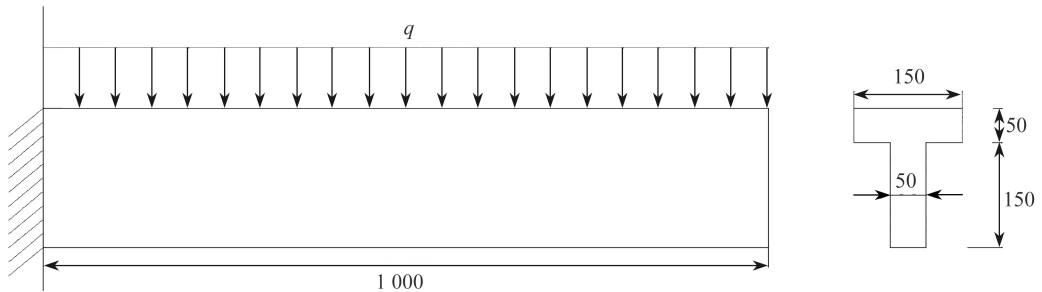


图 3 受均布荷载的悬臂 T 梁(单位: mm)

Fig. 3 The cantilever T beam under uniform load (unit: mm)

图 4 为采用 ABAQUS 计算得到的结构 STATUSXFEM 云图, 图 5 和图 6 为按照本文算法迭代 20 次和 30 次计算得到的开裂积分点顺序通过 MATLAB 模拟的裂纹扩展状态, “☆”分别为起裂点和达到指定迭代次数时的开裂点, 图 5(b)、6(b)分别为图 5(a)、6(a)的局部放大图, 后同. 根据 ABAQUS 用户手册, STATUSXFEM 的值表示富集单元的状态, STATUSXFEM 为 1 表示单元完全开裂, STATUSXFEM 为 0 表示单元没有开裂, 0~1 表示单元部分开裂. 从图 4 中可以看出, 悬臂梁左端红色区域的 STATUSXFEM 值为 0.4, 说明该区

域单元部分开裂.对比图 4 和图 5、图 6 可以发现,本文算法得到的开裂积分点所在区域与 ABAQUS 的开裂区域基本一致,都集中在梁左端的顶板位置,其中图 6 有两个开裂积分点(27#和 28#)出现在梁的腹板位置,可能是本文算法是通过单个积分点的最大主应力而不是通过单元的主应力是否超过抗拉强度来判断开裂点造成的,可以看到达到指定迭代次数(30次)时开裂积分点又转回到梁的顶板上.根据第 2 节的开裂算法可知,本文算法中每个积分点需要开裂 3 次才完全开裂,从图 5 和图 6 的开裂顺序可以看出,没有哪一个积分点有两个开裂编号,即所有出现开裂的积分点都只开裂了 1 次,与图 4 中 STATUSXFEM 值表示的部分开裂一致.由此可以看出,本文算法计算得到的开裂区域和开裂状态与 ABAQUS 的开裂计算结果基本吻合,进一步证明了本文开裂算法是正确且有效的,同时也说明了本文开裂算法对不同受力状态的混凝土结构都适用.

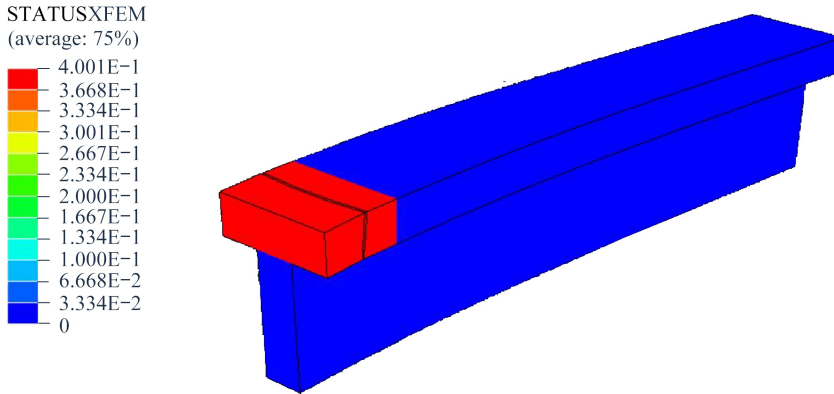


图 4 悬臂 T 梁 STATUSXFEM 云图

Fig. 4 The STATUSXFEM nephogram of the cantilever T-beam

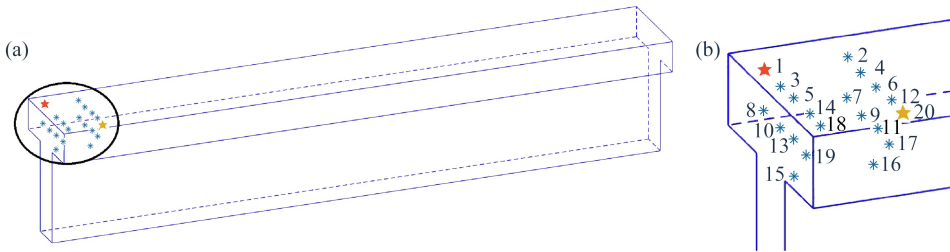


图 5 悬臂 T 梁迭代 20 次裂纹扩展状态

Fig. 5 The crack propagation state of the cantilever T-beam after 20 iterations

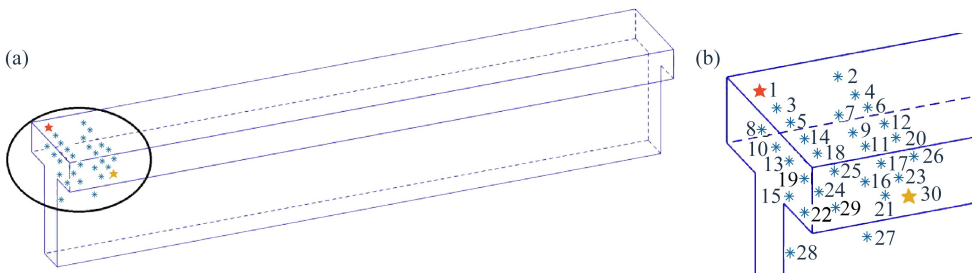


图 6 悬臂 T 梁迭代 30 次裂纹扩展状态

Fig. 6 The crack propagation state of the cantilever T-beam after 30 iterations

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

算例 3 对如图 7 所示的跨中承受集中荷载有预制裂纹的简支梁进行开裂模拟.切口深度为半梁高,混凝土的材料参数参照文献[39],弹性模量 $E = 30 \text{ GPa}$, Poisson 比 $\nu = 0.2$, 抗拉强度 $f_t = 3.33 \text{ MPa}$, 断裂能 $G_f = 124 \text{ N/m}$.在 ABAQUS 中建立该简支梁的有限元模型,切口宽度取 20 mm ,由于 ABAQUS 中的 XFEM 算法只能使用一阶单元,所以仍采用 C3D8 进行裂纹扩展计算;为了验证本文算法对高阶单元的适用性,C++程

序中采用 20 节点减缩积分单元 (C3D20R) 模拟该预制裂纹梁的裂纹扩展.同时,考虑到应力集中以及程序计算开裂时的收敛情况,在跨中选取一小块区域 (20 mm×50 mm) 作用均布位移荷载来等效跨中集中荷载.

图 8 和图 9 分别为跨中均布位移荷载 $u = -0.0004\text{ m}$, -0.004 m 时, ABAQUS 计算得到的简支梁 STATUSXFEM 云图;图 10 和图 11 为相应的均布位移荷载下,本文算法使用 C3D20R 计算得到的开裂积分点通过 MATLAB 模拟的裂纹扩展状态.当荷载较小 ($u = -0.0004\text{ m}$) 时,从图 8 可以看出,在跨中预制裂纹处沿着梁高向上出现部分开裂区域 (STATUSXFEM 值小于 1), 与常规理论一致,相应地图 10 中的开裂积分点也出现在这个区域,且这些积分点都只开裂了 1 次,与图 8 的结果一致.当荷载较大 ($u = -0.004\text{ m}$) 时 (图 9), 开裂区域在跨中预制裂纹处沿着梁高向上一直扩展到梁顶,且沿着梁高 STATUSXFEM 值逐渐减小,下半部分 STATUSXFEM 值为 1, 该区域完全开裂,上半部分 STATUSXFEM 值在 0~1 之间, 该区域部分开裂;相应地,图 11 中开裂积分点也分布在预制裂纹处沿梁高向上直到梁顶的区域,且下半部分的积分点 (“*”表示的点) 都是开裂了 2 次或者 3 次的,上半部分的积分点 (“。”表示的点) 只开裂了 1 次,与图 9 的结果基本一致.上述结果说明:本文开裂算法对有预制裂纹的结构同样适用;且相比 ABAQUS 中的 XFEM 算法,本文算法可以使用二阶单元进行裂纹扩展计算,相比一阶单元来说二阶单元的应力计算结果更精确,在其他计算环境相同的情况下,二阶单元对开裂区域和开裂状态的判断更准确,可以进行更精细的开裂分析.

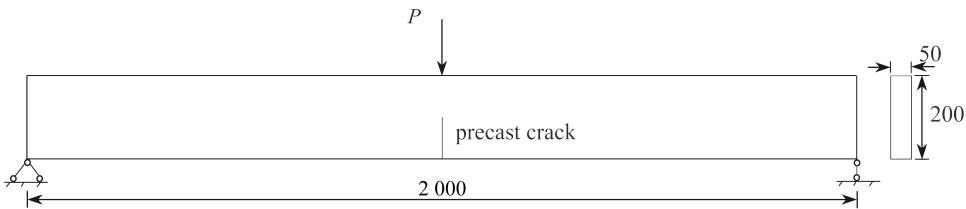


图 7 预制裂纹简支梁示意图 (单位: mm)

Fig. 7 Schematic diagram of the precracked simply supported beams (unit: mm)

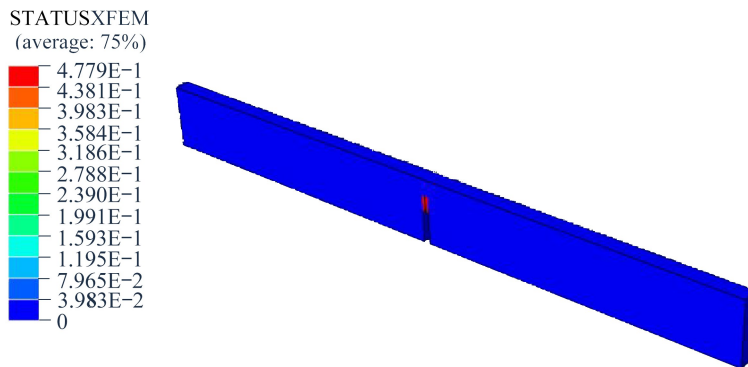


图 8 预制裂纹简支梁 STATUSXFEM 云图 ($u = -0.0004\text{ m}$)

Fig. 8 The STATUSXFEM nephogram of the precracked simply supported beam ($u = -0.0004\text{ m}$)

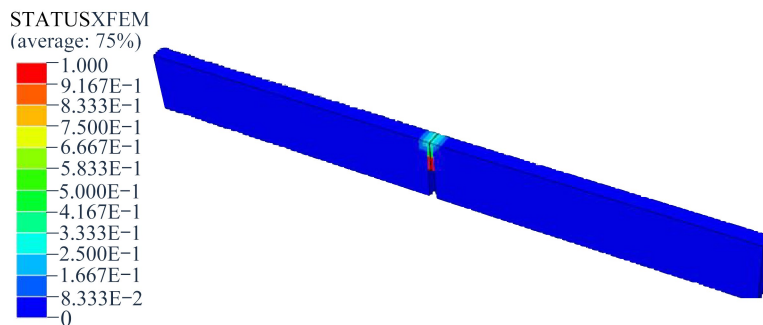


图 9 预制裂纹简支梁 STATUSXFEM 云图 ($u = -0.004\text{ m}$)

Fig. 9 The STATUSXFEM nephogram of the precracked simply supported beam ($u = -0.004\text{ m}$)

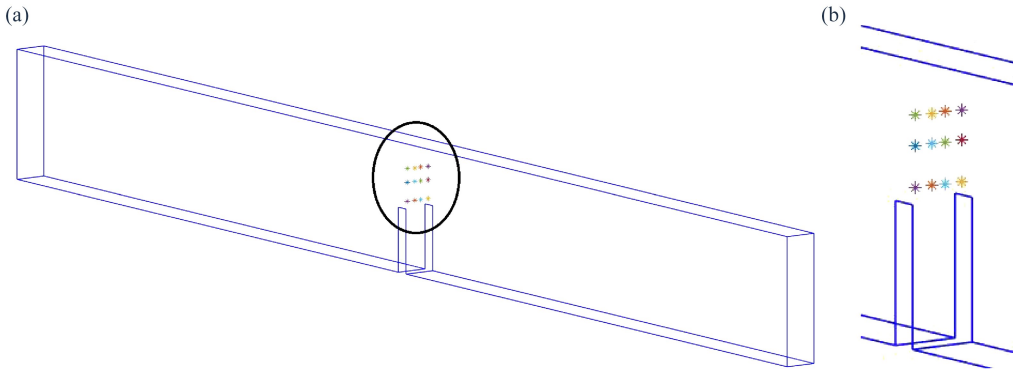


图 10 预制裂纹简支梁裂纹扩展状态 ($u = -0.0004 \text{ m}$)

Fig. 10 The crack propagation state of the precracked simply supported beams ($u = -0.0004 \text{ m}$)

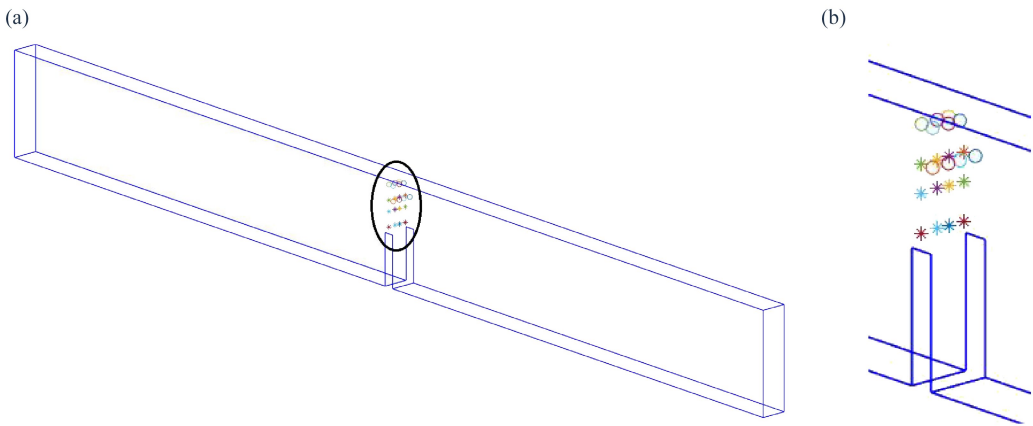


图 11 预制裂纹简支梁裂纹扩展状态 ($u = -0.004 \text{ m}$)

Fig. 11 The crack propagation state of the precracked simply supported beams ($u = -0.004 \text{ m}$)

4 结 论

本文基于指定应力方法,根据线弹性理论推导出了—种新的混凝土开裂的空间有限元列式.根据该有限元公式编制了相应的 C++ 计算程序,通过 3 个算例,采用理论结果、ABAQUS 中 XFEM 计算结果与本文结果进行对比,从材料的非均质性、不同的受力状态以及是否有预制裂纹多角度验证了本文开裂算法的正确性.与常规开裂算法相比,本文开裂算法在某个积分点开裂后,应力一旦指定为零(开裂状态),在后续计算中不会出现非零,不需要迭代过程去调整为零,大大减少了迭代次数和每次迭代过程中需要处理的数据量;相较于 ABAQUS 中的 XFEM 算法只能使用—阶单元,本文开裂算法可以使用二阶单元进行开裂计算,二阶单元相比—阶单元应力计算结果更精确,在其他计算环境相同的情况下对开裂区域和开裂状态的判断更准确,这为商业有限元软件采用二阶单元进行更精细的开裂计算提供了一种新的途径和算法.

同时,本文算法仍有一些需要改进的地方:1) 当前算法是以线弹性本构模型为基础,后续将进一步研究基于指定应力方法的其他本构模型(如弹塑性本构模型、塑性损伤本构模型等)的混凝土开裂算法;2) 当前算法以每个单元所有 Gauss 积分点的 6 个非弹性应变为独立未知参数,很大程度上增加了结构扩展刚度矩阵的规模,虽然采用稀疏矩阵存储计算能够缩短计算时间,但怎样降低该算法刚度矩阵的规模、缩短计算时间仍有必要进一步研究;3) 本文算法是通过指定单元积分点的应力为零来设置开裂点,后续可以拓展到指定单元的应力为零来设置开裂单元.

参考文献 (References):

- [1] 赵超. 基于刚体弹簧法的钢筋混凝土结构破坏过程模拟方法[D]. 北京: 中国矿业大学(北京), 2018: 1. (ZHAO

- Chao. Simulation method of failure process of reinforced concrete structure based on rigid body spring method[D]. Beijing: China University of Mining & Technology, Beijing, 2018; 1. (in Chinese)
- [2] NGO D, SCORDELIS A. Nonlinear analysis of reinforced concrete beams[J]. *Journal of the American Concrete Institute*, 1967, **64**(3): 152-163.
- [3] RASHID Y R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1968, **7**(4): 334-344.
- [4] HILLERBORG A, MODÉER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. *Cement and Concrete Research*, 1976, **6**(6): 773-781.
- [5] BAŽANT Z P, OH B H. Crack band theory for fracture of concrete[J]. *Matériaux et Construction*, 1983, **16**(3): 155-177.
- [6] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **45**(5): 601-620.
- [7] MOËS N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **46**(1): 131-150.
- [8] AGHAJANZADEH S M, MIRZABOZORG H. Concrete fracture process modeling by combination of extended finite element method and smeared crack approach[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, **101**: 306-319.
- [9] SAGERESAN N, DRATHI R, ANJALI P S. Numerical analysis of concrete fracture[J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2010, **19**(5): 559-573.
- [10] GRAVES R H, DERUCHER K N. Interface smeared crack model analysis of concrete dams in earthquakes[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, **113**(11): 1678-1693.
- [11] BAŽANT Z P, LIN F B. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1988, **114**(11): 2493-2510.
- [12] DAHLBLOM O, OTTOSEN N S. Smeared crack analysis using generalized fictitious crack model[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, **116**(1): 55-76.
- [13] ČERVENKA J, PAPANIKOLAOU V K. Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete[J]. *International Journal of Plasticity*, 2008, **24**(12): 2192-2220.
- [14] BROUJERDIAN V, KAZEMI M T. Smeared rotating crack model for reinforced concrete membrane elements[J]. *ACI Structural Journal*, 2010, **107**(4): 411-418.
- [15] HARIRI-ARDEBILI M A, SEYED-KOLBADI S M, MIRZABOZORG H. A smeared crack model for seismic failure analysis of concrete gravity dams considering fracture energy effects[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2013, **48**(1): 17-39.
- [16] HARIRI-ARDEBILI M A, SEYED-KOLBADI S M. Seismic cracking and instability of concrete dams: smeared crack approach[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2015, **52**: 45-60.
- [17] EDALAT-BEHBAHANI A, BARROS J A O, VENTURA-GOUVEIA A. Three dimensional plastic-damage multidirectional fixed smeared crack approach for modelling concrete structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, **115**: 104-125.
- [18] RIMKUS A, ČERVENKA V, GRIBNIAK V, et al. Uncertainty of the smeared crack model applied to RC beams[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **233**: 107088.
- [19] TEIXEIRA M, BERNARDO L. Evaluation of smeared constitutive laws for tensile concrete to predict the cracking of RC beams under torsion with smeared truss model[J]. *Materials*, 2021, **14**(5): 1260.
- [20] 聂建国, 王宇航. ABAQUS 中混凝土本构模型用于模拟结构静力行为的比较研究[J]. 工程力学, 2013, **30**(4): 59-67. (NIE Jianguo, WANG Yuhang. Comparison study of constitutive model of concrete in ABAQUS for static analysis of structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(4): 59-67.(in Chinese))
- [21] SIRICO A, MICHELINI E, BERNARDI P, et al. Simulation of the response of shrunk reinforced concrete elements subjected to short-term loading: a bi-dimensional numerical approach[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **174**: 64-79.
- [22] MOËS N, BELYTSCHKO T. Extended finite element method for cohesive crack growth[J]. *Engineering Frac-*

- ture Mechanics*, 2002, **69**(7): 813-833.
- [23] UNGER J F, ECKARDT S, KÖNKE C. Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(41/44): 4087-4100.
- [24] 方修君, 金峰, 王进廷. 用扩展有限元方法模拟混凝土的复合型开裂过程[J]. 工程力学, 2007, **24**(S1): 46-52. (FANG Xiujun, JIN Feng, WANG Jinting. Simulation of mixed-mode fracture of concrete using extended finite element method[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(S1): 46-52. (in Chinese))
- [25] IBRAHIMBEGOVIC A, BOULKERTOUS A, DAVENNE L, et al. Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on X-FEM, ED-FEM and novel operator split solution procedure[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **83**(4): 452-481.
- [26] CONTRAFATTO L, CUOMO M, FAZIO F. An enriched finite element for crack opening and rebar slip in reinforced concrete members[J]. *International Journal of Fracture*, 2012, **178**(1): 33-50.
- [27] 杨涛, 邹道勤. 基于 XFEM 的钢筋混凝土梁开裂数值模拟[J]. 浙江大学学报(工学版), 2013, **47**(3): 495-501. (YANG Tao, ZOU Daoqin. Numerical simulation of crack growth of reinforced concrete beam based on XFEM [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2013, **47**(3): 495-501. (in Chinese))
- [28] DU X L, JIN L, MA G W. Numerical modeling tensile failure behavior of concrete at mesoscale using extended finite element method[J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2014, **23**(7): 872-898.
- [29] JAVANMARDI M R, MAHERI M R. Extended finite element method and anisotropic damage plasticity for modelling crack propagation in concrete[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2019, **165**: 1-20.
- [30] FARON A, ROMBACH G A. Simulation of crack growth in reinforced concrete beams using extended finite element method[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2020, **116**: 104698.
- [31] HAGHANI M, NEYA B N, AHMADI M T, et al. A new numerical approach in the seismic failure analysis of concrete gravity dams using extended finite element method[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2022, **132**: 105835.
- [32] 庄茁, 柳占立, 成斌斌, 等. 扩展有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012. (ZHUANG Zhuo, LIU Zhanli, CHENG Binbin, et al. *Extended Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (in Chinese))
- [33] SAGARESAN N. Modeling fracture of concrete with a simplified meshless discrete crack method[J]. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2012, **16**(3): 417-425.
- [34] MEGURO K, HAKUNO M. Fracture analyses of concrete structures by the modified distinct element method [J]. *Structural Engineering/Earthquake Engineering*, 1989, **6**(2): 283-294.
- [35] PEARCE C J, THAVALINGAM A, LIAO Z, et al. Computational aspects of the discontinuous deformation analysis framework for modelling concrete fracture[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, **65**(2/3): 283-298.
- [36] YANG S K, CAO M S, REN X H, et al. 3D crack propagation by the numerical manifold method[J]. *Computers & Structures*, 2018, **194**: 116-129.
- [37] 王家林, 张俊波, 何琳, 等. 一类指定应力问题的变分原理与应用[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(4): 331-341. (WANG Jialin, ZHANG Junbo, HE Lin, et al. A variational principle and applications for a class of specified stress problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(4): 331-341. (in Chinese))
- [38] 江见鲸, 陆新征, 叶列平. 混凝土结构有限元分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 217-218. (JIANG Jian-jing, LU Xinzheng, YE Lieping. *Finite Element Analysis of Concrete Structures*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 217-218. (in Chinese))
- [39] 周元德, 张楚汉, 金峰. 混凝土开裂的三维非线性数值模拟[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, **43**(11): 1542-1545. (ZHOU Yuande, ZHANG Chuhan, JIN Feng. Three-dimensional nonlinear numerical model for concrete fracture analysis[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2003, **43**(11): 1542-1545. (in Chinese))