

两非线性波方程真圈解的存在性和破缺性质

李继彬^{1,2}

(1. 浙江师范大学 数学系, 浙江 金华 321004;

2. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093)

(我刊编委李继彬来稿)

摘要: 对于某些非线性波方程, 动力系统方法的分析说明所谓的圈孤子解和反圈孤子解实际上是人为的现象 所谓的圈孤子解由 3 个解合成, 不是 1 个真解 是否存在非线性波方程, 使得该方程的行波系统存在真正的 1 个圈解? 若这样的解存在, 它们有怎样的精确参数表示? 该文回答这些问题

关键词: 破缺波解; 精确圈解; 非线性波方程; 平面动力系统

中图分类号: O357.1 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.05.001

引 言

自 1981 年 Konno, Ichikawa 和 Wadadi^[1] 首次通报具有张力的弹性杆非线性振动模型存在所谓的圈孤子解以来, 20 余篇涉及圈孤子解的学术论文已发表 最近, Stepanyants^[2] 和 Parkes^[3-5] 研究了约化的 Ostrovsky 方程和短脉冲方程(SPE) 他们发现了所谓的圈周期解 我们在文献[6]中已证明, 短脉冲方程(见文献[7-8])

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx} \tag{1}$$

存在精确圈解

$$\begin{cases} \xi(\eta) = 2\sqrt{c} \operatorname{sech}\left[\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right], \\ \eta(\xi) = x + ct = -\frac{1}{2}\sqrt{c} \operatorname{tanh}\left[\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right] - \eta, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $u(x, t) = u(\xi) = u(\eta)$ 由(2)式通过参变量 η 来定义 此外, 当 $(-c) < m$ 时, 广义的 Vakhnenko 模型(GVE)(见文献[9-12])

$$-\frac{1}{x} \left(\Delta^2 u + \frac{1}{2} p u^2 + u \right) + q \Delta u = 0, \quad \Delta := \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

有精确圈解

收稿日期: 2008- 08-06; 修订日期: 2009-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671179, 10831003)

作者简介: 李继彬(1943), 男, 云南人, 教授, 博士生导师(Tel: + 86- 871- 5171274; E- mail: jibinli@gmail.com).

$$\begin{cases} \phi(\xi) = m \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{m}}{c} \xi \right], & (-\infty, \infty), \\ \xi(\eta) = x + ct = \sqrt{\frac{6}{a_2}} \left[\eta + \sqrt{m} \operatorname{tanh} \left[\frac{\sqrt{m}}{c} \eta \right] \right], \end{cases} \quad (4)$$

其中 $a_2 = \frac{1}{2}p + q, \quad m = -\frac{3(pc + q)}{2a_2}$

文献[6]的主要结果说明,事实上1个圈解由3个有界的破缺行波解(即关于行波变量 $\xi = x - ct$ 存在的 时间区间 在 时间 发展的正(负)方向是有限的解) 所谓的 圈孤子解,不是1个真实的解 而是人为地组合的假圈解 我们已经从动力学观点对文献[6]中所考虑的4个方程仔细地研究了这种人为的现象 请问是否存在非线性波方程,它的解集中有 真正的圈解? 这是很有趣的问题 答案是正面的 本文将讨论这个问题

在文献[13]中我们已经证明,具有下面的参数表示:

$$\begin{cases} \phi(\xi) = A \operatorname{sech}^p(\xi), \\ \xi(\eta) = x - ct = -A \operatorname{tanh}(\eta) + \eta_0 \end{cases} \quad (5)$$

的解满足一族非线性波方程,其中 p 是一个整数, A 和 η_0 是常数, $A > 0$ 对于 p 分别等于1和2的特别情形,存在解(5)的非线性波方程有以下形式:

$$u_{xxx} + \frac{A[A^3 - 2(3 - 4A^2)u^2 + 3(A - 2)u^4]}{c(A - u^2)^4} u_t = 0 \quad (6)$$

和

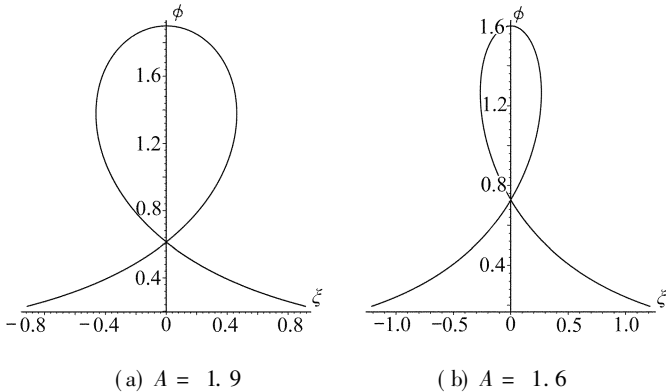
$$u_{xxx} + \frac{4[B + (3B - 3)u]}{c(1 - u)^4} u_t = 0 \quad (7)$$

我们将要研究这两个方程的 真 圈解的存在性及其性质 本文的主要结果是以下的定理

定理1 方程(6)和(7)的对应行波系统存在至少一族非闭轨道,它们位于对应行波系统的1条奇直线和鞍点的稳定和 不稳定流形所包围的区域内 这些非闭轨道确定该方程的一族破缺圈解

对于方程(1)和(3)的行波系统,类似于定理1的结论也成立 定理1的结论是第1节和第2节结果的推论

如果我们在(5)式中取 $\eta_0 = 0$, 并令 $\eta = 0$, 于是当 A 从 $A > 1$ 减少到 $0 < A < 1$ 时,函数 $-A \operatorname{tanh}(\xi)$ 的零点的个数和位置被改变 从而由(5)式定义的函数 $\phi(\xi)$ 在 $(-\infty, \infty)$ - 平面的图(即波形图)被改变,使其由大圈变到小圈($A > 1$ 时),尖波解($A = 1$ 时),最后变为光滑的孤立波解($0 < A < 1$ 时)(见图1(a)~(e))



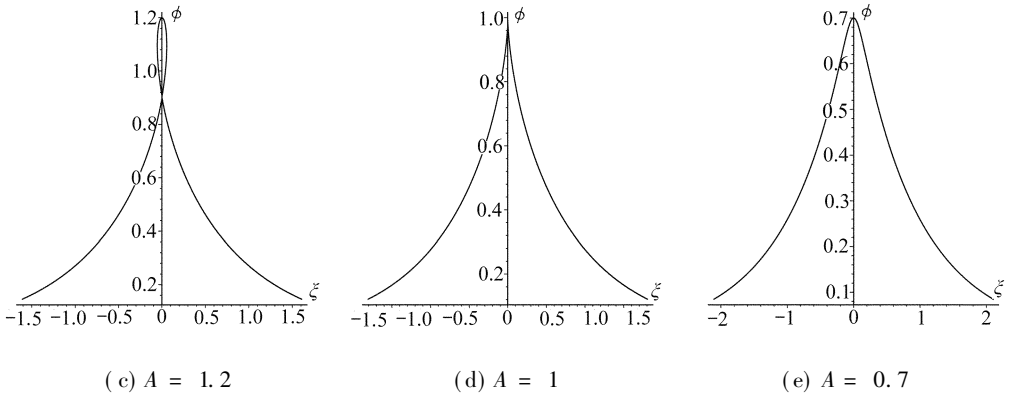


图 1 当 A 改变时,由(5)式定义的 () 的波形

1 方程(6)的破缺圈解

令 $u(x, t) = (x - \alpha)$, 我们得到方程(6)的以下行波系统:

$$-\frac{A[A^3 - 2(3A - 4A^2)^2 + 3(A - 2)^4]}{(A - 2)^4} = -\left[\frac{A[A^2 - (2 - A)^2]}{(A - 2)^3}\right] = 0$$

关于 y 积分上述方程并取积分常数为 0 得

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{A[A^2 - (2 - A)^2]}{(A - 2)^3}, \tag{8}$$

(8) 式是一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{A[A^2 - (2 - A)^2]}{2(A - 2)^2} = h \tag{9}$$

显然, (8) 式是有奇直线 $x = \pm\sqrt{A}$ 的奇行波系统(见文献[14-16]) 当 $A > 2$ 时, (8) 式只有 1 个平衡点在原点 $O(0, 0)$ 当 $0 < A < 2$ 时, (8) 式有 3 个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $P(\pm 1, 0)$, 其中 $\pm 1 = A/\sqrt{2 - A}$ 特别当 $A = 1$ 时, $x = \pm 1 = 1$ 记 $h_0 = H(0, 0) = -1/2, h_1 = H(\pm 1, 0) = -(2 - A)^2/(8(1 - A))$ 通过定性分析, 我们得到如图 2(a)~(d) 所示的(8) 式的相图

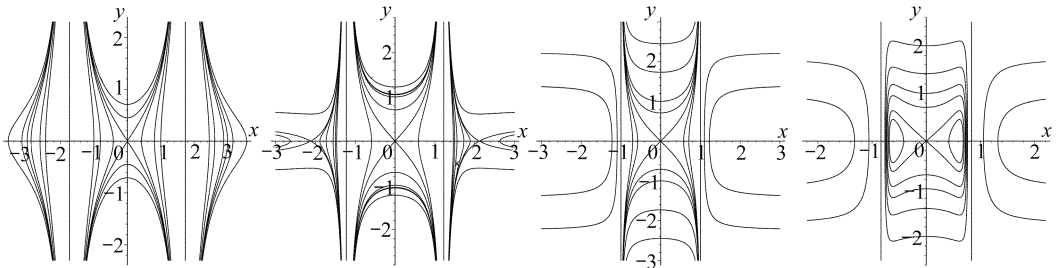


图 2 当 A 减小时, (8) 式的相图的变化

由图 2 可见, 当 $A > 1$ 时, 对于所有的 $h \in (-h_0, h_0)$, 由 $H(x, y) = h$ 所定义的水平曲线由 4 族非闭曲线所组成: 两族曲线 $\{2, 3\}$ 位于奇直线 $x = \pm\sqrt{A}$ 和鞍点 $O(0, 0)$ 的稳定和不稳定流形所包围的区域内; 另外两族 $\{1, 4\}$ 分别位于奇直线 $x = \pm\sqrt{A}$ 的左边和右边 对于每

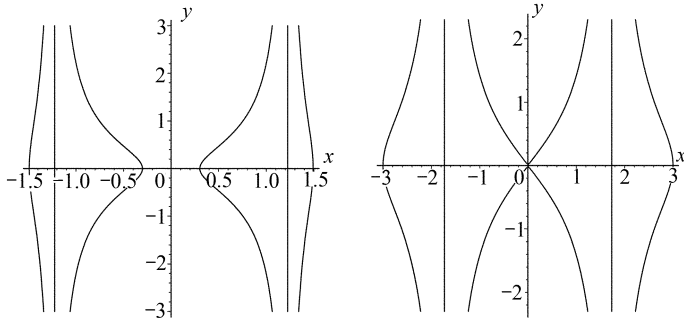
个固定的 $h < h_0$, 图 3(a) 所示为 4 条曲线 $r_{1,2,3,4}$, 它们分别穿过 4 个点 $(r_1, 0), (r_2, 0), (-r_2, 0)$ 和 $(-r_1, 0)$, 其中

$$r_{1,2}^2(h) = \frac{A}{2h} \left[(2-A) + 4h \sqrt{4-4A+8h+A^2-8Ah} \right] \quad (10)$$

当 $A = 1$ 时, $r_1 = 1$, 不存在 $r_{1,4}$ (见图 2(c))

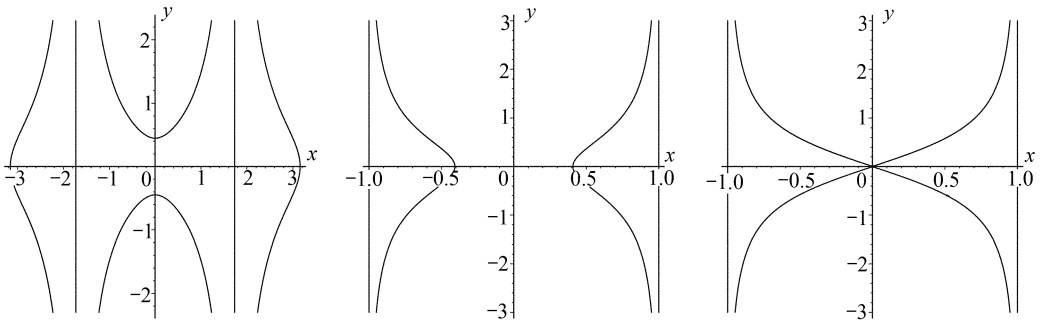
根据本人在文献[14-16]中所发展的奇行波方程的基本理论, 当 $A > 1$ 时, 在 x 的有限时间区间内, 沿着 $r_{1,2,3,4}$, (x, y) 将分别趋于 $y = \pm \sqrt{A}$, 即 $(x, y) = (x, \pm \sqrt{A})$ 是方程(6)的破缺波解

当 $h = h_0$ 时, 由 $H(x, y) = -1/2 = h_0$ 定义的水平曲线如图 3(b) 和图 3(e) 所示



(a) $A > 1, h < h_0$

(b) $A > 1, h = h_0$



(c) $A > 2, h > h_0$ 或

$$1 < A < 2, h_0 < h < h_1$$

(d) $A = 1, h < h_0$

(e) $A = 1, h = h_0$

图 3 取不同的 A 值时, 由 $H(x, y) = h$ 定义的某些水平曲线

由 $H(x, y) = h_0$ 可得 $y = \pm \sqrt{A^2 - x^2} / |A - x^2|$ 在给定的初始条件下(对应于不同的 x_0) 积分(8)式的第 1 个方程, 可得在右半相平面内鞍点 $(0, 0)$ 的稳定和不稳定流形(见图 3(c)) 的参数表示如下:

$$(x, y) = (A \operatorname{sech}(\xi), \pm [A - A \tanh(\xi) + x_0]) \quad (11)$$

取 $x_0 = 0$, 如果在(11)式中我们令 $(-x, -y)$, 则(11)式所定义的函数的图如图 1(a)~(d) 对应于不同的 $A > 1$ 和 $A = 1$ 的 A 值, 在某些文献中, 这些图分别被称为圈孤子解和峰形尖波解

然而从图 3(b) 可见, (8) 式的鞍点 $(0, 0)$ 的稳定和不稳定流形位于直线 $y = \pm \sqrt{A}$ 的左边, 即 $(x, y) = (\pm \sqrt{A}, \pm \sqrt{A})$ 这意味着对于这两个流形, 我们必须取 $(-x_0, -y_0)$ 和 (x_0, y_0) , 其中 $x_0 = \operatorname{arcosh}(\sqrt{A})$ 因此, 在右半相平面内鞍点 $(0, 0)$ 的稳定和不稳定流形实际上定义了 1 个

破缺的扭波解和 1 个破缺的反扭波解 (11) 式是 1 个假圈解

下面我们考虑方程(6)的 真 圈解的存在性, 研究由 $H(x, y) = h < h_0$ 定义的通过点 $(r_2, 0)$ 的(8)式的有界轨道 γ_2 (见图 3(a)) 的参数表示 对于某个固定的 $h < -1/2 = h_0$, (9)式所定义的 Hamilton 量可记为

$$y^2 = 2h - \frac{A[A - (2 - A)^2]}{(A - 2)^2} = \frac{(-2h)(r_1^2(h) - 2)(2 - r_2^2(h))}{(A - 2)^2},$$

其中 $r_{1,2}(h)$ 由(10) 式定义, 并且 $0 < r_2 < \sqrt{A} < r_1$

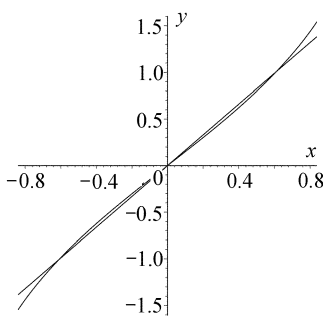
应用(8)式的第 1 个方程, 我们得到(文献[17])

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{r_2(h)}{\operatorname{dn}(\varphi, k)}, & (\varphi = \varphi_0, \varphi_1), \\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-2h}} \left[\frac{A}{r_1(h)} - r_1(h) E(\arcsin(\operatorname{sn}(\varphi)), k) + \frac{r_1(h) k^2 \operatorname{sn}(\varphi, k) \operatorname{cn}(\varphi, k)}{\operatorname{dn}(\varphi, k)} \right], \end{cases} \quad (12)$$

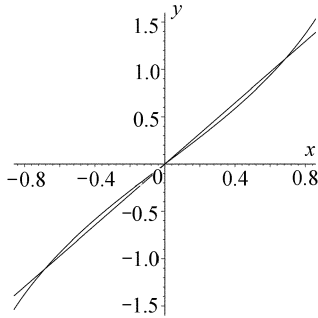
其中 $k = \frac{\sqrt{r_1^2(h) - r_2^2(h)}}{r_1(h)}, \varphi_1 = \operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{r_2(h)}{\sqrt{A}}, k\right),$

$E(\varphi, k)$ 是第二类完全椭圆积分

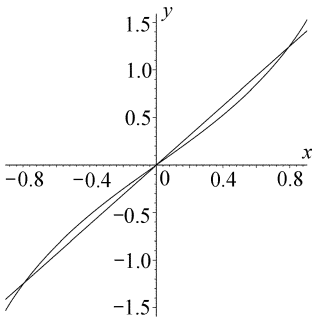
由于 γ_3 与 γ_2 关于 y - 轴对称, 故 $(-\varphi(x), -\varphi(x))$ 是 γ_3 的参数表示, 其中 (φ, φ) 由(12) 式确定



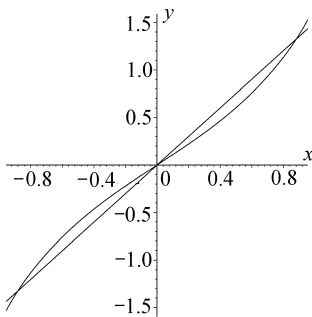
(a) $h = -101$



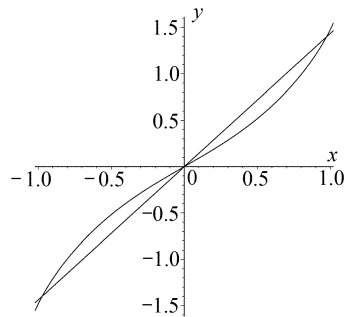
(b) $h = -51$



(c) $h = -21$



(d) $h = -11$



(e) $h = -6$

图 4 当 $A = 3$ 时, 对应于不同的 $h < h_0$, 函数 $f_1(\varphi)$ 和 $f_2(\varphi)$ 的图

显然, 由(12)式可知, 当 $\varphi = 0, \varphi(0) = 0, \varphi(0) = r_2(h)$ 易证存在 h 的值 h_m 使得对于一

切 $h < h_m < h_0$, 恒存在 ϕ_1 满足 $\phi_1 < \phi_2$ 且 $(\phi_1) = 0, (\phi_2) = r_2(h)/dn(\phi_1, k)$
 $r_2(h)$ 因此, 存在不可数无穷多的 $h < h_m$, 使得 (12) 式产生不可数无穷多的破缺的圈解 为
 证上述结论, 我们定义

$$y = f_1(\phi) = \frac{A}{r_1(h)},$$

$$y = f_2(\phi) = r_1(h)E(\arcsin(\operatorname{sn}(\phi, k)), k) - \frac{r_1(h)k^2 \operatorname{sn}(\phi, k) \operatorname{cn}(\phi, k)}{\operatorname{dn}(\phi, k)}$$

可以证明对于给定的 $h < h_m$, 直线 $y = f_1(\phi)$ 和曲线 $y = f_2(\phi)$ 至少在 3 个点 $(0, 0)$ 和
 $\left[\frac{A}{r_1(h)}, \phi_1 \right]$ 相交 事实上, 注意到 $f_1(\phi) = A/r_1(h)$ 和

$$f_2(\phi) = r_1 \left[1 - k^2 \operatorname{cn}^2(\phi, k) - \frac{k^4 \operatorname{sn}^2(\phi, k) \operatorname{cn}^2(\phi, k)}{\operatorname{dn}^2(\phi, k)} \right]$$

因此 $f_1(0) = \frac{A}{r_1(h)} > \frac{r_2(h)}{r_1(h)} = f_2(0)$

易见当 $(0, \phi_2), f_2(\phi) > 0$ 且 $f_2(\phi_2) > (r_2(h)/r_1(h)) \phi_2$ (见图 4(a) ~ (e)) 这就证明了
 了 ϕ_1 的存在性

取图 4 中所有的 h 值, 利用 (12) 式我们可得到由非闭轨道族 $\left\{ \frac{h}{2} \right\}$ 所确定的方程 (6) 的破
 缺反圈解, 如图 5(a) ~ (e) 所示 类似地, 利用 (12) 式我们可得到由非闭轨道族 $\left\{ \frac{h}{3} \right\}$ 所确定
 的方程 (6) 的破缺圈解, 如图 5(f) ~ (j) 所示 在这些图中, 我们绘出了直线 $\phi = \sqrt{A}$, 用以描
 述 (ϕ) 在 (ϕ, ϕ) - 平面的界

我们可类似地讨论 $A = 1$ 的情况 以下事实是值得注意的: 对于固定的 $A = 1$, 存在 h_m
 $< h_0$ 使得当 h 从 $-$ 增加到 h_m 时, (6) 式的圈解变成了 1 个闭曲线 例如, 当 $A = 3$, 我们
 得到图 6 所示的解

2 方程 (7) 的破缺圈解

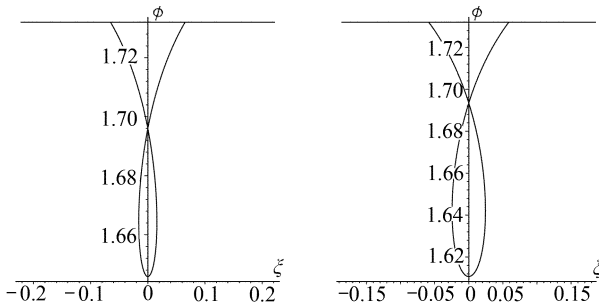
对应于方程 (7), 我们得到方程 (7) 的以下行波方程:

$$-\frac{4[B + (2B - 3)\phi]}{c(1 - \phi)^4} = - \left[\frac{2(2B - 3 + \phi^2)}{B(1 - \phi)^3} \right] = 0 \tag{13}$$

关于 ϕ 积分上述方程并取积分常数为 0 得

$$\frac{d\phi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{2(2B - 3 + \phi^2)}{B(1 - \phi)^3} \phi \tag{14}$$

(14) 式是一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为



(a) $h = -101$

(b) $h = -51$

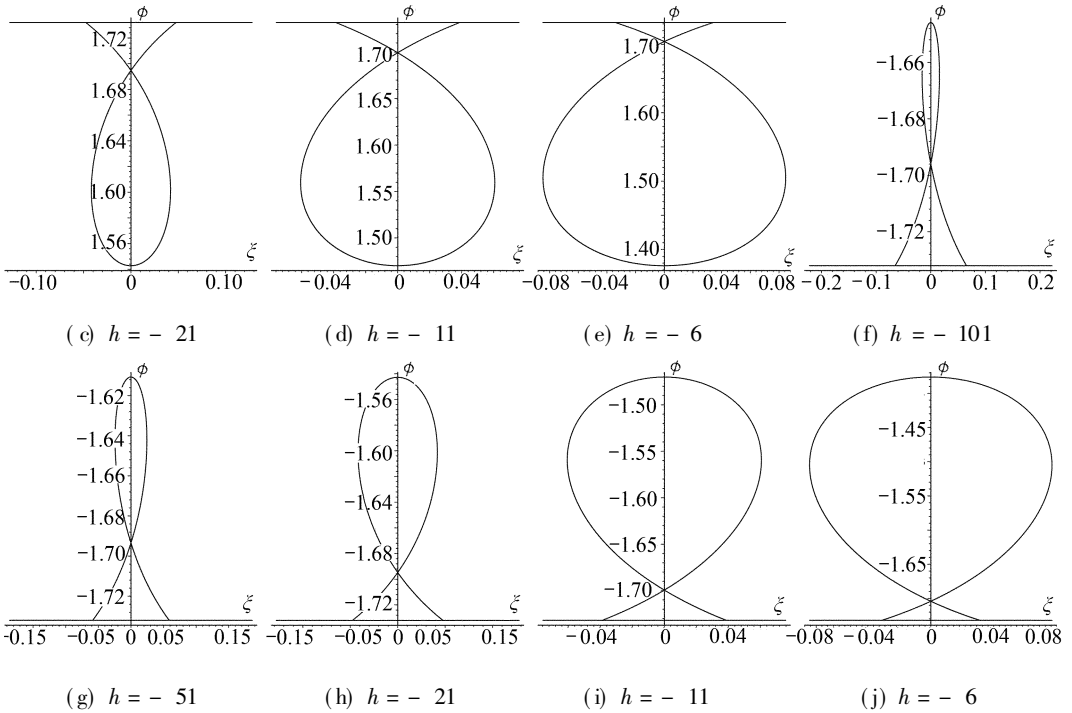


图 5 当 $A = 3$ 时, 方程 (6) 的破缺反圈解和破缺圈解

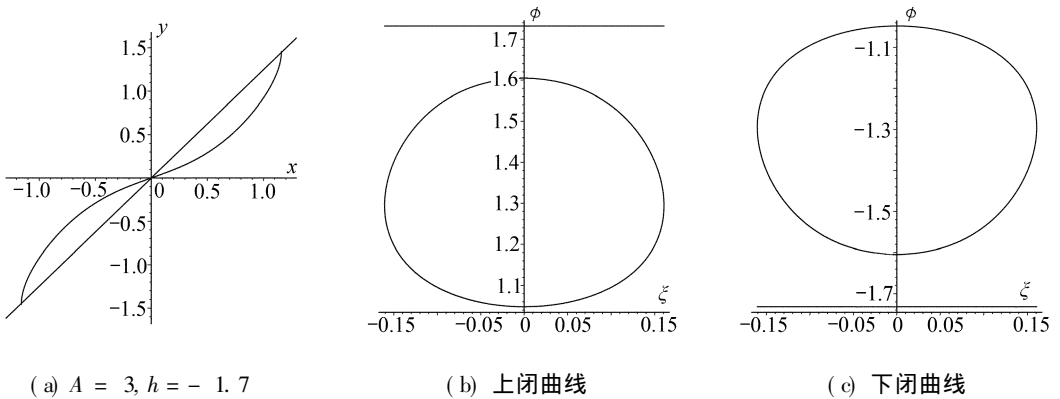


图 6 函数 $f_1(V)$ 和 $f_2(V)$ 的图以及方程 (6) 的闭曲线解

$$H_1(\leq, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{2[B - 2 + (4 - 2B)\leq - 2\leq^2 + \leq^3]}{B(1 - \leq)^2} \quad (15)$$

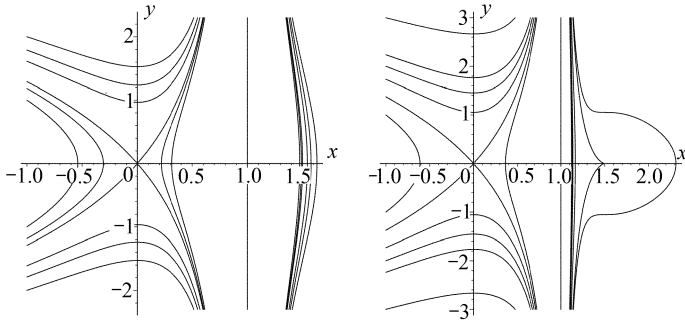
(14) 式是有奇直线 $\leq = \leq_1 = 1$ 的奇行波系统 1 当 $B > 9/8$, (14) 式只有 1 个平衡点 $O(0, 0)$ 1 当 $0 < B < 9/8$, (14) 式有 3 个平衡点 $O(0, 0), P_1(\leq_1, 0), P_2(\leq_2, 0)$, 其中 $\leq_{1,2} = (3 \pm \sqrt{9 - 8B})/21$ 特别当 $B = 1, \leq_1 = 2, \leq_2 = 11$ 记

$$h_0 = H_1(0, 0) = \frac{2(B - 2)}{B}, \quad h_1 = H_1(\leq_1, 0) = \frac{4[(17 - 14B) + (7 - 4B)\sqrt{\$}]}{B(\sqrt{\$} + 1)^2},$$

$$h_2 = H_1(\leq_2, 0) = \frac{4[(17 - 14B) - (7 - 4B)\sqrt{\$}]}{B(\sqrt{\$} - 1)^2}, \quad \$ = 9 - 8B$$

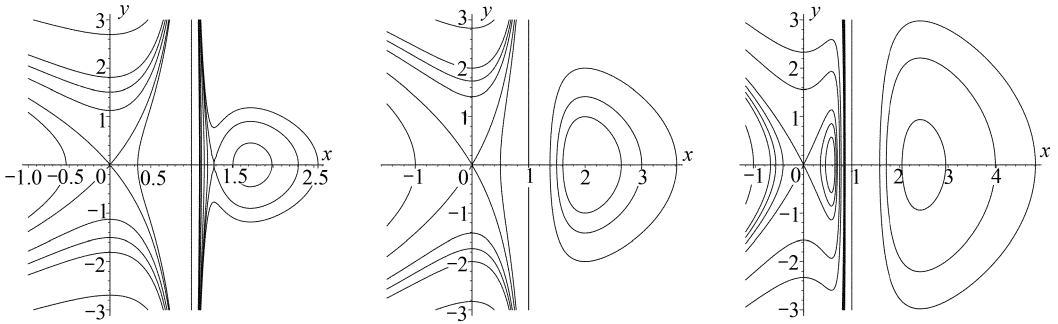
通过定性分析, 我们得到如图 7(a)~(e) 所示的 (14) 式的相图 1

对应于图 7, 我们有如图 8(a)~(d) 所示的由 $H_1(\leq, y) = h_0$ 和 $H_1(\leq, y) = h_0 - 0.5$ 定义的水平曲线图 1



(a) $B > 9/8$

(b) $B = 9/8$

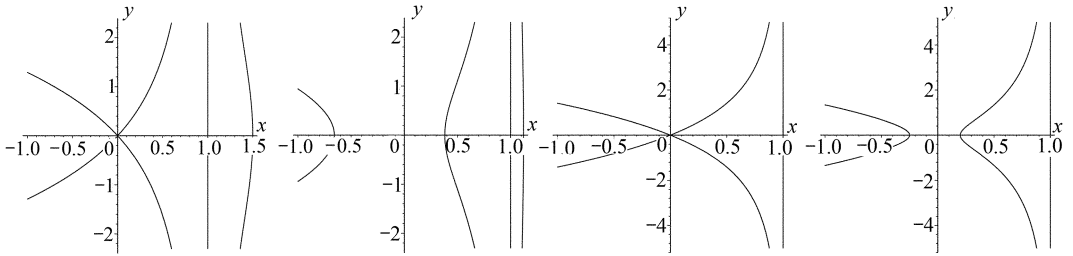


(c) $1 < B < 9/8$

(d) $B = 1$

(e) $0 < B < 1$

图 7 当 B 减小时, (14) 式的相图的变化



(a) $B > 1, h = h_0$

(b) $B > 1, h < h_0$

(c) $B = 1, h = h_0$

(d) $B = 1, h < h_0$

图 8 当 A 取不同的值时, 由 $H_1(\xi, y) = h$ 定义的水平曲线图

由于 $H_1(\xi, y) = h_0$ 可化为 $y^2 = (4\xi^2(1 - \xi/B))/(1 - \xi)^2$, 对应于(14)式的相图中第 1 象限内鞍点 $(0, 0)$ 的不稳定流形, 应用(14)的第 1 个方程在给定的初始条件下作积分, 我们得到该流形的参数表示为(5)式, 其中 $p = 21$

以下讨论在图 7(a) ~ (c) 的第 1 象限中, 位于行波系统(14)的奇直线 $\xi = \xi_s$ 和鞍点 $(0, 0)$ 的稳定和不稳定流形所包围的区域内, 由 $H_1(\xi, y) = h < h_0$ 所定义的非闭轨道 1 此时, Hamilton 量 $H_1(\xi, y) = h$ 可化为

$$y^2 = \frac{2[(4 - 2B + hB) - 2(4 - 2B + hB)\xi + (4 + hB)\xi^2 - 2\xi^3]}{B(1 - \xi)^2} = \frac{4(r_1(h) - \xi)(\xi - r_2(h))(\xi - r_3(h))}{B(1 - \xi)^2},$$

其中 $r_3(h) < 0 < r_2(h) < \xi_s < r_1(h)$ 应用(14)式中第 1 个方程作积分, 我们得到这些非闭轨道的参数表示为

$$\begin{cases} (V) = r_3(h) + \frac{r_2(h) - r_3(h)}{\operatorname{dn}^2(V, k)}, & VI (-V_{02}, V_{02}), \\ N(V) = \sqrt{\frac{B}{r_1(h) - r_3(h)}} [(1 - r_3)V - (r_2(h) - r_3(h)) \theta(\arcsin(\operatorname{sn}(V, k)), k^2, k)], \end{cases} \quad (16)$$

其中 $k^2 = (r_1(h) - r_2(h)) / (r_1(h) - r_3(h))$, V_{02} 满足 $r_3(h) + (r_2(h) - r_3(h)) / (\operatorname{dn}^2(V_{02}, k)) = 11$ 类似于对(12)式所定义 $N(V)$ 的讨论, 易证存在不可数无穷多的 $h \in (-h_M, h_m) \subset (-J, h_0)$ 使得由(16)式定义的 $N(V)$ 恰有3个零点 $V = 0, V = ? V_1, V_1 < V_{02}$ 因此, 方程(7)存在不可数无穷多的破缺圈解(见图9(a)~(e))

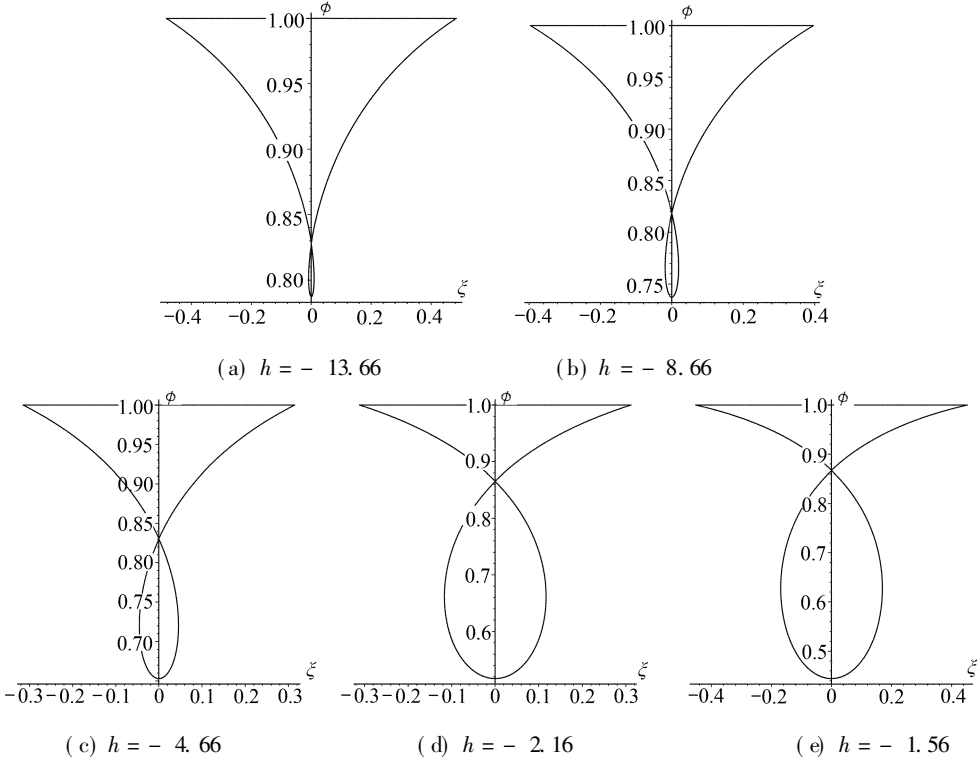


图9 当 $B = 1.5$ 时, 方程(7)的破缺反圈解

注记 系统(8)和(14)分别是参数 A 和 B 的单参数族 图2和图7已经绘出了参数空间中所有可能的相图1 由图3和图8所绘出的水平曲线可见, 这些曲线只能确定方程(6)和(7)的破缺圈解, 当 $A \setminus 1$ 和 $B \setminus 1$ 时, 不可能确定方程(6)和(7)的圈周期解1

[参 考 文 献]

[1] Konno K, Ichikawa Y- H, Wadati M. A loop soliton propagating along a stretched rope[J]. J Phys Soc Japan, 1981, 50(3): 1025- 1026.
 [2] Stepanyants Y A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: periodic wave, compactons and compound solitons[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 28(1): 193- 204.
 [3] Parkes E J. Explicit solutions of the reduced Ostrovsky equation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31(3): 602- 610.
 [4] Parkes E J. Some periodic and solitary traveling- wave solutions of the short- pulse equation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 38(1): 154- 159.

- [5] Parkes E J. Periodic and solitary traveling- wave solutions of an extended reduced Ostrovsky equation[J]. *Symmetry, Integrability and Geometry: Method and Applications*, 2008, 4(053): 1- 17.
- [6] LI Ji- bin. Dynamical understanding of loop soliton solutions for several nonlinear wave equations [J]. *Science in China, Series A: Math*, 2007, 50(6): 773- 785.
- [7] Sakovich A, Sakovich S. Solitary wave solutions of the short pulse equation[J]. *J Phys A Math Gen*, 2006, 39(22): L361- L367.
- [8] Schafer T, Wayne C E. Propagation of ultra- short optical pulses in cubic nonlinear media[J]. *Physica D*, 2004, 196(1/2): 90- 105.
- [9] Morrison A J, Parkes E J, Vakhnenko V O. The N- loop soliton solution of the Vakhnenko equation [J]. *Nonlinearity*, 1999, 12(5): 1427- 1437.
- [10] Morrison A J, Parkes E J. The N- loop soliton of the modified generalized Vakhnenko equation (a new nonlinear evolution equation) [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 16(1): 13- 26.
- [11] Vakhnenko V O, Parkes E J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation[J]. *Nonlinearity*, 1998, 11(6): 1457- 1464.
- [12] Vakhnenko V O. High- frequency soliton- like waves in a relaxing medium[J]. *J Math Phys*, 1999, 40(4): 2011- 2020.
- [13] LI Ji- bin. Family of nonlinear wave equations which yield loop solutions and solitary wave solutions [J]. *Discrete and Continuous Dynamical System*, 2009, 24(2): 897- 907.
- [14] LI Ji- bin, CHEN Guang- rong. On a class of singular nonlinear traveling wave equations[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(11): 4049- 4065.
- [15] LI Ji- bin, DAI Hui- hui. *On the Study of Singular Travelling Wave Equations: Dynamical System Approach* [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [16] LI Ji- bin, Wu J H, Zhu H P. Travelling waves for an integrable higher order KdV type wave equations[J]. *International Journal Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(8): 2235- 2260.
- [17] Byrd P F, Fridman M D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists* [M]. Berlin: Springer, 1971.

E x i s t e n c e a n d B r e a k i n g P r o p e r t y o f R e a l L o o p - S o l u t i o n s o f T w o N o n l i n e a r W a v e E q u a t i o n s

LI Ji- bin^{1,2}

(1. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University,
Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China;

2. School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China)

Abstract: Dynamical analysis revealed that for some nonlinear wave equations, loop- and inverted loop- soliton solutions are merely visual artifacts. So called loop- soliton solution consists of three solutions which is not one real solution. Whether or not there exist some nonlinear wave equations for which there exists a/ reaD loop- solution? If yes, what are their precise parametric representations of these loop traveling wave solutions? These problems are answered.

Key words: breaking wave solution; loop- solution; nonlinear wave equation; planar dynamical system