文章编号: 1000- 0887(2009)05- 0525- 13
应用数学和力学编委会, ISSN 1000- 0887

应用广义 Laguerre 函数的 Navier- Stokes 方程外部问题混合谱方法

焦裕建[1,2,3], 郭本瑜[1,2,3]

(1. 上海师范大学 数学系, 上海 200234;
2. 上海高校科学计算重点实验室, 上海 200234;
3. 上海高校计算科学 E- 研究院, 上海 200234)

(戴世强推荐)

摘要: 研究应用广义 Laguerre 函数的四阶非线性偏微分方程外部问题混合谱方法 构造了圆外 Navier- Stokes 方程流函数形式的混合谱方法, 数值结果显示了该方法在空间方向的谱精度

关 键 词: 谱方法; 四阶外部问题; Navier- Stokes 方程
中图分类号: O174.41; O241.82; O357.1 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000- 0887.2009.05.003

引 言

Navier- Stokes 方程在研究不可压缩流体中起着重要作用, 通常采用有限差分和有限元方法进行数值计算 有些学者提出了一些计算 Navier- Stokes 方程的谱方法[1- 4], 然而仅适用于周期问题和有界矩形区域上的问题 一个具有挑战性的问题是: 我们能否使用谱方法获得精确数值解? 最近, 郭本瑜等[5] 研究了二阶线性模型的圆外对称解问题, 郭本瑜等[6] 还研究了三维二阶外部问题的谱格式

本文研究四阶外部问题的混合谱方法 我们首先建立了一些应用广义 Laguerre 函数的正交逼近结果, 它们在具有球面几何的外部问题谱方法研究中起着重要作用 接下来, 我们构造单位圆外 Navier- Stokes 方程流函数形式的混合谱格式, 并分析它的广义稳定性和收敛性 这个方法有以下一些优点:

不需近似处理障碍物表面上的边界条件, 特别是避免了处理边界上速度和压力的困难

只需计算流函数, 不再计算速度和压力, 从而节省计算量 特别是数值解自动满足不可压缩性

得益于正交逼近的快速收敛性使得数值解在空间方向具有谱精度

收稿日期: 2008- 11- 14; 修订日期: 2009- 03- 17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871131); 上海市科委科技攻关资助项目(075105118); 上海市重点学科建设资助项目(S30405); 上海高校 E- 研究院基金资助(E03004)
作者简介: 焦裕建(1968), 男, 山东人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86- 21- 64324214(o); E- mail: yj- jiao@shnu.edu.cn).

1　预 备 知 识

我们首先考虑应用广义 Laguerre 函数的正交逼近．令 $= \{ \ \mid 0 < \ < \ \}$，$(\ )$ 是权函数．对于任意的整数 m　0，我们象通常一样定义带权空间 $H^m(\ )$ 具有内积 $(u, v)_{m, \ , \ }$，半范数 $\mid v \mid_{m, \ , \ }$ 和范数 $v_{m, \ , \ }$．当 $(\ )$　1 时，我们省略符号．特别地，我们用 $(u, v)_{\ , \ }$ 和 $v_{\ , \ }$ 表示空间 $L^2(\ )$ 中的内积和范数．

令 $_{\ ,\ }(\ ) = \ \mathrm{e}^{-}$，其中 > -1，> 0．广义 Laguerre 函数定义如下：

$$\tilde{\mathscr{L}}_l^{(\ ,\ )}(\ ) = \mathrm{e}^{-\ /2}\mathscr{L}_l^{(\ ,\ )}(\ ) = (1/l!)^{\ -}\ \mathrm{e}^{\ /2}\ ^{l}(\ ^{l+}\ \mathrm{e}^{-}\ ), \qquad l \quad 0$$

全体 $\tilde{\mathscr{L}}_l^{(\ ,\ )}(\ )$ 所组成的集合是一个 $L^2(\ )$－ 完备正交系，即

$$(\tilde{\mathscr{L}}_l^{(\ ,\ )}, \tilde{\mathscr{L}}_m^{(\ ,\ )}) = \begin{cases} {}_l^{(\ ,\ )}, & l = m, \\ 0, & l \quad m, \end{cases} \tag{1}$$

这里 ${}_l^{(\ ,\ )} = \ (l + \ + 1)/(\ ^{+1}l!)$．对于任意 v　$L^2(\ )$，我们有

$$v(\ ) = \sum_{l=0} v_l^{(\ ,\ )}\tilde{\mathscr{L}}_l^{(\ ,\ )}(\ ), \quad v_l^{(\ ,\ )} = \frac{1}{{}_l^{(\ ,\ )}}(v, \tilde{\mathscr{L}}_l^{(\ ,\ )})\ , \tag{2}$$

为了研究外部问题，我们需要一些准备工作．记 $(\ ) = (1 + \ )^4\mathrm{e}^{-}$ 和

$$_0H^1(\ ) = \{ v \quad H^1(\ ) \mid v(0) = 0 \},$$
$$_0H^2(\ ) = \{ v \quad H^2(\ ) \mid v(0) = \ v(0) = 0 \}$$

接下来，用 N 表示任意的正整数．$\mathscr{P}_N(\ )$ 表示次数不超过 N 的代数多项式集合，并记

$$_0\mathscr{P}_N(\ ) = \mathscr{P}_N(\ ) \quad \{ v \mid v(0) = 0 \},$$
$$_0\mathscr{P}_N^*(\ ) = \mathscr{P}_N(\ ) \quad \{ v \mid v(0) = \ v(0) = 0 \}$$

正交投影 $_0\ ^1_{N,\ ,\ } : {}_0H^1(\ ) \quad {}_0\mathscr{P}_N(\ )$ 定义如下：

$$(\ (v - {}_0\ ^1_{N,\ ,\ }v), \ )_{\ ,\ } + (v - {}_0\ ^1_{N,\ ,\ }v, \ )_{\ ,\ } = 0, \qquad {}_0\mathscr{P}_N(\ )$$

根据文献[8]的引理 A.1，如果 v　$_0H^1(\ )$，$^r v$　$L^2_{r+1,\ }(\ )$ 和整数 3　r　$N+1$，那么

$$v - {}_0\ ^1_{N,\ ,\ }v \quad {}^2_{H^1(\ )} \quad c(\ ^4 + 1/\ ^{14})(\ N)^{3-r} \quad {}^r v \quad {}^2_{r+1,\ }, \tag{3}$$

今后，我们用 c 表示一个不依赖于 $\ , N$ 和任意函数的正常数．

正交投影 $_0\ ^2_{N,\ ,\ } : {}_0H^2(\ ) \quad {}_0\mathscr{P}_N^*(\ )$ 定义如下：

$$(\ ^2(v - {}_0\ ^2_{N,\ ,\ }v), \ ^2\ )_{\ ,\ } + (\ (v - {}_0\ ^2_{N,\ ,\ }v), \ )_{\ ,\ } +$$
$$(v - {}_0\ ^2_{N,\ ,\ }v, \ )_{\ ,\ } = 0, \qquad {}_0\mathscr{P}_N^*(\ )$$

根据文献[8]的引理 2.5，如果 v　$_0H^2(\ )$，$^r v$　$L^2_{r,\ }(\ )$ 和整数 4　r　$N+1$，那么

$${}_0\ ^2_{N,\ ,\ }v - v \quad {}^2_{2,\ } \quad c(1 + 1/\ ^{10})(\ N)^{4-r} \quad {}^r v \quad {}^2_{r,\ }, \tag{4}$$

现在，我们研究应用广义 Laguerre 函数的正交投影．令

$$_0H^1_{(\ +1)^4}(\ ) = \{ v \mid v \quad H^1_{(\ +1)^4}(\ ) \text{ 且 } v(0) = 0 \},$$
$$_0H^2_{(\ +1)^4}(\ ) = \{ v \quad H^2_{(\ +1)^4}(\ ) \mid v(0) = \ v(0) = 0 \}$$

我们还记 $\mathscr{Q}_{N,\ }(\ ) = \{ \mathrm{e}^{-\ /2} \mid \quad \mathscr{P}_N(\ ) \}$，$_0\mathscr{Q}_{N,\ }(\ ) = \{ \mathrm{e}^{-\ /2} \mid \quad {}_0\mathscr{P}_N(\ ) \}$ 和 $_0\mathscr{Q}^*_{N,\ }(\ ) = \{ \mathrm{e}^{-\ /2} \mid \quad {}_0\mathscr{P}^*_N(\ ) \}$

正交投影 $_0\ ^1_{N,\ ,\ } : {}_0H^1_{(\ +1)^4}(\ ) \quad {}_0\mathscr{Q}_{N,\ }(\ )$ 定义如下：

$$(\quad (v - {}_0 \overset{1}{{}_{N,}} , \ v), \quad)_{(\ +1)^4,} \ + (v - {}_0 \overset{1}{{}_{N,}} , \ v, \quad)_{(\ +1)^4,} \ = 0,$$

$${}_0\mathscr{Q}_{N,} \ (\quad) \qquad (5)$$

引理 1.1 若 $v(Q) \ I \ {}_0H^1_{(Q+1)^4}(+)$ 且 $5^r_Q(e^{BQ/2}v(Q)) \ I \ L^2_{X_{r+1,B}}(+)$, 则对整数 $3 [\ r [\ N+1$,

$$+ {}_0 0^1_{N,B,+} v - v +^2_{1,(Q+1)^4,+} [\quad c(B^6 + 1/B^{14})(BN)^{3-r} + 5^r_Q(e^{BQ/2}v) +^2_{X_{r+1,B},+} 1 \qquad (6)$$

证明 记 ${}_0\hat{0}^1_{N,B,+}v = e^{-BQ/2}{}_0 0^1_{N,B,+}(e^{BQ/2}v)1$ 由计算可得

$$+ 5_Q({}_0\hat{0}^1_{N,B,+}v - v) +^2_{(Q+1)^4,+} [$$

$$c_{Q+}(Q+1)^4 e^{-BQ}((5_Q({}_0 0^1_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v))^2 +$$

$$B^2({}_0 0^1_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v)^2) dQ \qquad (7)$$

$$+ {}_0\hat{0}^1_{N,B,+}v - v +^2_{(Q+1)^4,+} = {}_{Q+}(Q+1)^4 e^{-BQ}({}_0 0^1_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v)^2 dQ1 \qquad (8)$$

令 $<(Q) = {}_0\hat{0}^1_{N,B,+}v(Q) \ I \ {}_0\mathscr{Q}_{N,B}(+)1$ 根据投影定理, 由式(7)、(8)和(3)得到

$$+ {}_0 0^1_{N,B,+}v - v +^2_{1,(Q+1)^4,+} [\quad + 5_Q(v - <) +^2_{(Q+1)^4,+} + \ + v - < +^2_{(Q+1)^4,+} [$$

$$c(B^6 + 1/B^{14})(BN)^{3-r} + 5^r_Q(e^{BQ/2}v) +^2_{X_{r+1,B},+} 1 \qquad t$$

正交投影 ${}_0 0^2_{N,B,+} : {}_0H^2_{(Q+1)^4}(+) \ y \ {}_0\mathscr{Q}^*_{N,B}(+)$ 定义如下:

$$(5^2_Q(v - {}_0 0^2_{N,B,+}), 5^2_Q<)_{(Q+1)^4,+} + (5_Q(v - {}_0 0^2_{N,B,+}v), 5_Q<)_{(Q+1)^4,+} +$$

$$(v - {}_0 0^2_{N,B,+}v, <)_{(Q+1)^4,+} = 0, \qquad P< I \ {}_0\mathscr{Q}^*_{N,B}(+)1 \qquad (9)$$

引理 1.2 若 $v(Q) \ I \ {}_0H^2_{(Q+1)^4}(+)$ 且 $5^r_Q(e^{BQ/2}v(Q)) \ I \ L^2_{X_{r,B}}(+)$, 则对整数 $4 [\ r [\ N+1$,

$$+ {}_0 0^2_{N,B,+}v - v +^2_{2,(Q+1)^4,+} [\quad c(B^4 + 1/B^{10})(BN)^{4-r} + 5^r_Q(e^{BQ/2}v) +^2_{X_{r,B},+} 1 \qquad (10)$$

证明 记 ${}_0\hat{0}^2_{N,B,+}v = e^{-BQ/2}{}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v)1$ 由计算得到

$$+ 5^2_Q({}_0\hat{0}^2_{N,B,+}v - v) +^2_{(Q+1)^4,+} [$$

$$c_{Q+}(Q+1)^4 e^{-BQ}((5^2_Q({}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v))^2 +$$

$$B^2(5_Q({}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v))^2 + B^4({}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v)^2) dQ1 \qquad (11)$$

类似地

$$+ 5_Q({}_0\hat{0}^2_{N,B,+}v - v) +^2_{(Q+1)^4,+} [$$

$$c_{Q+}(Q+1)^4 e^{-BQ}((5_Q({}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v))^2 +$$

$$B^2({}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v)^2) dQ1 \qquad (12)$$

$$+ {}_0\hat{0}^2_{N,B,+}v - v +^2_{(Q+1)^4,+} = {}_{Q+}(Q+1)^4 e^{-BQ}({}_0 0^2_{N,B,+}(e^{BQ/2}v) - e^{BQ/2}v)^2 dQ1 \qquad (13)$$

令 $<(Q) = {}_0\hat{0}^2_{N,B,+}v(Q) \ I \ {}_0\mathscr{Q}^*_{N,B}(+)1$ 根据投影定理, 式(11)~(13)和(4)推出

$$+ {}_0 0^2_{N,B,+}v - v +^2_{2,(Q+1)^4,+} [\quad c(B^4 + 1/B^{10})(BN)^{4-r} + 5^r_Q(e^{BQ/2}v) +^2_{X_{r,B},+} 1 \qquad t$$

在此节末尾, 我们来回顾一下 Fourier 逼近1 令 $I = [0, 2P)1$ 对任意 $L \setminus 0, H^L(I)$ 表示具有半范数 $| v |_{L,I}$ 和范数 $+ v +_{L,I}$ 的 Sobolev 空间1 所有函数 e^{ilH} 的集合是一个 $L^2(I)$ - 完备正交系1 对任何整数 $L \setminus 0, H^L_p(I)$ 表示 $H^L(I)$ 中所有直到 $L-1$ 阶导数都以 $2P$ 为周期的实值函数构成的子空间1 我们分别用 $+ v +_{L,I}$ 和 $| v |_{L,I}$ 表示空间 $H^L_p(I)$ 的范数和半范数1 此外, 我们用 $(u, v)_I$ 表示空间 $L^2(I)$ 的内积1 对于任意 $s > 0, H^s_p(I)$ 用空间插值来定义1

用 $V_M(I)$ 表示次数不超过 M 的实值三角函数的集合1 正交投影 $P_{M,I}: L^2(I) \ y \ V_M(I)$ 定

义如下:

$$(v - P_{M,I}v, \varphi)_I = 0, \qquad \forall \varphi \in V_M(I). \tag{14}$$

根据文献[9]的定理 8.2, 对任意 $v \in H_p^s(I)$ 和实数 $0 \le \mu \le s$,

$$\| v - P_{M,I}v \|_{\mu, I} \le cM^{\mu - s} | v |_{s, I}. \tag{15}$$

2 混合谱方法

令 $D = \{(r, \theta) \mid r \ge 1, 0 \le \theta < 2\pi\}$。对于任意标量函数 $v(r, \theta)$,

$$\Delta v = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r v) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 v, \qquad \nabla v = \left(\partial_r v, \frac{1}{r}\partial_\theta v\right)^{\mathrm T},$$

$$G(u, v) = \frac{1}{r}\partial_\theta u\,\partial_r \Delta v - \frac{1}{r}\partial_r u\,\partial_\theta \Delta v.$$

对于任意向量函数

$$\mathbf{w} = (w_r, w_\theta)^{\mathrm T}, \qquad \nabla\times \mathbf{w} = \frac{1}{r}\partial_r(r w_\theta) - \frac{1}{r}\partial_\theta w_r.$$

我们用 $W(r, \theta, t)$ 和 $W_0(r, \theta)$ 分别表示流函数及其初始状态。$F(r, \theta, t)$ 和 $\nu > 0$ 表示外力密度和动力粘度。为了简单起见, 我们只考虑非滑动固定边界$(r = 1)$的情况。我们还假设当 $r \to \infty$ 时, $W(r, \theta, t)$ 和 $\partial_r W(r, \theta, t)$ 都趋向于 0。此时, Navier-Stokes 方程的流函数形式如下所述:

$$\begin{cases} \partial_t \Delta W(r, \theta, t) + G(W(r, \theta, t), W(r, \theta, t)) - \nu \Delta^2 W(r, \theta, t) = \\ \qquad \nabla\times F(r, \theta, t), & \text{在 } D \times (0, T] \text{ 中}, \\ W(1, \theta, t) = \partial_r W(1, \theta, t) = 0, & \theta \in [0, 2\pi), t \in [0, T], \\ \lim\limits_{r\to\infty} W(r, \theta, t) = \lim\limits_{r\to\infty} \partial_r W(r, \theta, t) = 0, & \theta \in [0, 2\pi), t \in [0, T], \\ W(r, \theta, 0) = W_0(r, \theta), & \text{在 } D \text{ 中}. \end{cases} \tag{16}$$

记

$$_0H^1(D) = \{v \in H^1(D) \mid v(1, \theta) = 0\},$$
$$_0H^2(D) = \{v \in H^2(D) \mid v(1, \theta) = \partial_r(1, \theta) = 0\}.$$

我们可以验证: 若 $W_0 \in {}_0H^1(D)$ 和 $F \in (L^2(0, T; H^{-2}(D)))^2$, 则式(16)在空间 $L^\infty(0, T; H^1(D)) \cap L^2(0, T; {}_0H^2(D))$ 中有唯一解。

为了应用广义 Laguerre 函数来求解式(16), 我们令

$$r = \rho + 1, \quad \Lambda = \{(\rho, \theta) \mid \rho \ge 0, 0 \le \theta < 2\pi\}$$

和 $$(u, v)_\Lambda = \iint_\Lambda u(\rho, \theta) v(\rho, \theta)(\rho + 1)\,\mathrm d\rho\,\mathrm d\theta, \quad \| v \|_\Lambda = (v, v)_\Lambda^{1/2}.$$

对于任意整数 $s \ge 0$, 我们用通常的方式定义空间 $H^s(\Lambda)$。特别地

$$H_p^s(\Lambda) = \{v \in H^s(\Lambda) \mid \partial_\rho^k v(\rho, \theta + 2\pi) = \partial_\rho^k v(\rho, \theta), 0 \le k \le s - 1\},$$
$$_0H_p^1(\Lambda) = \{v \in H_p^1(\Lambda) \mid v(0, \theta) = 0\},$$
$$_0H_p^2(\Lambda) = \{v \in H_p^2(\Lambda) \mid v(0, \theta) = \partial_\rho v(0, \theta) = 0\}.$$

我们引入一些记号:

$$\Delta v = \frac{1}{\rho + 1}\partial_\rho((\rho + 1)\partial_\rho v) + \frac{1}{(\rho + 1)^2}\partial_\theta^2 v, \qquad \tilde\nabla v = \left(\partial_\rho v, \frac{1}{\rho + 1}\partial_\theta v\right)^{\mathrm T},$$

$$G(u, v) = \frac{1}{\rho + 1}\partial_\theta u\,\partial_\rho \Delta v - \frac{1}{\rho + 1}\partial_\rho u\,\partial_\theta \Delta v.$$

若 $v \in H^2_p(\Omega)$ 和 $u \in {}_0H^1_p(\Omega)$，则

$$(\Delta v, u)_\Omega = -(\tilde{\nabla} v, \tilde{\nabla} u)_\Omega. \tag{17}$$

若 $v \in H^2_p(\Omega)$ 和 $u \in {}_0H^2_p(\Omega)$，则

$$(\Delta v, u)_\Omega = (v, \Delta u)_\Omega. \tag{18}$$

此外，对于任意向量函数 $\mathbf{w} = (w_\rho, w_\theta)^{\mathrm{T}}$，

$$\tilde{\nabla} \times \mathbf{w} = \frac{1}{\rho+1}\partial_\rho((\rho+1)w_\theta) - \frac{1}{\rho+1}\partial_\theta w_\rho.$$

在以后的讨论中，我们还要用到记号

$$J(u(t), v(t), w(t)) = \left(\Delta v(t), \frac{1}{\rho+1}\partial_\theta u(t)\partial_\rho w(t) - \frac{1}{\rho+1}\partial_\rho u(t)\partial_\theta w(t)\right)_\Omega.$$

显然

$$J(u, v, w) + J(w, v, u) = 0, \quad J(u, v, u) = 0. \tag{19}$$

若 $v \in H^2_p(\Omega)$, $u, w \in {}_0H^2_p(\Omega)$，则可通过分部积分得到

$$J(u, v, w) = -(G(u, v), w)_\Omega. \tag{20}$$

接下来，记

$$W(\rho, \theta, t) = W(r, \theta, t), \quad W_0(\rho, \theta) = W_0(r, \theta), \quad F(\rho, \theta, t) = F(r, \theta, t).$$

于是，式(16)被改写成如下等价形式:

$$\begin{cases} \partial_t \Delta W(\rho, \theta, t) + G(W(\rho, \theta, t), W(\rho, \theta, t)) - \nu \Delta^2 W(\rho, \theta, t) = & \\ \qquad \tilde{\nabla} \times F(\rho, \theta, t), & \text{在 } \Omega \times (0, T] \text{ 中}, \\ W(0, \theta, t) = \partial_\rho W(0, \theta, t) = 0, & \theta \in [0, 2\pi), t \in [0, T], \\ \lim\limits_{\rho \to \infty} W(\rho, \theta, t) = \lim\limits_{\rho \to \infty} \partial_\rho W(\rho, \theta, t) = 0, & \theta \in [0, 2\pi), t \in [0, T], \\ W(\rho, \theta, 0) = W_0(\rho, \theta), & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{21}$$

为了设计合适的混合谱格式，我们还需要进行如下的变换:

$$U(\rho, \theta, t) = (\rho+1)^{-3/2} W(\rho, \theta, t), \quad U_0(\rho, \theta) = (\rho+1)^{-3/2} W_0(\rho, \theta),$$
$$f(\rho, \theta, t) = (\rho+1)^{-3/2} F(\rho, \theta, t).$$

此时式(21)转化为

$$\begin{cases} \partial_t \Delta((\rho+1)^{3/2} U(\rho, \theta, t)) + G((\rho+1)^{3/2} U(\rho, \theta, t), & \\ \qquad (\rho+1)^{3/2} U(\rho, \theta, t)) - \nu \Delta^2((\rho+1)^{3/2} U(\rho, \theta, t)) = & \\ \qquad \tilde{\nabla} \times ((\rho+1)^{3/2} f(\rho, \theta, t)), & \text{在 } \Omega \times (0, T] \text{ 中}, \\ U(0, \theta, t) = \partial_\rho U(0, \theta, t) = 0, & \theta \in [0, 2\pi), t \in [0, T], \\ \lim\limits_{\rho \to \infty} (\rho+1)^{3/2} U(\rho, \theta, t) = \lim\limits_{\rho \to \infty} (\rho+1)^{3/2} \partial_\rho (U(\rho, \theta, t)) = 0, & \\ & \theta \in [0, 2\pi), t \in [0, T], \\ U(\rho, \theta, 0) = U_0(\rho, \theta), & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{22}$$

我们用 $\omega(\rho)$ 表示某权函数，相应的我们用 $(u, v)_{\omega,\Omega}$ 和 $\|v\|_{\omega,\Omega} = (v, v)^{1/2}_{\omega,\Omega}$ 表示空间 $L^2_\omega(\Omega)$ 的内积和范数. 令 $\chi_m(\rho) = (\rho+1)^m$, $m \geq 0$. 显然有 $(u, v)_{\chi_0,\Omega} = (u, v)_\Omega$ 和 $\|v\|_{\chi_0,\Omega} = \|v\|_\Omega$. 我们定义空间

$${}_0H^1_{p,\chi_4,\chi_2}(\Omega) = \left\{ v \mid v(\rho, \theta + 2\pi) = v(\rho, \theta),\ v(0, \theta) = 0 \text{ 和 } \|v\|_{1,\chi_4,\chi_2,\Omega} < \infty \right\},$$

配有如下的范数:

$$+ v +_{1, X_4, X_2, 8} = (+ 5Q + ^2_{X_4, 8} + \ + 5H + ^2_{X_2, 8} + \ + v + ^2_{X_2, 8})^{1/2},$$

又定义空间

$$_0H^2_{p, X_4, X_2, X_0}(8) = \Big\{ v \mid v(Q, H + 2P) = v(Q, H),$$

$$v(0, H) = 5_P v(0, H) = 0 \text{ 和 } + v +_{2, X_4, X_2, X_0, 8} < \ ] \Big\},$$

其范数为

$$+ v +_{2, X_4, X_2, X_0, 8} = (+ 5^2_Q v + ^2_{X_4, 8} + \ + 5^2_H v + ^2_{X_0, 8} + \ + v + ^2_{1, X_4, X_2, 8})^{1/2} 1$$

现在我们推导带权空间中式(22)的弱形式1 也就是求函数 $U \ I \ L^{]}(0, T; H^1_{p, X_4, X_2}(8)) \ H \ L^2(0, T; {}_0H^2_{p, X_4, X_2, X_0}(8))$, 使得

$$\left\{\begin{array}{l} (5_t \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}U(t)), \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}v))_8 + \\ \quad J((Q+1)^{3/2}U(t), (Q+1)^{3/2}U(t), (Q+1)^{3/2}v) + \\ \quad L(\$((Q+1)^{3/2}U(t)), \$((Q+1)^{3/2}v))_8 = \\ \quad -(\tilde{\ }_@((Q+1)^{3/2}f(t)), (Q+1)^{3/2}v)_8, \\ \qquad\qquad P\, v \ I \ {}_0H^2_{p, X_4, X_2, X_0}(8), \ t \ I \ (0, T], \\ U(0) = U_0, \qquad\qquad \text{在 } 8 \text{ 中} 1 \end{array}\right. \tag{23}$$

现在构造混合谱格式1 令 $V^*_{N,M}(8) = {}_0\mathcal{Q}_{N,B}(+) \ V_M(I)$ 和 $V_{N,M}(8) = {}_0\mathcal{Q}^*_{N,B}(+) \ V_M(I) 1$ 正交投影 $_0 0^1_{N,M}: {}_0H^1_{p, X_4, X_2}(8) \ y \ V^*_{N,M}(8)$ 定义如下:

$$(5Q({}_0 0^1_{N,M}v - v), 5Q<)_{X_4, 8} + (5H({}_0 0^1_{N,M}v - v), 5H<)_{X_2, 8} +$$

$$({}_0 0^1_{N,M}v - v, <)_{X_2, 8} = 0, \qquad P < I \ V^*_{N,M}(8) 1$$

正交投影 $_0 0^2_{N,M}: {}_0H^2_{p, X_4, X_2, X_0}(8) \ y \ V_{N,M}(8)$ 定义如下:

$$(5^2_Q({}_0 0^2_{N,M}v - v), 5^2_Q<)_{X_4, 8} + (5^2_H({}_0 0^2_{N,M}v - v), 5^2_H<)_{X_0, 8} +$$

$$(5Q({}_0 0^2_{N,M}v - v), 5Q<)_{X_4, 8} + (5H({}_0 0^2_{N,M}v - v), 5H<)_{X_2, 8} +$$

$$({}_0 0^2_{N,M}v - v, <)_{X_2, 8} = 0, \qquad P < I \ V_{N,M}(8) 1$$

计算式(23)的混合谱格式就是求函数 $u_{N,M}(t) \ I \ V_{N,M}(8)$, 使得

$$\left\{\begin{array}{l} (5_t \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)), \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}<))_8 + \\ \quad J((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2}<) + \\ \quad L(\$((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)), \$((Q+1)^{3/2}<))_8 = \\ \quad -(\tilde{\ }_@((Q+1)^{3/2}f(t)), (Q+1)^{3/2}<)_8, \\ \qquad\qquad\qquad P < I \ V_{N,M}(8), \ t \ I \ (0, T], \\ u_{N,M}(0) = u_{N,M,0} = {}_0 0^1_{N,M}U_0, \qquad \text{在 } 8 \text{ 中} 1 \end{array}\right. \tag{24}$$

原问题(16)的数值解由 $w_{N,M}(r, H, t) = r^{3/2}u_{N,M}(r-1, H, t)$ 给出1

现在检验数值解在空间 $L^{]}(0, T; H^1(8)) \ H \ L^2(0, T; {}_0H^2(8))$ 中的有界性1 我们在式(24)中取 $< = 2u_{N,M}(t)$ 并应用式(19)得到

$$5_t + \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)) + ^2_8 + 2L + \$((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)) + ^2_8 =$$

$$-2(\tilde{\ }_@((Q+1)^{3/2}f(t)), (Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t))_8 1 \tag{25}$$

若 w 和 v 关于 H 以 2P 为周期, 且当 Q y 0,] 时 $(Q+1)wH \ y \ 0$, 则由分部积分得到

$$2(\tilde{\ } @_w, v)_8 [\ a + \tilde{\ }\ v +_8^2 + (1/a) + w +_8^2, \quad a > 01 \tag{26}$$

所以由式(25) 推出

$$5_{t} + \tilde{\ }\ ((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)) +_8^2 + 2L + \$((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)) +_8^2 [$$
$$a + \tilde{\ }\ ((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)) +_8^2 + (1/a) + (Q+1)^{3/2}f(t) +_8^2 1 \tag{27}$$

令
$$E(v, R, t) = + \tilde{\ }\ v(t) +_8^2 + R\int_{Q_0}^{t} + \$ v(s) +_8^2 \mathrm{d}s 1 \tag{28}$$

用 e^{-at} 乘式(27) 的两边, 得到的结果再对 t 积分得到

$$E((Q+1)^{3/2}u_{N,M}, 2L, t) [$$
$$e^{at}\left(+ \tilde{\ }\ ((Q+1)^{3/2} 00^{1}_{N,M,B}U_0) +_8^2 + \frac{1}{a}\int_{Q_0}^{t} e^{-as} + (Q+1)^{3/2}f(s) +_8^2 \mathrm{d}s \right) 1 \tag{29}$$

此外, 令 $00^{1,*}_{N,M}v(r) = 00^{1}_{N,M}((Q+1)^{-3/2}v(Q+1)) | Q=r-1$ 和 $E^*(v, R, t) = + \ v(t) +_D^2 + R\int_{Q_0}^{t} + \$ v(s) +_D^2 \mathrm{d}s 1$ 由式(29) 得到

$$E^*(w_{N,M}, 2L, t) [\ e^{at}\left(+ \ (r^{3/2} 00^{1,*}_{N,M}W_0) +_D^2 + \frac{1}{a}\int_{Q_0}^{t} e^{-as} + F(s) +_D^2 \mathrm{d}s \right) 1$$

3 误 差 分 析

下面 4 个引理来自文献[8] 的第 4 节1

引理 3.1 对于任意 $v\ I\ {}_0H_p^1(8)$,

$$+ v +_{L^4(8)}^4 [\ 2 + v +_8^2 + \tilde{\ }\ v +_8^2 1 \tag{30}$$

引理 3.2 对于任意 $v\ I\ {}_0H_p^2(8)$,

$$+ \$ v +_8^2 = +5_Q^2 v +_8^2 + 2\left\|\frac{1}{Q+1}5_Q 5_H v\right\|_8^2 + \left\|\frac{1}{(Q+1)^2}5_H^2 v\right\|_8^2 +$$
$$\left\|\frac{1}{Q+1}5_Q v\right\|_8^2 - 4\left\|\frac{1}{(Q+1)^2}5_H v\right\|_8^2 1 \tag{31}$$

引理 3.3 对于任意 $v\ I\ H^2(8)$ 和 $u, w\ I\ {}_0H_p^2(8)$,

$$| J(u, v, w) | [\ c + \$ v + 8 + \tilde{\ }\ u +_8^{1/2} + \tilde{\ }\ w +_8^{1/2}(+ \$ u +_8^{1/2} +$$
$$+ \tilde{\ }\ u +_8^{1/2})(+ \$ w +_8^{1/2} + + \tilde{\ }\ w +_8^{1/2}) 1 \tag{32}$$

引理 3.4 对于任意 $u, w\ I\ {}_0H_p^2(8)$,

$$| J(u, u, w) | [$$
$$c + \tilde{\ }\ u + (+ \$ u + 8 + + \tilde{\ }\ u + 8)(+ \$ w + 8 + + \tilde{\ }\ w + 8) 1 \tag{33}$$

现在我们来分析格式(24) 的稳定性1 由于式(24) 是非线性问题, 故没有通常意义下的稳定性, 但是可以具有文献[9] 所阐述的广义稳定性, 我们假设 f 和 $u_{M,N,0}$ 分别具有误差 f 和 $u_{N,M,0}$, 它们导致数值解 $u_{N,M}$ 的误差 $u_{N,M}1$ 由方程(24) 得到

$$(5_t \tilde{\ }\ ((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)), \tilde{\ }\ ((Q+1)^{3/2}<)) 8 +$$
$$J((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2}<) 8 +$$
$$J((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2}(u_{N,M}(t) + u_{N,M}(t)), (Q+1)^{3/2}<) +$$
$$L(\$((Q+1)^{3/2}u_{N,M}(t)), \$((Q+1)^{3/2}<)) 8 =$$
$$-(\tilde{\ } @((Q+1)^{3/2}f(t)), (Q+1)^{3/2}<) 81 \tag{34}$$

在式(34) 中取 $< = 2u_{N,M}$, 则应用式(19) 得到

$$
\begin{aligned}
&{}_{t} + \tilde{\ } \; ((Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) +_{8}^{2} + 2\,\mathrm{L} + \$((Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) +_{8}^{2} - \\
&\quad 2J((Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) = \\
&\quad - 2(\tilde{\ } \; @ \; ((Q+1)^{3/2} \mathrm{f}(t)), (Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) \; 81
\end{aligned}
\tag{35}
$$

令

$$
\begin{aligned}
V(v, L, t) = \; & c(1 + 1/L)(+ \$((Q+1)^{3/2} v(t)) +_{8}^{2} + \\
& + \tilde{\ } \; ((Q+1)^{3/2} v(t)) +_{8}^{2}) 1
\end{aligned}
$$

我们应用 Cauchy 不等式和式(33)导出

$$
\begin{aligned}
& | \; J((Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) \; | \; [\\
& \quad L + \$((Q+1)^{3/2} u_{N,M}) +_{8}^{2} + (V(u_{N,M}, L, t) + 1) + \tilde{\ } \; ((Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) +_{8}^{2} 1
\end{aligned}
$$

另一方面,可根据式(26)得到

$$
\begin{aligned}
& | \; 2(\quad @((Q+1)^{3/2} \mathrm{f}(t)), (Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) \; 8 \; | \; [\\
& \quad + \tilde{\ } \; ((Q+1)^{3/2} u_{N,M}(t)) +_{8}^{2} + \; + (Q+1)^{3/2} \mathrm{f}(t) +_{8}^{2} 1
\end{aligned}
$$

令 $E(v, R, t)$ 如式(28)所示1 把上面两式代到式(35)中可得

$$
\begin{aligned}
& 5_t \left(E((Q+1)^{3/2} u_{N,M}, L, t) \, \mathrm{e}^{-Q_0^t (V(u_{N,M}, L, s) + 1) \mathrm{d}s} \right) [\\
& \quad \mathrm{e}^{-Q_0^t (V(u_{N,M}, L, s) + 1) \mathrm{d}s} + (Q+1)^{3/2} \mathrm{f}(t) +_{8}^{2} 1
\end{aligned}
$$

把上式两边关于 t 积分得到

$$
\begin{aligned}
E((Q+1)^{3/2} u_{N,M}, L, t) \; [\; & \mathrm{e}^{Q_0^t (V(u_{N,M}, L, s) + 1) \mathrm{d}s} \left(Q_0^t \mathrm{e}^{-Q_0^s (V(u_{N,M}, L, G) + 1) \mathrm{d}G} \; @ \right. \\
& \left. + (Q+1)^{3/2} \mathrm{f}(s) +_{8}^{2} \mathrm{d}s + \; + \tilde{\ } \; ((Q+1)^{3/2} u_{N,M,0}) +_{8}^{2} \right) 1
\end{aligned}
\tag{36}
$$

又由式(29)可得

$$
Q_0^t (V(u_{N,M}, L, s) + 1) \mathrm{d}s < \;] \, , \qquad 0 \; [\; t \; [\; T 1
$$

所以估计式(36)隐含着式(24)的广义稳定性1

今用 $w_{N,M}$, W_0 和 F 分别表示数值解 $w_{N,M}$ 相应的初始状态 W_0 和外力 F 的误差1 又记

$$
V^{*}(v, L, t) = (1 + 1/L)(+ \$ v(t) +_{\mathrm{D}}^{2} + \; + \; v(t) +_{\mathrm{D}}^{2}) 1
$$

令 $_{0\,0}{}^{1,*}_{N,M,B}$, $E^{*}(v, R, t)$ 与前面的含义一致, 由式(36)可得

$$
\begin{aligned}
E^{*}(w_{N,M}, L, t) \; [\; & \mathrm{e}^{Q_0^t (V^{*}(w_{N,M}, L, s) + 1) \mathrm{d}s} \left(+ \quad (r^{3/2} \; {}_{0\,0}{}^{1,*}_{N,M,B} W_0) +_{\mathrm{D}}^{2} + \right. \\
& \left. Q_0^t \mathrm{e}^{-Q_0^t (V^{*}(w_{N,M}, L, G) + 1) \mathrm{d}G} + \mathrm{F} \; +_{\mathrm{D}}^{2} \mathrm{d}s \right) 1
\end{aligned}
$$

我们接下来讨论格式(24)的收敛性,为此还需要另外一些准备工作1

引理 3.5 对任何 $v \; I \; {}_0H^{1}_{p, X_4, X_2}(8)$,

$$
+ \tilde{\ } \; ((Q+1)^{3/2} v) + 8 \; [\; c + v +_{1, X_4, X_2, 8},
\tag{37}
$$

对任何 $v \; I \; {}_0H^{2}_{p, X_4, X_2, X_0}(8)$,

$$
+ \$((Q+1)^{3/2} v) + 8 \; [\; c + v +_{2, X_4, X_2, X_0, 8} 1
\tag{38}
$$

为了表述简单起见, 我们引入下面一些记号1 对于整数 $r, s \setminus 0$,

$$
| \; v \; |_{A_B^r(+, H^s(I))} = \left(QQ_8 \; Q^{r+1} \mathrm{e}^{-BQ} (5_Q^r 5_H^s (\mathrm{e}^{BQ/2} v))^2 \mathrm{d}Q \mathrm{d}H \right)^{1/2},
$$

$$\|v\|_{H_V^r(\mathbb{R}^+,H^s(I))} = \left(\iint_\Lambda V(\rho)(\partial_\rho^r\partial_\theta^s v)^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2},$$

$$\mathcal{B}_{r,s,\beta}(v) = \|v\|^2_{A_\beta^r(\mathbb{R}^+,L^2(I))} + \|v\|^2_{A_\beta^r(\mathbb{R}^+,H^1(I))} + \|v\|^2_{H^1_{\chi_4}(\mathbb{R}^+,H^{s-2}(I))} + \|v\|^2_{L^2_{\chi_2}(\mathbb{R}^+,H^{s-1}(I))} + \|v\|^2_{L^2_{\chi_2}(\mathbb{R}^+,H^{s-2}(I))}.$$

引理 3.6 如果 $v\in {}_0H^1_{p,\chi_4,\chi_2}(\Lambda)$, 且对整数 $3\le r\le N+1$ 和 $s\ge 2$, $\mathcal{B}_{r-1,s-1,\beta}(v)$ 有界, 那么,

$$\|{}_0\Pi^1_{N,M}v - v\|_{1,\chi_4,\chi_2,\Lambda} \le c\left(\left(\beta^3+\frac{1}{\beta^7}\right)(\beta N)^{3/2-r/2} + M^{2-s}\right)\mathcal{B}^{1/2}_{r,s,\beta}(v). \tag{39}$$

证明 根据投影定理,

$$\|{}_0\Pi^1_{N,M,\beta}v - v\|_{1,\chi_4,\chi_2,\Lambda} = \inf_{\phi\in V^*_{N,M}(\Lambda)}\|\phi - v\|_{1,\chi_4,\chi_2,\Lambda}.$$

令 ${}_0\Pi^1_{N,\beta,+}v$, $P_{M,I}v$ 如式(5)和(14)所示, 并取 $\phi = {}_0\Pi^1_{N,\beta,+}P_{M,I}v\in V^*_{N,M}(\Lambda)$. 根据式(6)和(15)可得到要证明的结论. □

接下来, 我们估计 $\|{}_0\Pi^2_{N,M}v - v\|_{2,\chi_4,\chi_2,\chi_0,\Lambda}$. 为此引入下列记号:

$$\|v\|_{A_\beta^r(\mathbb{R}^+,H^s(I))} = \left(\iint_\Lambda \rho\,\mathrm{e}^{-\beta\rho}\left(\partial_\rho^r\partial_\theta^s\left(\mathrm{e}^{\frac{\beta\rho}{2}}v\right)\right)^2\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{r,s,\beta}(v) = \|v\|^2_{A^r_\beta(\mathbb{R}^+,H^2(I))}+\|v\|^2_{A^r_\beta(\mathbb{R}^+,H^1(I))}+\|v\|^2_{A^r_\beta(\mathbb{R}^+,L^2(I))} + \|v\|^2_{H^2_{\chi_4}(\mathbb{R}^+,H^{s-2}(I))}+\|v\|^2_{H^1_{\chi_4}(\mathbb{R}^+,H^{s-2}(I))}+\|v\|^2_{L^2_{\chi_2}(\mathbb{R}^+,H^{s-2}(I))} + \|v\|^2_{L^2_{\chi_2}(\mathbb{R}^+,H^{s-1}(I))}+\|v\|^2_{L^2_{\chi_0}(\mathbb{R}^+,H^s(I))}.$$

引理 3.7 如果 $v\in{}_0H^2_{p,\chi_4,\chi_2,\chi_0}(\Lambda)$, 且对整数 $4\le r\le N+1$ 和 $s\ge 2$, $\tilde{\mathcal{B}}_{r,s,\beta}(v)$ 有界, 那么

$$\|{}_0\Pi^2_{N,M}v-v\|_{2,\chi_4,\chi_2,\chi_0,\Lambda}\le c\left(\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^5}\right)(\beta N)^{2-r/2}+M^{2-s}\right)\tilde{\mathcal{B}}^{1/2}_{r,s,\beta}(v). \tag{40}$$

证明 根据投影定理,

$$\|{}_0\Pi^2_{N,M,\beta}v-v\|_{2,\chi_4,\chi_2,\chi_0,\Lambda} = \inf_{\phi\in V_{N,M}(\Lambda)}\|\phi-v\|_{2,\chi_4,\chi_2,\chi_0,\Lambda}.$$

令 ${}_0\Pi^2_{N,\beta,+}v$, $P_{M,I}v$ 如式(9)和(14)所示, 并取 $\phi={}_0\Pi^2_{N,\beta,+}P_{M,I}v\in V_{N,M}(\Lambda)$. 那么, 由式(10)和(15)可得到要证的结论(40). □

注记 3.1 结合式(37)、(38)和(39)得到

$$\|\tilde{\nabla}((\rho+1)^{3/2}({}_0\Pi^1_{N,M,\beta}v-v))\|_\Lambda \le c(\beta^3+1/\beta^7)((\beta N)^{3/2-r/2}+M^{2-s})\mathcal{B}^{1/2}_{r-1,s-1,\beta}(v). \tag{41}$$

类似地, 由式(37)和(40)得到

$$\|\tilde{\nabla}((\rho+1)^{3/2}({}_0\Pi^2_{N,M,\beta}v-v))\|_\Lambda \le c(\beta^2+1/\beta^5)((\beta N)^{2-r/2}+M^{2-s})\tilde{\mathcal{B}}^{1/2}_{r,s,\beta}(v), \tag{42}$$

$$\|\Delta((\rho+1)^{3/2}({}_0\Pi^2_{N,M,\beta}v-v))\|_\Lambda \le c(\beta^2+1/\beta^5)((\beta N)^{2-r/2}+M^{2-s})\tilde{\mathcal{B}}^{1/2}_{r,s,\beta}(v). \tag{43}$$

现在, 我们来估计数值解 $u_{M,N}$ 的误差. 令 $U^*_{N,M}={}_0\Pi^2_{N,M}U$ 和 $U_{N,M}=u_{N,M}-U^*_{N,M}$. 根据式(23)和(24)得到

$$\begin{cases} (5_t \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)), \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}<)) 8 + \\ \quad L(\$((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)), \$((Q+1)^{3/2}<)) 8 + \\ \quad \underset{j=1}{\overset{5}{6}} G_j(<, t) = 0, \qquad P < I \ V_{N,M}(8), \\ U_{N,M}(0) = 0\,0^{1}_{N,M}U_0 - 0\,0^{2}_{N,M}U_0 1 \end{cases} \tag{44}$$

其中

$$G_1(<, t) = (5_t \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}(U^*_{N,M}(t) - U(t))), \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}<)) 8,$$
$$G_2(<, t) = L(\$((Q+1)^{3/2}(U^*_{N,M}(t) - U(t))), \$((Q+1)^{3/2}<)) 8,$$
$$G_3(<, t) = -J((Q+1)^{3/2}<, (Q+1)^{3/2}<, (Q+1)^{3/2}U^*_{N,M}(t)),$$
$$G_4(<, t) = J((Q+1)^{3/2}(U^*_{N,M}(t) - U(t)), (Q+1)^{3/2}U^*_{N,M}(t), (Q+1)^{3/2}<),$$
$$G_5(<, t) = J((Q+1)^{3/2}U(t), (Q+1)^{3/2}(U^*_{N,M}(t) - U(t)), (Q+1)^{3/2}<) 1$$

所以有

$$5_t + \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)) +^2_8 + 2L + \$((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)) +^2_8 + 2\underset{j=1}{\overset{5}{6}} G_j(U_{N,M}, t) = 01 \tag{45}$$

接下来, 估计 $| G_j(U_{N,M}, t) |, 1 [j [51$ 我们在式(37) 和(42) 中取 $v = 5_t U$ 后得到

$$| G_1(U_{N,M}, t) | [+ \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)) +^2_8 + c\left(B^4 + \frac{1}{B^{10}}\right)((BN)^{4-r} + M^{4-2s})\tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(5_t U(t)) 1 \tag{46}$$

令 c_* 表示 1 个正常数, 并记

$$V(v, R, B, t) = c_*(1 + 1/R)(B^4 + 1/B^{10})(+v(t)+^2_{2,X_4,X_2,X_0} 8 + \tilde{\mathscr{B}}_{4,2,B}(v(t))) 1$$

在式(32) 、(33) 、(42) 和(43) 中取 $v = U$ 后得到

$$\left| \underset{j=2}{\overset{5}{6}} G_j(U_{N,M}, t) \right| [(L + \$((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)) +^2_8 +$$
$$(c/L)(B^4 + 1/B^{10})((BN)^{4-r} + M^{4-2s})\tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(U(t)) \ @$$
$$(V(U, L, B, t) + 1) + \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)) +^2_8 +$$
$$+ \tilde{\ } ((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(t)) +^2_8 +$$
$$c(B^4 + 1/B^{10}) V(U, L, B, t)((BN)^{4-r} + M^{4-2s})\tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(U(t))) 1$$

此外, 由式(41) 和(42) 得到

$$+ \tilde{\ }\cdot\cdot((Q+1)^{3/2}U_{N,M}(0)) +^2_8 [$$
$$c(B^6 + B^{-14})((BN)^{4-r} + M^{4-2s})(\mathscr{B}_{r-1,s-1,B}(U_0) + \tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(U_0)) 1 \tag{47}$$

令 $E(v, R, t)$ 如式(28) 所示1 从而采用推导出式(36) 的类似方法得到

$$E((Q+1)^{3/2}U_{N,M}, L, t) [c((BN)^{4-r} + M^{4-2s}) e^{Q_0^t (V(U, L, B, s)+1)\,\mathrm{d}s} \ @$$
$$\left(Q_0^t e^{-Q_0^s (V(U, L, B, G)+1)\,\mathrm{d}G} R(U, L, B, s)\,\mathrm{d}s + \mathscr{B}_{r-1,s-1,B}(U_0) + \tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(U_0) \right) 1$$

其中

$$R(U, L, B, t) = (B^4 + 1/B^{10})(\tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(5_t U(t)) +$$

$$(V(U, L, B, t) + 1)\tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(t)))。$$

另一方面，由式(37)、(38)和(40)得到

$$E((Q+1)^{3/2}(U - U^*_{N, M}), L, t) \le$$
$$c(B^4 + 1/B^{10})((BN)^{4-r} + M^{4-2s})\left(\tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(t)) + \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(s))\mathrm{d}s\right)。$$

结合上述估计式我们推得

$$E((Q+1)^{3/2}(U - u_{N, M}), L, t) \le$$
$$c((BN)^{4-r} + M^{4-2s})\left((B^4 + 1/B^{10})\left(\tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(t)) + \int_0^t \tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(s))\mathrm{d}s\right) + \right.$$
$$\mathrm{e}^{\int_0^t (V(U, L, B, s)+1)\mathrm{d}s}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s (V(U, L, B, G)+1)\mathrm{d}G} R(U, L, B, s)\mathrm{d}s +$$
$$\left.\tilde{\mathcal{B}}_{r-1, s-1, B}(U_0) + \tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U_0)\right)。$$

显然，若 $\max_{0 \le t \le T}\tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(t))$ 有界，则对于 $0 \le t \le T$，

$$E((Q+1)^{3/2}(U - u_{N, M}), L, t) = (B^4 + 1/B^{10})O((BN)^{4-r} + M^{4-2s})。 \tag{48}$$

从而我们可得出如下结论。

定理 3.1 设 W 是式(16)的解，$w_{N,M}$ 是相应的数值解。如果 W 适当光滑，使得对于整数 $4 \le r \le N+1$ 和 $s \ge 2$，$\mathcal{B}_{r-1, s-1, B}(U_0)$，$\max_{0 \le t \le T}\tilde{\mathcal{B}}_{r, s, B}(U(t))$ 和积分

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s (V(U, L, B, G)+1)\mathrm{d}G} R(U, L, B, s)\mathrm{d}s$$

都有界，那么对于 $0 \le t \le T$，

$$E^*(W - w_{N, M}, L, t) = (B^4 + 1/B^{10})O((BN)^{4-r} + M^{4-2s})。 \tag{49}$$

4 数 值 结 果

在这节中，给出一些数值结果。我们首先表述格式(24)的计算方法。令 $\tilde{\mathscr{L}}^{(0, B)}(Q) = \tilde{\mathscr{L}}^{(B)}(Q)$ 和

$$W_l(Q) = \tilde{\mathscr{L}}_l^{(B)}(Q) - 2\tilde{\mathscr{L}}_{l+1}^{(B)}(Q) + \tilde{\mathscr{L}}_{l+2}^{(B)}(Q), \qquad 0 \le l \le N-2, \tag{50}$$
$$\psi^1_{l, m}(Q, H) = W_l(Q)\cos(mH), \qquad 0 \le l \le N-2,\ 0 \le m \le M,$$
$$\psi^2_{l, m}(Q, H) = W_l(Q)\sin(mH), \qquad 0 \le l \le N-2,\ 1 \le m \le M。$$

由于 $W_l(0) = \partial_Q W_l(0) = 0$，全体函数 $\psi^z_{l, m}(Q, H)\ (z = 1, 2)$ 所组成的集合可作为空间 $V_{N, M}(\Omega)$ 的基。在实际计算时，我们把数值解 $u_{N,M}$ 展开为

$$u_{N, M}(Q, H, t) = \sum_{l=0}^{N-2}\left(\sum_{m=0}^{M} u^1_{l, m}(t)\psi^1_{l, m}(Q, H) + \sum_{m=1}^{M} u^2_{l, m}(t)\psi^2_{l, m}(Q, H)\right)。$$

今在式(24)中令 $\psi(Q, H) = \psi^z_{k, p}(Q, H)$，于是得到一个由 $(2M+1)(N-1)$ 个常微分方程所构成的线性系统。在实际计算时，我们在时间方向上采用步长为 S 的四阶显式 Runge- Kutta 方法。我们取测试函数

$$W(r, H, t) = (r-1)^2(r/(r+9))^{3/2}\mathrm{e}^{G\,G}(\sin^2 H + \sqrt{t+1}\cos H)(r+t)^{-k}。$$

相应地有

$$U(Q, H, t) = Q^2(Q+10)^{-3/2}\mathrm{e}^{-QQ}(\sin^2 H + \sqrt{t+1}\cos H)(Q+t+1)^{-k}。$$

为了描述数值误差, 我们用 QB_j 和 XB_j 分别表示 Laguerre- Gauss- Radau 求积公式的节点和权, 用 H_k 和 V_k 表示 Fourier 求积公式的节点和权1 数值误差用下式来度量,

$$E_{N,M}(t) = \left(6_{j=0}^{N-2} 6_{k=0}^{M} (W(QB_j + 1, H_k, t) - w_{N,M}(QB_j + 1, H_k, t))^2 (QB_j + 1)^4 X_{B,j} V_k \right)^{1/2} 1$$

我们首先在测试函数中取参数 C = 1 和 $k = 0$, 因此当 r y] 时该函数指数地衰减1 根据估计式(49), 格式(24) 在空间方向具有谱精度1 在图 1 中, 我们绘制了当 B = 1, $N = 4M$ 和 S = 0.01, 0.005, 0.001 时, 误差 $\lg E_{N,M}(1)$ 关于 M 的变化情况1 显然, 当 N 和 M 增大和 S 减小时, 误差快速衰减, 这表明了格式的收敛性和空间方向上的谱精度1 在图 2 中, 我们绘制了当 B = 1, 1.5, 2, $N = 4M$ 和 S = 0.001 时, 误差 $\lg E_{N,M}(1)$ 关于 M 的变化情况1 它显示带有参数 B = 1.5, 2 的数值结果较好1 在图 3 中, 我们描出当 B = 2, $N = 4M = 40$ 和 S = 0.001 时, 误差 $\lg E_{N,M}(t)$ 的变化情况, 这显示了长时间计算的稳定性1

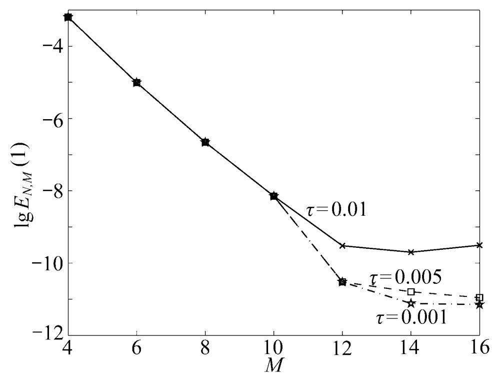

图 1　$w_{N,M}$ 的收敛速度

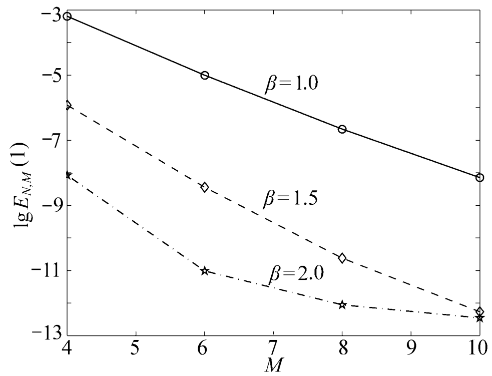

图 2　$w_{N,M}$ 的收敛速度

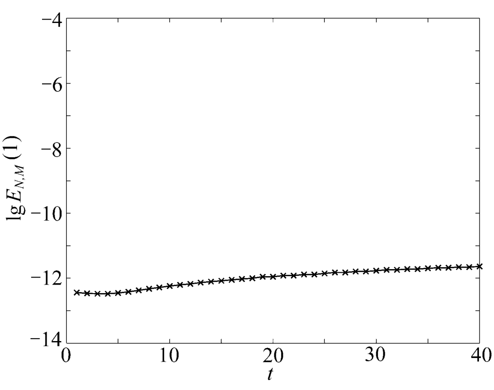

图 3　计算的稳定性

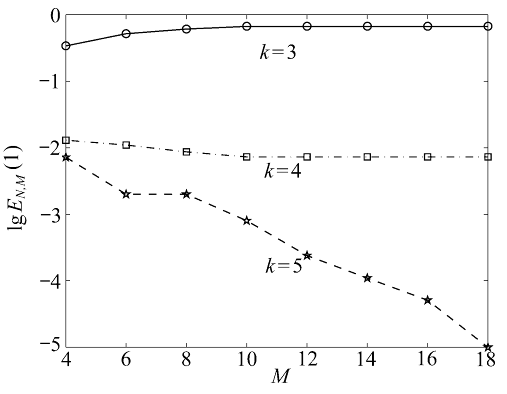

图 4　$k = 3, 4, 5$ 时 $w_{N,M}$ 的收敛速度

接下来, 我们在测试函数中取参数 C = 0 和 $k = 3, 4, 5$1 根据式(49), 如果 $\tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(U(t)) <]$ 且 $N = 4M$, 那么数值解的误差阶是 $N^{2-r/2}$1 由于在 $\tilde{\mathscr{B}}_{r,s,B}(U(t))$ 的定义中包含 $| U |_{A_B^r(+, H^2(I))}$ 等项, 因此要求

$$| U |_{A_B^r(+, H^2(I))} = \left(QQ 8 Q^r e^{-BQ} (5_Q^r 5_H^2 (e^{BQ} Q^2 U))^2 dQ dH \right)^{1/2} <], \qquad (51)$$

当 C = 0 时, 前面给出的测试函数为

$$U(Q, H, t) = Q^2 (Q + 10)^{-3/2} (\sin^2 H + \sqrt{t+1} \cos H)(Q + t + 1)^{-k} 1$$

由于 $U(Q, H, t)$ 随着 H 的变化而振荡, 故当 Q y] 时, $5_Q^r(e^{BQ^2}U(Q, H, t)) \sim Q^{k+1/2}e^{BQ^2}$1 所以, 条件(51) 要求 $k > (r+2)/2$1 另一方面, 当 $r > 4$ 时, 格式是收敛的, 换句话说, $k > 3$ 可以保证格式收敛性, 相应的收敛阶大概是 N^{3-k}1 此时, 数值解是代数收敛的1

在图 4 中, 我们绘制了当 B = 2, $N = 4M$ 和 S = 0.001 时, 误差 $\lg E_{N,M}(1)$ 关于 M 的变化情况 1 我们发现当 $k = 3$ 时, 数值误差不随 M 增大而减小 1 相反, 当 $k > 3$ 时, 它随 M 的增大而衰减, 而且 k 越大, 数值误差越小1 这又一次验证了我们的理论分析1

[参 考 文 献]

[1] GUO Ben- yu. Spectral method for Navier- Stokes equations[J]. Scientia Sinica, Ser A, 1985, 28(11): 1139- 1153.

[2] GUO Ben- yu, MA He- ping. Combined finite element and pseudospectral method for the two- dimensional evolutionary Navier- Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1993, 30(4): 1066- 1083.

[3] Hald O H. Convergence of Fourier methods for Navier- Stokes equations[J]. J Comp Phys, 1981, 40(3): 305- 317.

[4] Maday Y, Quarteroni A. Spectral and pseudospectral approximations of the Navier- Stokes equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(4): 761- 780.

[5] GUO Ben- yu, SHEN Jie, XU Cheng- long. Generalized Laguerre approximation and its applications to exterior problems[J]. J Comp Math, 2005, 23(2): 113- 130.

[6] ZHANG Xiao- yong, GUO Ben- yu. Spherical harmonic- generalized Laguerre spectral method for exterior problem[J]. J Sci Comp, 2006, 27(1/3): 523- 537.

[7] GUO Ben- yu, ZHANG Xiao- yong. Spectral method for differential equations of degenerate type on unbounded domains by using generalized Laguerre funcitons[J]. Appl Numer Math, 2007, 57(4): 455- 471.

[8] GUO Ben- yu, JIAO Yu- jian. Mixed generalized Laguerre- Fourier spectral method for exterior problem of Navier- Stokes equations[J]. Disc Cont Dyna Syst, 2009, 11(2): 315- 345.

[9] GUO Ben- yu. Spectral Methods and Their Applications[M]. Singapore: World Scientific, 1998.

Mixed Spectral Method for Exterior Problem of Navier- Stokes Equations by Using Generalized Laguerre Functions

JIAO Yu- jian[1,2,3], GUO Ben- yu[1,2,3]

(1. Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P.R. China;

2. Scientific Computing Key Laboratory of Shanghai Universities, Shanghai 200234, P.R. China;

3. Division of Computational Science of E- Institute of Shanghai Universities, Shanghai 200234, P.R. China)

Abstract: The mixed spectral method using generalized Laguerre functions for exterior problems of partial differential equations of fourth order was investigated. A mixed spectral scheme was provided for the stream function form of the Navier- Stokes equations outside a disc. Numerical results demonstrate the spectral accuracy in space.

Key words: spectral method; exterior problems of fourth order; Navier- Stokes equations