应用数学和力学, 第 30 卷 第 5 期
2009 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 5, May. 15, 2009

文章编号: 1000- 0887(2009)05- 0556- 11

应用数学和力学编委会, ISSN 1000- 0887

偏微分方程(组)完全对称分类微分特征列集算法

特木尔朝鲁[1], 白玉山[2]

(1. 上海海事大学 应用数学物理所, 上海 200135;
2. 内蒙古工业大学 理学院, 呼和浩特 010051)

(张鸿庆推荐)

摘要: 给出了一个确定含参数偏微分方程(组)的完全对称分类微分特征列集算法, 该算法能够直接、系统地确定偏微分方程(组)的完全对称分类 用给出的算法获得了含任意函数类参数的线性和非线性波动方程完全势对称分类 这也是微分形式特征列集算法(微分形式吴方法)在微分方程领域中的新应用

关 键 词: 偏微分方程; 对称; 分类; 特征列集

中图分类号: O152.5; O175.2 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000- 0887.2009.05.006

引 言

众所周知, Lie 对称方法对数学、物理和力学等领域, 无论在理论还是应用中都有深远的影响[1- 3] 偏微分方程(组)(以下简写为 PDEs)拥有(允许)对称是其可积性的重要依据 PDEs 对称可构造解析解、约化方程、分析解的定性、求数值解 等; PDEs 对称与 N ther 定理的结合产生物理守恒律, 对力学问题的求解提供很多途径[4]

人们一直在关注以拥有对称为标准的 PDEs 对称分类问题[2- 3] 对称分类问题中, 对含参数(常数或函数)PDEs, 确定其所有对称和对应参数 其中, 不仅遇到确定对称本身的难题, 而且还涉及到由参数引起的确定超定 PDEs 的可解性的困难 除了一些平凡的情况之外, 一般对称分类问题的确定是非常困难的 因此, 研究发现确定 PDEs 对称分类的有效方法是非常必要的

为了更好地理解问题, 我们考虑含参数 的一类一般形式 PDEs

$$(\ ;\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}) = 0, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ $R^n(n$ $1)$ 是自变量, $\boldsymbol{u} =$ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ $R^l(l$ $1)$ 为因变量 设 G 为当 取遍其定义

收稿日期: 2008- 06-01; 修订日期: 2009-03-09
基金项目: 教育部博士点基金资助项目(20070128001); 上海市教委支出预算资助项目(2008069); 上海市教委科研创新资助项目(09YZ239); 内蒙古自然科学基金重点资助项目(200607010103)
作者简介: 特木尔朝鲁(1962), 男, 内蒙古人, 蒙古族, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86- 21- 38282233; E- mail: tmchaolu@dbc.shmtu.edu.cn).

域时方程(1)所允许的全部对称, 称为方程(1)的整体对称　对所有的参数值　, PDEs(1)拥有的对称称为方程(1)的主对称, 记为 G_0　这样对某参数值　, 作为对称变换集合有 G_0　G [3]　当对某一个参数值　=　有 G　G_0 时我们称 G 为 G_0 的一个扩充, 具体的参数值　被称为参数的特定化　根据 Lie 对称理论, 确定 G 等价于确定其对应无穷小向量(确定　,　)

$$X = \quad (x, u) \quad _x + \quad (x, u) \quad _u \tag{2}$$

对每一个特定化　, X 构成 G 的 Lie 代数　主对称对应的无穷小向量记为 X_0, 称为主代数　从而方程(1)所允许的整体对称 G 所对应的整体 Lie 代数为

$$X = X_0 \quad X$$

现在我们可以给出 PDEs 完全对称分类问题的数学描述

PDEs 完全对称分类问题　对一类含参数　的方程(1), 确定整体对称 G 对应的 Lie 代数 X, 即, 确定 X_0 及其所有扩充 X 和对应参数的特定化

目前, 分析确定 PDEs 对称分类问题时人们主要采用传统的 Lie 算法[1-2]　该算法中用 PrX 表示算子 X 在 $U = \{x, u\}$ 及 u 的导数构成的空间上的延拓, 且给出向量 X 成为式(1)的对称无穷小向量的充要条件是在方程(1)的解集上恒等式

$$\mathrm{Pr}X \; (\; (\; ; x, u)) \qquad \mathbf{0} \tag{3}$$

成立[1-3]　在实际计算中, 人们从方程(1)解出特定的一些导数项, 并把它们代入方程(3)的左边来确定该恒等式　接着, 把方程(3)按函数 u 独立导数的幂分解, 并令这些导数的系数为 0　这样我们就得到　和　所满足的含参数　的超定线性齐次 PDEs, 称为对称 G 所对应的无穷小向量 X 的**确定方程组**, 记为 $\mathscr{D}(\;) = 0$　显然 PDEs(1)允许对称等价于该超定 PDEs $\mathscr{D}(\;) = 0$ 可解　从而对称分类问题可转化为完全求解该确定方程组的问题

我们知道确定方程组 $\mathscr{D}(\;) = 0$ 并不是对所有的参数　有解　因此, 我们必须确定参数满足的条件(称为分类方程)使该条件保证 $\mathscr{D}(\;) = 0$ 的可解性　显然, 参数　的特定化　是这些分类方程的解　因此, 发现分类方程是确定 PDEs 完全对称分类的关键　但是, 目前这仍是 PDEs 对称分析中挑战性的问题[6]　在文献[7]中 Ried 等给出了确定一类 PDEs 最大古典对称算法及其 Mapple 实现, 其算法主要用了线性微分多项式消元方法

本文中我们将给出确定 PDEs 完全对称分类新算法. 算法的基础是 70 年代吴文俊提出并建立的多元多项式系统特征列集理论和算法[8-11]　　吴方法 或 特征列集算法　　该方法是现代应用数学中处理多项式系统的系统而有效的工具　本文中基于微分形式吴方法, 我们提出并建立求解 PDEs 完全对称分类的特征列集机械化算法, 该算法能系统而直接地确定 PDEs 完全对称分类　这是吴方法在微分方程领域中的新应用

本文余下部分内容安排如下　在第 1 节, 简单回顾微分特征列集算法理论的基本结论　然后针对对称分类问题, 给出一个有效提高计算特征列集效率的微分特征列集改进算法　在第 2 节, 给出基于吴方法的 PDEs 对称分类特征列集算法　在第 3 节, 作为我们算法的应用, 给出含任意函数类参数的(非)线性波动方程的完全势对称分类

1　微分特征列集算法理论的基本结论和一个改进算法

1.1　特征列集算法的基本结论

基本概念和术语见文献[11]　用 $\mathscr{R}_x$ 记 x 的实函数域, 用 $\mathscr{R}_x[u]$ 记 $\mathscr{R}_x$ 上 u 的微分多项式环　设 $\mathscr{D}$　$\mathscr{R}_x[u]$ 为一个微分多项式组, Q　$\mathscr{R}_x[u]$ 为一个微分多项式　记号 $Z(\mathscr{D})$ 表

示$\mathscr{P}$ 的全部零点集(也是$\mathscr{P} = 0$的解集), $Z(\mathscr{P}/Q)$ 表示$\mathscr{P}$ 的使Q 0 的零点集, $Z(\mathscr{P}, Q)$ 表示$\mathscr{P}$ Q 的零点集 用Prem$(\mathscr{P}/\mathscr{C})$ 记$\mathscr{P}$ 对微分升列$\mathscr{C}$ $\mathscr{R}_x[\boldsymbol{u}]$ 的伪余式集; 我们用I 记由任意两个微分多项式得到的可积多项式(条件)

关于微分特征列集有如下基本结论[8- 11]

定理 1. 1(微分特征列集) 对一个有限微分多项式组$\mathscr{P}$, 存在算法在有限步内(不妨t步)确定微分多项式组$\mathscr{C}$, 满足下列性质:

(a$_1$) $\mathscr{C}$ 是微分升列; (a$_2$) Prem$(\mathscr{P}/\mathscr{C}) = 0$;

(a$_3$) $Z(\mathscr{P})$ $Z(\mathscr{C})$; (a$_4$) 对$\mathscr{C}$ 的 I 有, Prem$(I/\mathscr{C}) = 0$

我们称$\mathscr{C}$ 为$\mathscr{P}$ 的一个特征列集

注 结论(a$_1$)表示特征列集$\mathscr{C}$具有三角化的良序结构, (a$_4$) 说明$\mathscr{C}$ 含有可积条件(可解条件) 这两个结论使求解$\mathscr{C} = 0$变得更容易 结论(a$_2$)、(a$_3$) 显示原微分多项式组的零点集含于$\mathscr{C}$ 的零点集中, 从而求解$\mathscr{P} = 0$的问题可转化为求解良序方程$\mathscr{C} = 0$的问题 这些性质将成为我们提出的PDEs 完全对称分类算法的基础

上述定理中的算法就是吴文俊提出的特征列集算法, 其过程可以由以下框架来表示(其细节见文献[11- 13])

$$
\begin{array}{llllll}
\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 & \mathscr{P}_1 & & \mathscr{P}_{t-1} & \mathscr{P}_t & \\
 & \mathscr{B}_0 & \mathscr{B}_1 & & \mathscr{B}_{t-1} & \mathscr{B}_t = \mathscr{C} \\
 & \mathscr{R}_0 & \mathscr{R}_1 & & \mathscr{R}_{t-1} & \mathscr{R}_t = \ ,
\end{array}
\tag{W}
$$

其中集合$\mathscr{P}_i, \mathscr{B}_i, R_i, \mathscr{R}_i$ 之间有如下关系:

$$
\begin{cases}
\mathscr{B}_i \text{ 是} \mathscr{P}_i \text{ 的一个基列且} \mathscr{B}_{i-1} \quad \mathscr{B}_i, \\
R_i = \mathrm{Prem}((\mathscr{P}_i \setminus \mathscr{B}_i)/\mathscr{B}_i) \setminus \{0\}, \\
T_i = \mathrm{Prem}(I/\mathscr{B}_i) \setminus \{0\}, \qquad \text{对} \mathscr{B}_i \text{ 中的} \quad I, \\
\mathscr{R}_i = T_i \quad R_i, \\
\mathscr{P}_i = \mathscr{P}_0 \quad \mathscr{B}_{i-1} \quad \mathscr{R}_{i-1}
\end{cases}
\tag{4}
$$

我们用计算机代数系统Mathematica 实现了该微分特征列集算法的符号计算程序包[12- 13]

定理 1. 2(良序原理) 设$\mathscr{C}$ 为微分多项式组$\mathscr{P}$ 的一个微分特征列集, 则

(b$_1$) $Z(\mathscr{C}/J)$ $Z(\mathscr{P})$ $Z(\mathscr{C})$;

(b$_2$) $Z(\mathscr{P}/J) = Z(\mathscr{C}/J)$;

(b$_3$) $Z(\mathscr{P}) = Z(\mathscr{C}/J)$ $Z(\mathscr{P}, J)$;

其中J 是$\mathscr{C}$ 的初式和隔离子的乘积

定理 1. 3(零点分解定理) 由特征列集算法, 对有限的微分多项式组$\mathscr{P}$ 可构造以下零点分解

$$Z(\mathscr{P}) = {}_k Z(\mathscr{C}_k/J_k),$$

其中$\mathscr{C}_k$ 是$\mathscr{P}$ 的特征列集且J_k 为其初式和隔离子乘积

注 以上两个定理中的J 和J_k 将给出PDEs 对称分类中的分类方程

1.2 微分特征列集算法的改进

由于框架(W) 中$\mathscr{P}_i$ 的元素个数随计算步骤i 的增加而迅速增加, 造成符号计算量增加, 往往导致计算失败 因此我们需要提高计算特征列集效率

下面针对本文中的完全对称分类问题, 对线性微分多项式系统给出特征列集算法的一个改进

我们的改进算法仍然延用框架(W) 和式(4), 只是其中 $\mathscr{D}_i$ 的构造由

$$\mathscr{D}_i = \mathscr{B}_{i-1} \quad \mathscr{R}_{i-1} \tag{4}$$

替换, 在式(4) 中的其它定义不变　显然, 这样做能有效控制 $\mathscr{D}_i$ 中元素个数的增长　从而计算量大大减少　但是, 一般来讲, 算出来的 $\mathscr{C}$ 不一定是特征列集　然而, 对线性微分多项式组, 我们可以证明 $\mathscr{C}$ 就是 $\mathscr{D}$ 的特征列集　该结论作为本文的主要结论之一, 在下面的定理中给出

定理 1.4　设 $\mathscr{D}$ 是线性微分多项系统, 在框架(W) 中取式(4) , 且 $\mathscr{B}_i$ 的初式和隔离子乘积 $J_i \quad 0 (i = 1, 2, \quad, t)$, 则此时 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个特征列集

证明　根据特征列集的性质(定理 1.1 中的(a_1) ~ (a_4)) 和用式(4) 构造 $\mathscr{C}$ 的过程(W) 可知, 我们只证(a_2) 即可

因为

$$\mathscr{B}_{t-1} \quad \mathscr{D}_t, \ R_{t-1} \quad \mathscr{D}_t, \ \mathrm{Prem}(\mathscr{D}_t / \mathscr{B}_t) = 0,$$

我们有

$$\mathrm{Prem}(\mathscr{B}_{t-1} / \mathscr{B}_t) = 0, \ \mathrm{Prem}(R_{t-1} / \mathscr{B}_t) = 0$$

所以, 对任意 $\mathrm{d}b^{(t-1)} \quad \mathscr{B}_{t-1}$ 和 $r^{(t-1)} \quad R_{t-1}$, 由伪除公式[13] 可知

$$J_t \ \mathrm{d}b^{(t-1)} = \sum_{\mathrm{d}b^{(t)} \ \mathscr{B}_t} Q^{(t-1)} D^{(t-1)} \mathrm{d}b^{(t)}, \tag{5}$$

$$J_t \ r^{(t-1)} = \sum_{\mathrm{d}b^{(t)} \ \mathscr{B}_t} Q^{(t)} D^{(t)} \mathrm{d}b^{(t)} \tag{6}$$

另一方面, 对任意 $\mathrm{d}p^{(t-1)} \quad \mathscr{D}_{t-1}$, 存在 $r^{(t-1)} \quad R_{t-1}$ 使得

$$J_{t-1} \ \mathrm{d}p^{(t-1)} = \sum_{\mathrm{d}b^{(t-1)} \ \mathscr{B}_{t-1}} Q^{(t-1)} D^{(t-1)} \mathrm{d}b^{(t-1)} + r^{(t-1)} \tag{7}$$

上式(7) 的两边用 J_t 乘, 结果代入式(5) 和(6), 并用简略记号改写之后, 我们有

$$J_t \ J_{t-1} \mathrm{d}p^{(t-1)} = \sum_{\mathrm{d}b^{(t)} \ \mathscr{B}_t} Q \, D \ \mathrm{d}b^{(t)} \tag{8}$$

式(5) ~ (8) 中, 记号 $Q^{(t-1)}$, $Q^{(t)}$, $Q^{(t-1)}$ 和 Q 表示微分多项式, $D^{(t-1)}$, $D^{(t)}$ 和 $D^{(t-1)}$ 表示对自变量的全微分

由于 $J_{t-1} \quad \mathscr{R}_x$, $J_{t-1} \quad 0$ 和 $\mathrm{d}p^{(t-1)}$ 的任意性, 表示式(8) 说明

$$\mathrm{Prem}(\mathscr{D}_{t-1} / \mathscr{B}_t) = 0$$

类似地重复以上过程, 由归纳法我们得到

$$\mathrm{Prem}(\mathscr{D}_0 / \mathscr{B}_t) = 0 \tag{9}$$

因为 $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0$, $\mathscr{B}_t = \mathscr{C}$, 所以式(9) 给出了定理的证明

2　PDEs 完全对称分类微分特征列集算法

对一般的 PDEs(1) 的对称无穷小向量(2), 由式(3) 得到其确定方程组 $\mathscr{D}(\quad) = 0$　根据问题的转化, 我们将给出求解该确定方程组的有效算法, 从而得到 PDEs 完全对称分类算法　算法主要由两个部分组成

第一部分　确定主代数 X_0

设 $\mathscr{D}(\quad) = 0$ 为　的恒等式(即视　为任意), 并令关于　的独立项的系数为 0, 进一步分解 $\mathscr{D}(\quad) = 0$　由此, 我们得到一个不含参数,　,　满足的扩充 PDEs, 记其为 $\mathscr{D}_{\mathrm{pr}} = 0$　显然, 如

果方程左边看作微分多项式, 那么对任意 有

$$Z(\Delta_{\mathrm{pr}}) \quad Z(\Delta(\ )) \tag{10}$$

从而 $\Delta_{\mathrm{pr}}=0$ 对应主对称群 G_0 故, 我们求解该系统就确定主代数 X_0 由于 Δ_{pr} 中不含参数, 因此 X_0 的确定完全由吴方法在 Δ_{pr} 上的一个简单应用得到[1, 12- 13]

第二部分 确定 X_0 的扩充

我们取确定方程组 $\Delta(\ )=0$ 的左边 $\Delta(\ )$ 作为微分多项式组, 则求解 $\Delta(\ )=0$ 的问题转化为确定 $\Delta(\ )$ 的零点集 $Z(\Delta(\ ))$ 的问题 对此, 根据吴方法及其良序原理(定理 1. 2), 我们有分解

$$Z(\Delta(\ ))=Z(\mathcal{C}_1(\ )/J_1(\ )) \quad Z(\Delta(\ ),\ J_1(\ )), \tag{11}$$

其中 $\mathcal{C}_1(\ )$ 是 $\Delta(\ )$ 的一个微分特征列集, $J_1(\ )$ 是 $\mathcal{C}_1(\ )$ 的初式和隔离子的乘积 由于式(10), 若式(11)右边的第 1 个集合对应主对称, 则把该集合从式(11)的右边去掉(以下均采用这个省略过程) 然后对式(11)的第 2 个集合继续按特征列集分解 此过程中有两种情况出现 第 1, 如果 $J_1(\ )$ 只是参数 的表达式, 则 $J_1(\ )=0$ 是一个分类方程 以 $J_1(\ )=0$ 为条件计算 $\Delta(\ )$ 的特征列集 $\mathcal{C}_2(\ )$, 同时得到初式和隔离子乘积 $J_2(\ )$1 从而有进一步分解

$$Z(\Delta(H))=\mathop{G}_{i=1}^{2}Z(\mathcal{C}_i(H)/J_i(H))\ G\ Z(\Delta(H),J_1(H),J_2(H)), \tag{12}$$

其中 $\mathcal{C}_2(H)$ 对应分类方程 $J_1(H)=0$; 第 2, 如果 $J_1(H)$ 中含有未知函数, 则把它加入到 $\Delta(H)$ 中, 对扩充微分多项式系统 $\Delta(H)\ G\ J_1(H)$ 计算特征列集, 我们得到类似式(12)的分解式, 不同的是 $\mathcal{C}_2(H)$ 为 $\Delta(H)\ G\ J_1(H)$ 的特征列集, 没有对应的分类方程1 如此下去, 根据吴方法的理论和算法(用新记号表示), 最终我们得到分解

$$Z(\Delta(H))=\mathop{G}_{k}Z(\mathcal{C}_k(H)/J_k(H))\ \mathop{G}_{j}Z(\mathcal{C}_j^{c}(H)/J_j^{C}(H)), \tag{13}$$

其中, $\mathcal{C}_k(H)$ 是 $\Delta(H)$ 的微分特征列集, 对应某分类方程; $\mathcal{C}_j^{c}(H)$ 为 $\Delta(H)$ 的扩充 PDEs 的微分特征列集, 没有对应分类方程; $J_k(H)(J_j^{C}(H))$ 是 $\mathcal{C}_k(H)(\mathcal{C}_j^{c}(H))$ 的初式和隔离子的乘积1 从分解式(13)看出, 方程组 $\Delta(H)=0$ 的全部解按特征列集零点集完全分解, 并给出了确定参数特定化的所有分类方程($\mathcal{C}_k(H)$ 部分中的分类方程)1 现在, 求解 $\Delta(H)=0$ 的问题转化为求解特征列集对应方程 $\mathcal{C}_k(H)=0$ 和 $\mathcal{C}_j^{c}(H)=0$ 的问题1 根据微分特征列集的三角化结构, 含可积条件等优点, 后者是相对容易求解的, 而且式(13)右端每一个分支给出一类对称和参数方程1 从而将给出原 PDEs(1)的完全对称分类1

以上过程证明了本文的如下主要结论1

定理 2. 1(分类定理) 对给定含参数 H 的 PDEs(1), 设 $\Delta(H)=0$ 为该 PDEs 的对称 G_H 对应无穷小向量 X_H 的确定方程组, 则分解式(13)给出式(1)的完全对称分类1

由该定理, 我们得到确定 PDEs(1)的完全对称分类算法1

算法 含参数 PDEs 的完全对称分类算法

输入: 一个含参数 PDEs $\$(H;\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$1

输出: 分类方程及对应特征列集1

开始

步骤 1 令 $J=\ ,H=\ ,E=\ ,J_0=\ ,k=1$;

步骤 2 产生确定方程组 $\Delta(H)=0$ (用式(3))并确定主代数;

步骤 3 在条件 $J=0$ 下计算 $\Delta(H)$ 的特征列集 $\mathcal{C}_k(H)$ 及其 $J_k(H)$;

步骤 4 如果 $\mathcal{C}_k(H)$ 不对应主对称, 则令 $H=H\ G\ \mathcal{C}_k$; 如果 $\mathcal{C}_k$ 包含只依赖于参数的方程 E_k

则令 $E = E \ G \ E_k$;

步骤 5　如果 J_k 都非零则返回 J 及 H 并停止计算, 否则置 $J = J \ G \ J_k \ _G \ E$ 并 $k = k + 1$ 且转到第 3 步1

结束

本机械化算法能够直接、系统地确定 PDEs 的完全对称分类1

注　在确定对称分类问题中, 我们可以采用以上给出的算法和等价变换相结合的一个简化计算策略1 如果发现所考虑 PDEs 的等价变换, 则对参数的每一类中选择一个代表进行对称计算1 该类的其它对称和参数, 可以利用等价变换, 由此代表确定[1]1 该技巧将大大减少计算量, 对非线性 PDEs 的对称分类非常有效(见 3.1 小节的算例) 1

3　应　　用

在本节, 给出一个含函数类参数的(非) 线性波动方程的完全势对称分类, 说明给出方法的有效性1

3.1　一类非线性波动的完全势对称分类

非线性波动方程 $u_{tt} + u_t = (F(u)u_x)_x$(参数 $H = F(u) \ X \ 0$) 的古典对称分类问题在文献 [14] 中给出1 本节, 考虑该方程的完全势对称分类问题1 该方程的势方程为

$$v_t = F(u)u_x, \quad v_x = u_t + u1 \tag{14}$$

设其允许对称的无穷小向量为

$$X = N(x, t, u, v)5_x + S(x, t, u, v)5_t + G(x, t, u, v)5_u + <(x, t, u, v)5_v1 \tag{15}$$

由标准的 Lie 算法, 我们得到 X 的确定方程组为 $\mathcal{D}(H) = 0$, 其中

$$\mathcal{D}(H) = \left\{\begin{array}{ll} F(u)(G_x + uS_x) + u<_u - <_t, & F(u)S_v - N_u, \\ F(u)(G_v + uS_v) - <_u, & G_u - <_v + N_x + 2uS_u - S_t, \\ F(u)S_x + uN_u - N_t, & uG_u - G_t + <_x + u^2 s_u - uS_t - G, \\ F(u)(G_u - <_v - N_x + S_t) + Fc(u)G, & N_v - S_u \end{array}\right\}1$$

如果该对称无穷小向量 X 中的 N, S, G 至少有一个有效含有势变量 v, 则该对称是原方程的一个新对称, 被称为该方程的势对称 1 以下我们确定式(15) 中 N, S, G, $<$ 和式(14) 中 F 的所有可能形式, 使得方程(14) 允许方程(15) 1 该任务等价于求解 $\mathcal{D}(H) = 0$, 由以下 3 个步骤完成1

步骤 1　确定等价变换1 不难确定该方程组的等价变换为

$$x = ax + b, \quad t = t + d, \quad u = lu + m, \quad v = alv + amx + p, \quad F = F/a^2, \tag{16}$$

其中 a, b, d, l, m, p 是任意常数, 且 $al \ X \ 0$1 在本节计算中应用该等价变换, 对 u 进行伸缩和平移, 对 F 进行伸缩变换来简化计算1

步骤 2　确定主代数 $X_0$1　显然主代数对应

$$\mathcal{C}_0 = \left\{N_x, N_t, N_u, N_v, S_x, S_t, S_u, S_v, <_x, <_t, <_u, <_v, G\right\} = 01$$

所以　$X_0 = c_1 5_x + c_2 5_t + c_3 5_v$,

其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数1

步骤 3　确定 X_0 的扩充 1　在序 N ; G ; S ; $<$ 下, 我们用算法 2 得到

$$Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D}, J_1), \tag{17}$$

其中

$$J_1 = J_2 F(u)F^{(4)}(u) - 3F(u)^2F^{(3)}(u)^2 + 2Fc(u)(8F(u)F^{d}(u) -$$

$$3F'(u)^2)F^{(3)}(u)+6F''(u)^2(F'(u)^2-2F(u)F''(u)).$$

由此，我们知道所有的分类方程将来自 $J_1=0$. 在条件 $J_1=0$ 下对 $\mathcal{D}$ 再次用该算法进一步分解得到

$$Z(\mathcal{D},J_1)=Z(\mathcal{C}_1,J_1/J_3*J_4)\cup Z(\mathcal{D},J_3/J_2)\cup Z(\mathcal{D},J_4/J_2)\cup Z(\mathcal{D},J_2).\qquad(18)$$

其中微分特征列集 $\mathcal{C}_1$ 为

$$\mathcal{C}_1=\left\{\begin{array}{l}G_v,\ G_t,\ G_x,\ <_u,\ <_t,\ N_u,\ N_t,\ S_v,\ S_t,\ S_x,\\
J_2F(u)G_u+(3F'(u)^3-4F(u)F'(u)F''(u)+F(u)^2F^{(3)}(u))G,\\
2J_2F(u)N_v+(F'(u)^2F''(u)-2F(u)F''(u)^2+F(u)F'(u)F^{(3)}(u))G,\\
2J_2F(u)N_u+G(F'(u)^2F''(u)-2F(u)F''(u)^2+F(u)F'(u)F^{(3)}(u)),\\
2J_2F(u)N_x+[F'(u)(3F'(u)^2-2F(u)F''(u)-uF'(u)F''(u)-\\
\qquad uF(u)F^{(3)}(u))+2uF(u)F''(u)^2]G,\\
2J_2F(u)<_v+G(9F'(u)^3-10F(u)F'(u)F''(u)+uF'(u)^2F''(u)-\\
\qquad 2uF(u)F''(u)^2+2F(u)^2F^{(3)}(u)+uF(u)F'(u)F^{(3)}(u)),\\
2J_2F(u)<_x+G(6F(u)F'(u)^2-6uF'(u)^3-4F(u)^2F''(u)+\\
\qquad 8uF(u)F'(u)F''(u)-u^2F'(u)^2F''(u)+2u^2F(u)F''(u)^2-\\
\qquad 2uF(u)^2F^{(3)}(u)-u^2F(u)F'(u)F^{(3)}(u))\end{array}\right\}$$

和分类方程

$$J_2=2F(u)F''(u)-3F'(u)^2,$$
$$J_3=F'(u)^2F''(u)-2F(u)F''(u)^2+F(u)F'(u)F^{(3)}(u),$$
$$J_4=6F'(u)^3-6F(u)F'(u)F''(u)+F(u)^2F^{(3)}(u).$$

在等价变换式(16)下，我们求解分类方程 $J_3=0$，$J_4=0$ 和 $J_2=0$ 得到解的代表 $F(u)=u^{A}$，$F(u)=e^u$，其中 $A=-2,-1$ 对应 $J_4=0$，$A=-2$ 对应 $J_2=0$.

简化分类方程 $J_1=0$ 得到

$$2(c_2+c_1u)F(u)+(c_1u^2+(c_2-c_3)u-c_4)F'(u)=0,\qquad(19)$$

其中 $c_i(i=1,2,\dots,5)$ 是任意常数.

为书写简单，对 $c_1\neq 0$，我们用记号 $a=2c_2/c_1$，$b=(c_2-c_3)/2$，$c=-c_4/c_1$，$\Delta=b^2-4ac$，$A=-b+\sqrt{\Delta}$，$B=-b-\sqrt{\Delta}$，$A^2=c-b^2/4$，$k=b/2$. 从而分类方程 $J_1=0$ 的解有如下几类情况.

A　$c_1\neq 0$.

A.1　若 $\Delta>0$，则 $F(u)=d(u^2+bu+c)\,|(u-A)/(u-B)|^{(a-b)/\sqrt{\Delta}}$；

A.2　若 $\Delta=0$，则 $F(u)=d(u^2+bu+c)e^{((a-b)/A)\arctan((u+b/2)/A)}$；

A.3　若 $\Delta<0$，则 $F(u)=d(u^2+bu+c)e^{-1/(u+k)}$.

用等价变换式(16)，我们可以把以上各种情况均进一步简化.

B　$c_1=0$.

B.1　若 $c_2-c_3\neq 0$，则 $F(u)=d((c_2-c_3)u-c_4)^{1/(c_2-c_3)}$. 在等价变换式(16)下该类等价于 $F(u)=u^{A}$(代表)，其中 A 是实数；

B.2　若 $c_2-c_3=0$，则 $F(u)=d\,e^{-(2c_2/c_4)u}$. 在等价变换式(16)下该类等价于 $F(u)=e^u$(代表).

显然,类 B 对应 $J_3 = 0$ 的解集合1

我们易解得

$$Z(\mathcal{L}_1, J_1/J_3 * J_4) = \left\{\begin{array}{ll} N = c_2x + c_1v + c_5,\quad S = c_1u + c_6, & \\ G = 2(c_1u + c_2)F(u)/Fc(u), & \end{array}\right. \text{其中 } c_1 \text{ x } 0 \Bigg\} 1 \qquad (20)$$

这是对子类A. 1, A. 2 和A. 3 对应对称的统一表示式1

对 $c_1 = 0$ 或等价地在等价变换式(16) 下 $F(u) = u^A$, $F(u) = e^u$, 我们重复使用我们的算法得到

$$Z(\mathcal{D}, J_3/J_1)\ G\ Z(\mathcal{D}, J_4/J_1) = Z(\mathcal{L}_2)\ G\ Z(\mathcal{L}_3)\ G\ Z(\mathcal{L}_4), \qquad (21)$$

其中 $\mathcal{L}_2$ 中取 $F(u) = e^u$, $\mathcal{L}_3$ 中取 $F(u) = u^A (A\ X - 2, - 4/3)$ 和 $\mathcal{L}_4$ 中取 $F(u) = u^{-4/3}$;

$$Z(\mathcal{D}, J_2) = Z(\mathcal{L}_5), \qquad (22)$$

其中 $F(u) = u^{-2}$1

结合式(17)、(18)、(21)、(22) 和等价变换式(16), 我们对 $\mathcal{D}$ 得到最终的分解式(13) 1

这里

$$\mathcal{L}_2 = \{G_x, G_t, G_u, G_v, S_x, S_t, S_u, S_v, N_t, N_u, N_v, <_x - G, 2N_x - G, 2<_v - G\},$$

$$\mathcal{L}_3 = \{S_x, S_t, S_u, S_v, G_x, G_t, G_v, <_x, <_t, <_u, uG_u - G, 2u<_v - (A + 2)G, 2uN_x - AG\},$$

$$\mathcal{L}_4 = \{S_x, S_t, S_u, S_v, N_t, N_u, N_v, G_x, G_t, G_v, <_x, <_t, <_u, uG_u - G, 3u<_v - G, 3uN_x + 2G\},$$

$$\mathcal{L}_5 = \left\{\begin{array}{l} <_x, <_v, N_{u}, N_{t}, N_{xx}, G - uG_u - u^2 N_v, \\ <_u - 2uN_u + 2N_t, <_t - 2u^2 N_u + 2uN_t, G_v - u^3 N_u + 2u^2 N_t, \\ G_x - u^4 N_u + u^3 N_t, uN_{uv} - N_v, N_{tv} - N_t - N_{tt}, \\ 2uN_t + u^2 N_{uu} - N - N_t, uN_u - N_t, \\ G + G_t + u^2 N_v + uN_x, u^2 N_u - uN_t + N_{xv}, u^2 N_u - S_v, N_v - S_u, \\ G + u^2 N_v + uN_x - uS_t, u^3 N_u - u^2 N_t + S_x \end{array}\right\}$$

和

$$Z(\mathcal{L}_2) = \{N = c_1x + c_3, S = c_4, G = 2c_1, < = c_1v + 2c_1x + c_2\},$$

$$Z(\mathcal{L}_3) = \left\{N = \frac{A}{2}c_2x + c_4, S = c_1, G = c_2u, < = \frac{2 + A}{2}c_2v + c_3\right\},$$

$$Z(\mathcal{L}_4) = \left\{N = -\frac{2}{3}c_2x + c_4, S = c_1, G = c_2u, < = \frac{1}{3}c_2v + c_3\right\},$$

$$Z(\mathcal{L}_5) = \left\{\begin{array}{ll} N = c_1/u + (c_2 + c_1v)x + B(v, e^t u), & \text{其中 } A, B \text{ 满足} \\ S = c_4 + c_1(ux - v) + e^{-t}A(v, e^t u), & A_V(V, U) = U^2 B_U(V, U), \\ G = -(c_2 + c_1(v + ux) + e^{-t}A(v, e^t u))u, & B_V(V, U) = A_U(V, U), \\ < = c_3 - 2c_1(t + \ln(u)), & U = e^t u, V = v \end{array}\right\} 1$$

情况 $Z(\mathcal{L}_i)(i = 0, 1, 2, , , 5)$ 和对应的分类方程 $J_k(k = 1, 2, 3, 4)$, 确定了原非线性波动方程的完全势对称分类1 其中在分类方程 $J_1 = 0$ 的条件下 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_5$ 有效地扩充了该方程的古典对称1 由于 $Z(\mathcal{L}_5)$ 中含有满足线性方程组的任意函数1 故, 该类方程(14) 是可线性化的[2]1

3.2 线性波动方程完全势对称分类

下面用给出的算法确定方程 $u_{xx} = H(x)u_{tt}$ 的完全势对称分类, 其中参数 $H = H(x)$ 　01 该方程的势方程为

$$v_t = u_x, \quad v_x = H(x) u_t 1 \tag{23}$$

假设方程(23) 允许的对称无穷小向量为式(15) 的形式1

由 PDEs 对称的充要条件(3) , 我们得到 X 的确定方程组 $\overset{3}{\Delta}(H) = 0$, 这里

$$\overset{3}{\Delta}(H) = \left\{\begin{array}{l} N_u - S_v, H(x) N_v - S_u, <_t - G_x, \\ N_x - S_t - G_u + <_v, H(x)(N_t - G_v) - S_x + <_u, \\ H(x)(N_t + G_v) - S_x - <_u, <_x - H(x) G_t, \\ H(x)(N_x - S_t + G_u - <_v) + Hc(x) N \end{array}\right\} 1 \tag{24}$$

同上例的步骤, 我们得到主对称对应确定方程组和无穷小向量为

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{3}{\mathcal{C}}_0 = \left\{ N, S_x, S_t, S_u, S_v, G_v, G_t, <_u, <_x, G_u - <_v, <_t - G_x \right\} = 0, \\ X_0 = c_1 5_t + (c_2 x + c_3 u + c_4) 5_u + (c_2 t + c_3 v + c_5) 5_v \end{array}\right. \tag{25}$$

及零点集分解式为

$$Z(\overset{3}{\Delta}(H)) = Z(\overset{3}{\mathcal{C}}_1 / \overset{3}{J}_2) \;G\; Z(\left\{\overset{3}{\mathcal{C}}_2, \overset{3}{J}_2\right\} / \overset{3}{J}_1) \;G\; Z(\overset{3}{\mathcal{C}}_3, \overset{3}{J}_1), \tag{26}$$

其中特征列集为

$$\overset{3}{\mathcal{C}}_1 = \left\{\begin{array}{l} N, S_x, S_t, S_u, S_v, G_v, <_u, <_{vv}, <_{tv}, <_{xv}, \\ G_u - <_v, G_x - <_t, H(x) G_t - <_x, \\ H(x)(H(x) <_{tt} - <_{xx}) + Hc(x) <_x \end{array}\right\},$$

$$\overset{3}{\mathcal{C}}_2 =$$

$$\left\{\begin{array}{l} S_u, S_v, S_x + 2<_u, 2H(x)Hc(x) S_t - (3Hc(x)^2 - 2H(x)H^d(x)) N, \\ G_x - <_t, H(x) G_t - <_x, 2H(x)(G_u - <_v) + Hc(x) N, H(x) G_v - <_u, \\ N_u, N_v, H(x) N_t + 2<_u, H(x)Hc(x) N_x - (Hc(x)^2 - H(x)H^d(x)) N, \\ <_{vv}, <_{uu}, <_{uv}, H(x)(H(x) <_{tt} - <_{xx}) + Hc(x) <_x, \\ H(x)Hc(x) <_{xu} - (2Hc(x)^2 - H(x)H^d(x)) <_u, \\ H(x)^2 Hc(x) <_{tv} - (Hc(x)^2 - H(x)H^d(x)) <_u, \\ 2H(x)Hc(x)^2 <_{tu} - (Hc(x)^2 H^d(x) - 2H(x)H^d(x)^2 + H(x)Hc(x)H^{(3)}(x)) N, \\ 2H(x)Hc(x)^2 <_{xv} - (Hc(x)^2 H^d(x) - 2H(x)H^d(x)^2 + H(x)Hc(x)H^{(3)}(x)) N \end{array}\right\},$$

$$\overset{3}{\mathcal{C}}_3 = \left\{\begin{array}{l} N_{uu} - N_{xv}, H(x) N_{tv} - N_{uu}, H(x) N_{vv} - N_{xu}, H(x) N_{tt} - N_{xx}, \\ H(x) N_t - S_x, N_x - S_t, H(x) N_v - S_u, N_u - S_v, \\ G_x - <_t, H(x) G_t - <_x, G_u - <_v, H(x) G_v - <_u, \\ <_{tu} - <_{xv}, H(x) <_{vv} - <_{uu}, H(x) <_{tv} - <_{xu}, H(x) <_{tt} - <_{xx} \end{array}\right\} 1$$

分类方程为

$$\overset{3}{J}_1 = Hc(x),$$

$$\begin{aligned} \overset{3}{J}_2 = {} & 2Hc(x)^4 H^d(x) - 2H(x) Hc(x)^2 H^d(x)^2 - 4H(x)^2 H^d(x)^3 + \\ & 5H(x)^2 Hc(x) H^d(x) H^{(3)}(x) - H(x)^2 Hc(x)^2 H^{(4)}(x) 1 \end{aligned}$$

易求解特征列集对应方程组 $\overset{3}{\mathcal{C}}_1 = 0, \overset{3}{\mathcal{C}}_2 = 0$ 和 $\overset{3}{\mathcal{C}}_3 = 0$, 我们有

$$Z(\overset{3}{\mathcal{C}}_1 / \overset{3}{J}_2) = \left\{ N = 0, S = c_1, G = c_2 u + f(x, t), < = c_2 v + g(x, t) \right\}, \tag{27}$$

其中 c_1, c_2 为任意参数且函数 $(f(x, t), g(x, t))$ 满足方程(23);

$$Z(\left\{\overset{3}{\mathcal{C}}_2, \overset{3}{J}_2\right\} / \overset{3}{J}_1) = \left\{ N = g(t) \frac{H(x)}{Hc(x)}, \quad S = \frac{3Hc(x)^2 - 2H(x)H^d}{2Hc(x)^2} \mathrm{Q}^t g(s) \mathrm{d}s + c_1, \right.$$

$$= \left\{\frac{H(x)H^{d} - 3Hc(x)^{2}}{2Hc(x)^{2}} g(t) + c_{2}\right\} u - \frac{H(x)}{2Hc(x)} gc(t) v + a(x, t),$$

$$< = - \frac{H(x)^{2}}{2Hc(x)} gc(t) u + \left\{\frac{H(x)H^{d} - Hc(x)^{2}}{2Hc(x)^{2}} g(t) + c_{2}\right\} v + b(x, t)\Big\}, \quad (28)$$

其中 c_1, c_2, R 为任意参数且 $g(t)$ 满足

$$\frac{Hc(x)}{H(x)^{2}}\left(\frac{3Hc(x)^{2} - 2H(x)H^{d}(x)}{2Hc(x)^{2}}\right)^{c} = R = \frac{gd(t)}{g(t)} 1 \quad (29)$$

这里 $(a(x, t), b(x, t))$ 为方程(23) 的任意解1　此时参数 $H(x)$ 满足 $\overset{3}{J}_2 = 0$ 和式(29) 1　由式(29) 知 $\overset{3}{J}_2 = 01$　故, 式(29) 是方程 $\overset{3}{J}_2 = 0$ 的首次积分1

对 $\overset{3}{J}_1 = 0$, 设 $H(x) = A^2$ 则

$$Z(\overset{3}{\mathcal{C}}_3, \overset{3}{J}_1) = \left\{\begin{array}{l} N = f(x, t, Au - v) + g(x, t, Au + v), \\ S = A(- f(x, t, Au - v) + g(x, t, Au + v)) + F(x, t), \\ G = \dfrac{1}{A}(- f(x, t, Au - v) + g(x, t, Au + v)) + F(x, t), \\ < = f(x, t, Au - v) + g(x, t, Au + v) \end{array}\right\}, \quad (30)$$

表 1　　PDEs $u_{xx} = H(x) u_{tt}$ 的完全势对称分类

$H(x)$	微分特征列集	N, S, G, <	条件	有势对称的情况
任意	$\overset{3}{\mathcal{C}}_0$	式(25)	无	无
$\overset{3}{J}_2$ X 0	$\overset{3}{\mathcal{C}}_1$	式(27)	f, g I　Z 式(23)	无
$\overset{3}{J}_2 = 0$, $\overset{3}{J}_1$ X 0	$\overset{3}{\mathcal{C}}_2$	式(28)	R, g I　Z 式(29), a, b I　Z 式(23)	有; gc X 0
$\overset{3}{J}_1 = 0$	$\overset{3}{\mathcal{C}}_3$	式(30)	$(f, g), (f, g)$ I　Z 式(31); (F, F) I　Z 式(32)	有; 无穷维

这里对任意可微函数 $(k(x, t), h(x, t)), (y, z) = (f, g)$ 和 $(y, z) = (f, g)$ 满足

$$y_x + Ay_t = \frac{1}{2}(k(x, t) + h(x, t)), \quad z_x - Az_t = \frac{1}{2}(k(x, t) - h(x, t)), \quad (31)$$

且 $P = F(x, t)$ 和 $P = F(x, t)$ 为方程

$$P_x(x, t) = Ah(x, t), \quad P_t(x, t) = k(x, t) \quad (32)$$

的任意两个解1

对波动方程 $u_{xx} = H(x) u_{tt}$, 经式(27)、(28) 和(30) 还有式(25)、(29)、(31) 和(32) 得到了完全势对称分类1　注意到特征列集 $\overset{3}{\mathcal{C}}_0$ 和 $\overset{3}{\mathcal{C}}_1$ 不能产生势对称; 如果 $gc(t)$ X 0, 则特征列集 $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_3$ 产生无穷维势对称1　以上结论概括在表 1 中1

本文的思想和吴方法可进一步拓展应用到确定 PDEs 守恒律分类、广义对称分类和精确解等问题中1

感谢　作者感谢审稿人给予的有价值的意见和建议1

[参　考　文　献]

[1]　Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[2]　Bluman G W, Kumei Sukeyuki. Symmetries and Differential Equations[M](App Math Sci, **81**). **Beijing: Springer-** Velag, World Publishing Corp, 1991.

3] Ovsiannikov L W. Group Analysis of Differential Equations[M]. transl Ames W F. New York/London: Academic Press, 1982. (English version)

[4] Arnol. d V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics[M]. New York: Springer- Verlag, 1978.

[5] Bluman G W, Chaolu Temuer, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equations[J]. J Math Phys, 2005, **46**(2): 1- 12.

[6] Clarkson P A, Mansfield E L. Open problems in symmetry analysis[A]. In: Leslie J A, Robart T, Eds. Geometrical Study of Differential Equations[C]. **285. Contemporary Mathematics Series. Providence, RI: A M S,** 2001, 195- 205.

[7] Reid G J, Wittkoipf Allan D. Determination of maximal symmetry groups of classes of differential equations[A]. In: Proceedings of the 2000 International Symposium on Symboic and Algebraic Computation[C]. St Andrews, Scotland, New York, NY: ACM, 2000, 272- 280.

[8] 高小山, 王定康, 杨宏. 方程求解与机器证明)))基于 MMP 的问题求解[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[9] 吴文俊. 初等几何定理机器证明的基本原理[J]. 系统科学与数学, 1984, **4**(3): 207- 235.

[10] WU Wen- tsun. Mathematics Mechanization [M]. Beijing/Dordrecht/Boston/London: Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[11] WU Wen- tsun. On the foundation of algebraic differential geometry[J]. J Systems Sci & Comp, 1989, **2**(4): 289- 312.

[12] 朝鲁, 高小山. 微分多项式系统的近微分特征列集[J]. 数学学报, 2002, **45**(6): 1041- 1050.

[13] Temuer Chaolu. An algorithmic theory of reduction of differential polynomial system[J]. Adv Math, 2003, **32**(2): 208- 220.

[14] Baikov V A, Gazizov R A, Ibragimov N H. Approximate group analysis of nonlinear equation $u_{tt} - (f(u)u_x)_x + :<(u)u_t = 0$ [J]. Differentsialinge, Uravnenign, 1988, **24**(7): 1127- 1138.

Differential Characteristic Set Algorithm for the Complete Symmetry Classification of (Partial) Differential Equations

Temuer Chaolu[1], BAI Yu- shan[2]

(1. Mathematics Department, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, P.R. China;

2. Science College, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, P.R. China)

Abstract: A differential polynomial characteristic set algorithm for the complete symmetry classification of (partial) differential equations with some parameters was given, which made the solution of the complete symmetry classification problem for (partial) differential equations become direct and systematic. As an illustrative example, the complete potential symmetry classifications of nonlinear and linear wave equations with an arbitrary function parameter were presented. This is a new application of differential form characteristic set algrithmc (differential form Wu. s method) in field of differential equations.

Key words: partial differential equations; symmetry; classification; differential characteristic set