

非线性塑性材料内部空洞闭合模型的研究*

张效迅, 崔振山

(上海交通大学 国家模具 CAD 工程研究中心, 上海 200030)

(黄筑平推荐)

摘要: 基于典型体元(RVE)模型和 Rayleigh-Ritz 法,对材料内部空洞从球形闭合成裂纹的过程进行了定量研究. 基体材料的本构关系采用幂次粘性方程. 通过研究材料变形过程中内部球形空洞和圆形裂纹的演化规律,得到了各自的体积应变率的表达式. 采用插值近似,建立了空洞闭合的解析模型,发现空洞变形的主要机理来自于空洞周围基体材料的塑性流动. 空洞闭合模型反映了材料属性、远场应力三轴度、远场等效应变对空洞闭合的定量规律. 空洞闭合模型的预测结果与文献中的数值结果和有限元计算结果相吻合. 空洞闭合模型与 CAE(computer aided engineering)技术相结合可对材料加工工艺进行优化设计,为消除材料内部空洞提供了一条有应用前景的新途径.

关键词: 空洞闭合; RVE(典型体元); 细观力学; 应力三轴度; CAE

中图分类号: O344;TG316 文献标识码: A

DOI: 10. 3879/j. issn. 1000- 0887. 2009. 05. 009

符号说明

$A, A_k^{(i)}$	流函数中的待定系数	$\dot{\epsilon}$	宏观应变率张量
$\dot{\epsilon}^0, v^0$	无空洞时的宏观应变率和速度	n	基体材料的 Norton 指数
n	单位法向矢量	r, θ, φ	球坐标
sign	符号函数	S_R, S	RVE 外表面和空洞表面
v, ν	基体材料细观速度和附加速度	V_R, V_M	RVE 体积和 RVE 中基体的体积
V, V_0	当前空洞体积和初始空洞体积	σ_0, ϵ_0	基体材料参考应力和参考应变率
$\sigma, \sigma', \sigma_e$	基体材料细观应力张量、应力偏量、等效应力	$\dot{\epsilon}_R, \dot{\epsilon}_M, \dot{\epsilon}_e$	基体材料细观应变率张量、附加应变率张量、等效应变率
Σ, Σ'	宏观应力张量和应力偏量	Σ_m, Σ_e	宏观平均应力和等效应力
ζ	流函数		

引 言

随着钢铁、电力、造船、核能、石油化工和高能物理的发展,大型轴类、饼类和其它近净形零

* 收稿日期: 2008- 05- 20; 修订日期: 2009- 03- 10

基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(973 计划, 2006CB705401)

作者简介: 张效迅(1975-),男,江西万载人,博士生(E-mail: xx. zhang. cn@gmail. com);

崔振山,教授,博士生导师(联系人, E-mail: cuizs@ sjtu. edu. cn).

件的需求不断增大. 但钢锭的铸造过程决定了坯料内部不可避免地会存在缩孔和疏松等空洞性缺陷, 而有些材料本身就可能存在内部空洞(如粉末冶金坯料). 坯料内部的微小空洞必须通过锻造压实消除, 以确保产品质量^[1-2]. 为此, 必须对空洞闭合现象进行研究, 建立空洞闭合的理论模型, 据此制定合理的锻造工艺来消除坯料内部空洞缺陷.

空洞闭合已有 30 多年的研究历史, 各国学者尝试了多种方法对空洞闭合进行预测, 如上限法^[2-5]、有限元法^[1,6-12]、物理模拟和实验研究^[12-14]等. 但这些研究只是在坯料中引入一个或少数几个宏观空洞进行分析, 与坯料中会存在大量极小空洞的实际情况不相符, 因而不能很好地揭示空洞闭合的机理, 至今也还没有准确有效的空洞闭合判据.

另一方面, 由于空洞的成核、长大和汇合被认为是塑性材料的断裂机理, 空洞长大得到了广泛研究. McClintock^[15]及 Rice 和 Tracey^[16]分别研究了柱形空洞和球形空洞在理想刚塑性材料中的变形, Gurson^[17]提出了含空洞刚塑性材料的屈服准则和流动法则, Gurson 模型在金属材料损伤和断裂分析中得到了广泛应用^[18]. 后来, Budiansky 等^[19]研究了粘性材料中单个球形空洞在轴对称变形条件下的扩展率, 提出了 BHS (Budiansky-Hutchison-Slutsky) 模型. Duvva^[20], Cocks^[21], 王自强和秦嘉亮^[22], Leblond 等^[23], Liu 和 Huang^[24], Huang 和 Wang^[25], Hsu 等^[26]也进行了相关研究. 这些研究一般都假定空洞形状为圆柱形或球形并且在材料变形过程中空洞形状保持不变. 但现实中初始形状为球形的空洞在材料变形过程中可能会变成非球形. 为评估空洞形状对多孔材料变形的影响, 一些学者将空洞形状参数引入 Gurson 模型得到多个改进版本^[27-31]. 由于坯料内部空洞的形状参数不可能预先获得, 改进的 Gurson 模型也就很难在实际中得到应用.

Lee 和 Mear^[32-33]及 Yee 和 Mear^[34]对幂次粘性基体材料内部椭球形空洞的长大和闭合进行了深入的数值研究, 并以图表形式给出了大量的数值结果. 本文提出的空洞闭合模型的预测结果与他们的数值结果进行了对比, 结果吻合较好.

1 典型体元模型(RVE)分析

1.1 RVE

将含有空洞的坯料看作是连续介质性质的基体和稀疏分布的微小空洞的集合体, 考虑一块代表性的含有一个孤立空洞的宏观材料, 即典型体元(representative volume element (RVE)), 如图 1 所示, 其体积为 V_R , 外表面 S_R 上受均匀的宏观(远场)应力 Σ 作用. 空洞体积为 V , 空洞表面 S 上无内压. 假设基体材料为各向同性和不可压缩的非线性塑性材料, 其本构关系为^[21,27,35-36]

$$\dot{\epsilon} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \sigma', \quad (1)$$

其中 $\dot{\epsilon}_0$ 和 σ_0 分别为参考应变率和参考应力, n ($1 \leq n < +\infty$) 为 Norton 指数, σ' 为应力偏量, $\sigma_e = ((3/2) \sigma' : \sigma')^{1/2}$ 为等效应力. 本构关系(1)体现了广泛的材料行为, 当 $n = 1$ 时为线性粘性(Newton 粘性)材料, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时为理想刚塑性材料. 若用应变代替其中的应变率, 则由非线性塑性材料本构关系(1)可直接得到率无关的幂律固体^[26,32].

锻造过程中, 坯料的变形将导致初始形状为球形的空洞变成椭球形, 最终闭合成裂纹, 如图 2 所示. 显然, 空洞体积为 $V = 4\pi ab^2/3$, 空洞形状参数为 $\lambda = a/b$, $\lambda = 1$ 为球形空洞, $\lambda = 0$ 为圆形裂纹, 空洞体积分数可认为很小, 空洞间的相互作用可以忽略. 先分别求出球形空洞

和裂纹的体积应变率,再由此确定空洞从球形闭合成裂纹的定量演化模型.

1.2 球形空洞的体积应变率

基于 Hill 的最小值原理^[19],采用 Rayleigh-Ritz 法来求球形空洞的体积应变率. 基体材料内部的速度场和应变率场可写为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}, \quad \mathfrak{E} = \mathbf{E}^0 + \dot{\mathfrak{E}} \quad (2)$$

其中 \mathbf{v}^0 和 \mathbf{E}^0 是无空洞时 Σ 作用下的均匀速度场和应变率场,有

$$\mathbf{E}^0 = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{E}_0}{\sigma_0} \left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \Sigma' \quad (3)$$

在所有的附加速度场 \mathbf{v} 中,真实速度场使下列泛函取最小值^[19]:

$$F(\mathbf{v}) = \int_{V_M} [W(\mathfrak{E}) - W(\mathbf{E}^0) - \Sigma: \dot{\mathfrak{E}}] dV - \int_S \mathbf{v} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4)$$

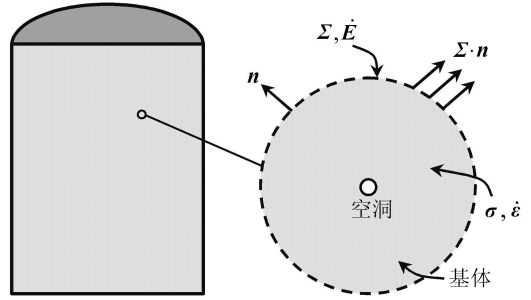


图 1 典型体积元示意图
(a) 坯料: 由基体和稀疏分布的空洞组成
(b) RVE: 体积 V_R 外表面积 S_R 受均匀应力 $\Sigma \cdot n$ 作用

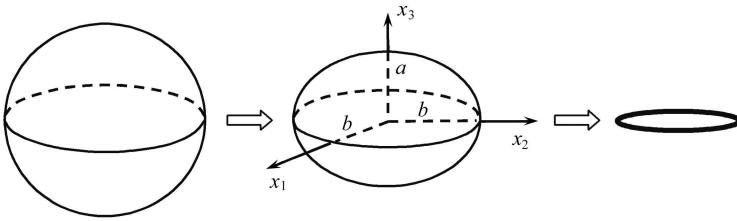


图 2 空洞从球形闭合成裂纹

其中 V_M 是典型体元中基体材料的体积,有 $V_R = V_M + V$, S 是空洞表面, \mathbf{n} 为空洞表面的单位法矢(指向基体),

$$W(\mathfrak{E}) \equiv \int_0^{\mathfrak{E}} \sigma: d\mathfrak{E} = \frac{n}{n+1} \mathfrak{E}_0 \sigma_0 \left(\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_0} \right)^{(n+1)/n} \quad (5)$$

是变形功率,式中 $\mathfrak{E}_e = ((2/3) \mathfrak{E}: \mathfrak{E})^{1/2}$ 是基体材料的细观等效应变率.

由于基体材料不可压缩,附加速度场可通过引入一个流函数^[19]来刻画

$$v_r = - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\zeta \sin \theta)}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0. \quad (6)$$

其中

$$\zeta(r, \theta) = A \cot \theta + \sum_{k=2,4,\dots} \frac{\partial P_k(\cos \theta)}{\partial \theta} R_k(r), \quad (7)$$

式中 $P_k(\cos \theta)$ 是 Legendre 多项式, $R_k(r)$ 为

$$R_k(r) = \sum_{i=1,2,3,\dots} A_k^{(i)} r^{2-i}. \quad (8)$$

本文通过编制 Rayleigh-Ritz 程序进行计算,共取 51 个待定系数将速度场展开(即 A 和 $A_k^{(i)}$, $k = 2, 4, 6, 8, 10; i = 1, 2, \dots, 10$). 未知系数 A 和 $A_k^{(i)}$ 通过最小化方程(4)的泛函 $F(\mathbf{v})$ 来确定. 数值结果的精度通过 $n = 1$ 时的精确解^[19,32]和任意 n 时静水应力作用下的精确解^[19,37]来检验. 计算结果与精确解的相对误差要小于 10^{-4} . 一旦计算出基体的速度场 \mathbf{v} ,就可立即得

到空洞的体积应变率

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{V} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \tag{9}$$

值得指出的是, 空洞演化是应力三轴度、等效应变和 Norton 指数的复杂函数, 要想求出空洞演化的完全解析表达式极为困难. 为此, Budiansky 等^[19] 采用一个非常简单的流函数 $\zeta(r, \theta) = A \cot \theta$ 得到高应力三轴度下球形空洞的体积应变率为

$$\frac{\dot{V}}{E_e^0 V} = \frac{3m}{2} \left[\frac{3}{2n} \left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^n \left(\left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| > 1 \right), \tag{10}$$

其中 $E_e^0 = \left((2/3) \mathbf{E}^0 : \mathbf{E}^0 \right)^{1/2} = \alpha (\Sigma_e / \sigma_0)^n$ 是远场等效应变率, Σ_m / Σ_e 是应力三轴度, $m = \text{sign}(\Sigma_m / \Sigma_e)$, $\omega(1) = \ln 3 - 2/3$, $\omega(-1) = 2\pi / (9\sqrt{3})$. Budiansky 等^[19] 给出了式(10)的适用范围为应力三轴度水平 $|\Sigma_m / \Sigma_e|$ 不小于 1. 后来, Tvergaard^[38] 提出了适合于低应力三轴度的表达式

$$\frac{\dot{V}}{E_e^0 V} = \frac{3m}{2} \left[\frac{3}{2n} + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^n \left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| \left(\left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| < 1 \right). \tag{11}$$

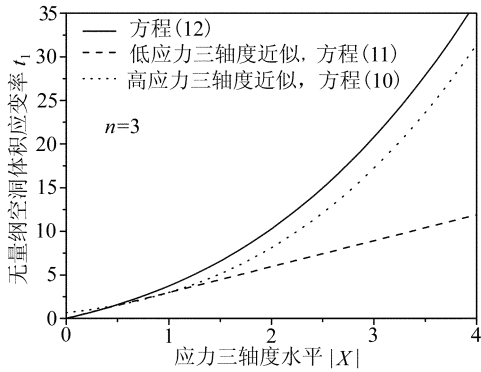


图 3 方程(12)所得球形空洞体积应变率与相应的高、低应力三轴度下近似结果的对比

本文基于 Rayleigh-Ritz 程序和式(10)和(11), 通过引入两个参数 c_1 和 c_2 得到同时适用于高、低应力三轴度的空洞体积应变率(详细推导见附录)

$$\left(\frac{\dot{V}}{E_e^0 V} \right)_{\text{sphere}} = \text{sign}(\Sigma_m) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2n} \left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + \frac{(n-1)(5n+2)}{5n^2} \right)^n + 2c_1 \left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + c_2 \right]. \tag{12}$$

参数 c_1 和 c_2 的值通过拟合 Rayleigh-Ritz 程序计算得到的数值结果来确定, 结果见表 1. 方程(12)所得结果与相应的高、低应力三轴度下近似结果的对比见图 3. 从图中可以看出, 当 $|\Sigma_m / \Sigma_e| > 1$ 时 Budiansky 等^[19] 的结果(式(10)) 低估了空洞的体积应变率, 原因在于他们使用的流函数 $\zeta(r, \theta) = A \cot \theta$ 过于简单, 没有考虑空洞形状对空洞变形的影响.

表 1 方程(12)中 c_1 和 c_2 的值

n	1	2	3	5	10	100
c_1	0	0.595 1	0.706 1	0.804 9	0.900 2	1.006 6
c_2	0	-0.547 9	-0.657 1	-0.734 0	-0.787 4	-0.832 9

1.3 裂纹的体积应变率

He 和 Hutchinson^[39] 及 Hutchinson^[40] 将前述 Rayleigh-Ritz 程序和变分原理用于分析圆形裂纹的变形, 得到裂纹的体积应变率的表达式为

$$\left(\frac{\dot{V}}{E_e^0 V} \right)_{\text{crack}} = \text{sign}(\Sigma_m) \frac{1}{\lambda} \frac{6}{\pi} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{1/2} \left(\left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + \frac{2}{3} \right), \tag{13}$$

这里 λ 为裂纹的高径比(见图 2).

2 插值模型

采用插值近似, 研究空洞从球形闭合成裂纹的过程^[41], 由式(12)和(13)可得

$$t_1 = \frac{\lambda \Delta}{E_e^0 V} = \left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0 V} \right)_{\text{sphere}} \quad (\lambda = 1), \tag{14}$$

$$t_2 = \frac{\lambda \Delta}{E_e^0 V} = \lambda \left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0 V} \right)_{\text{crack}} = \text{sign}(\Sigma_m) \frac{6}{\pi} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{1/2} \left[\left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + \frac{2}{3} \right] \quad (\lambda = 0). \tag{15}$$

采用线性插值有

$$\frac{\lambda \Delta}{E_e^0 V} = \frac{1}{\lambda} [t_2 + (t_1 - t_2) \lambda]. \tag{16}$$

由于存在 λ 方程(16) 不能直接积分得到空洞体积 V 的表达式, 需要引入关于 λ 的方程

$$\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} = \left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} \right)_{\text{crack}} + \left[\left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} \right)_{\text{sphere}} - \left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} \right)_{\text{crack}} \right] \lambda \tag{17}$$

考虑裂纹 ($\lambda = 0$) 的形状变化率, 有

$$\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} = \frac{1}{E_e^0} \left(\frac{a \Delta}{b} - \frac{\lambda \Delta}{b} \right) = \frac{a \Delta}{E_e^0 b} = \frac{\lambda a \Delta}{E_e^0 a}. \tag{18}$$

由于圆形裂纹的体积变化主要来自于裂纹开/合方向而不是径向, 所以

$$\frac{\lambda \Delta}{V} = \frac{a \Delta}{a}, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} \right)_{\text{crack}} = \lambda \left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0 V} \right)_{\text{crack}} = t_2. \tag{20}$$

Budiansky 等^[19] 计算了球形空洞 ($\lambda = 1$) 的形状变化率, 但没有给出表达式, Sivik 和 Thaulow^[18] 通过拟合数值结果得到了如下经验公式:

$$\left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} \right)_{\text{sphere}} = \text{sign}(\Sigma_m) \left[2.8 - 29 \left(1 - \frac{3}{n} \right) \left(1 + \frac{3}{3 \Sigma_m / \Sigma_e - 2} \right)^3 \right]. \tag{21}$$

但这个经验公式不符合 Budiansky 等^[19] 得到的 $n = 1$ 时的精确解 $\lambda \Delta / E_e^0 = 2.5$. 本文通过前述 Rayleigh-Ritz 程序的计算, 将数值结果拟合得到如下表达式:

$$t_3 = \left(\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} \right)_{\text{sphere}} = \text{sign}(\Sigma_m) \left\{ 2.5 - \frac{n-1}{n} \left[\left(29 - \frac{45}{n} \right) \left(1 + \frac{3}{3 \Sigma_m / \Sigma_e - 2} \right)^3 - \frac{2}{9} \right] \right\}. \tag{22}$$

于是, 方程(17) 可写作

$$\frac{\lambda \Delta}{E_e^0} = t_2 + (t_3 - t_2) \lambda. \tag{23}$$

方程(16) 除以方程(23) 并积分可得空洞相对体积 V/V_0 与空洞形状参数 λ 的关系为

$$\frac{V}{V_0} = \left| \frac{(t_3 - t_2) \lambda}{t_2 + (t_3 - t_2) \lambda} \right| \left| \frac{t_3}{t_3 - t_2} \right| \times \left(t_2 + (t_3 - t_2) \lambda \right)^{(t_1 - t_2)/(t_3 - t_2)} \left(t_3 \right)^{-(t_1 - t_2)/(t_3 - t_2)}. \tag{24}$$

积分方程(23) 得

$$\lambda = (t_3 - t_2)^{-1} \left\{ t_3 \exp[(t_3 - t_2) E_e^0] - t_2 \right\}. \tag{25}$$

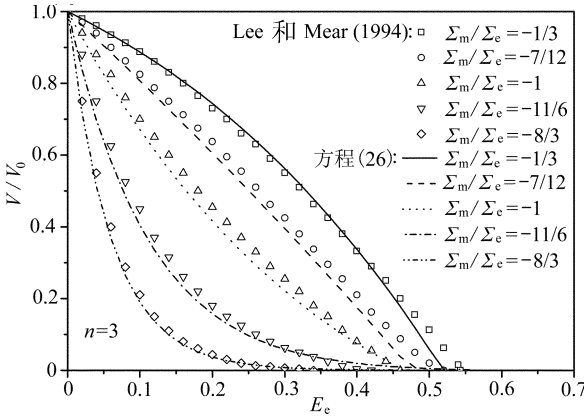


图 4 空洞闭合模型 (26) 与 Lee 和 Mear^[33] 的数值结果的对比

将式 (25) 代入式 (24), 即可得到空洞体积演化的解析表达式

$$\frac{V}{V_0} = 1 - (t_3 - t_2)^{-1} [t_3 \exp(-t_2 E_e^0) - t_2 \exp(-t_3 E_e^0)] \exp(t_1 E_e^0), \tag{26}$$

其中 t_1, t_2 和 t_3 的解析表达式分别为式 (12)、(15) 和 (22). 方程 (26) 表明空洞相对体积 V/V_0 依赖于材料 Norton 指数、远场应力三轴度和远场等效应变. 当 $V/V_0 \rightarrow 0$ 时, 空洞完全闭合.

空洞闭合模型 (26) 的结果与相应的 Lee 和 Mear^[33] 的数值结果对比见图 4, 吻合

程度较好.

3 静水压力下空洞的闭合

当 $\Sigma_e = 0$ 且 $\Sigma_m < 0$ 时, 远场应力条件为静水压力, 这种特殊情形下的精确解已由 Wilkinson 和 Ashby^[37] 及 Budiansky 等^[19] 给出

$$\frac{V}{V_0} = - \frac{3\sigma_0}{2\sigma_0^n} \left(\frac{3}{2n} |\Sigma_m| \right)^n. \tag{27}$$

如果假定空洞闭合过程中压力不变, 空洞形状也一直保持球形, 则直接积分式 (27) 即可得到空洞相对体积

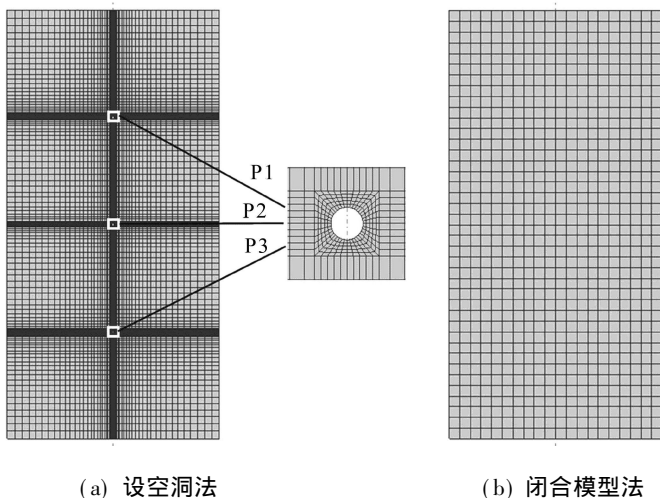
$$\frac{V}{V_0} = \exp \left[- \frac{3\sigma_0 t}{2} \left(\frac{3}{2n\sigma_0} |\Sigma_m| \right)^n \right]. \tag{28}$$

但必须指出的是, 远场静水应力下空洞的闭合过程是不稳定的, 即微小扰动将导致空洞形状偏离球形, 并最终闭合成裂纹, 空洞的变形速率也将大于式 (27) 的结果.

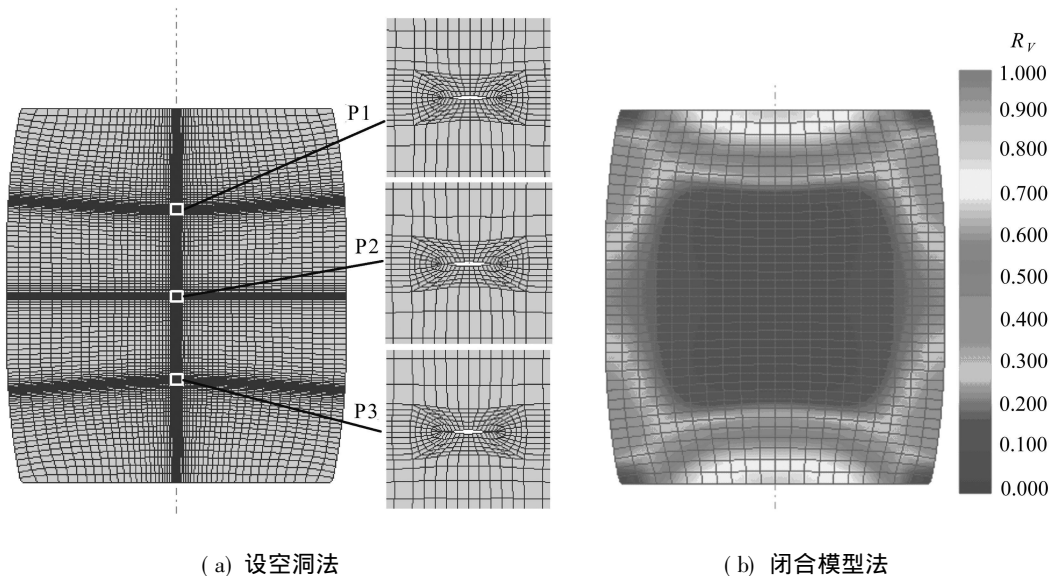
4 空洞闭合模型的应用

举一直径为 $D = 1$ m、高为 $H = 2$ m 的圆柱形坯料的锻粗实例来说明空洞闭合模型的应用, $\eta = \Delta H/H$ 为压下率. 为对比方便, 在相同工艺条件下用两种方法进行模拟: 第 1 种是设空洞法(MVM), 在柱形坯料上设置 3 个直径为 10 mm 的空洞, 有限元模型见图 5(a), 坯料变形过程中的空洞相对体积 $R_V = V/V_0$ 通过测量得到. 第 2 种是空洞闭合模型法(MM), 即将空洞闭合模型编入有限元商用软件 DEFORM 直接模拟, 空洞相对体积 $R_V = V/V_0$ 在有限元仿真过程中直接计算并显示出来, 其有限元模型见图 5(b), 柱形坯料上不必设置任何空洞.

模拟时材料参数取 $\sigma_0 = 8.93 \text{ s}^{-1}$, $\sigma_0 = 105.21 \text{ MPa}$, $n = 5$, 坯料与模具之间的摩擦因数为 0.3. 图 6 给出了压下率 $\eta = \Delta H/H = 32\%$ 时设空洞法和空洞闭合模型法的结果. 两种方法的详细结果对比见表 2. 从图 5、图 6 和表 2 可得如下结论: 1) 设空洞法只能得到设置了空洞的位置的 R_V 值, 而空洞闭合模型法将 R_V 当作一个场变量, 可以方便地得到任意时刻任意位置的空洞相对体积, 空洞是否闭合一目了然. 2) 空洞闭合模型法不仅可以判断空洞是否闭合, 而且还可以模拟空洞的体积变化过程, 揭示空洞演化规律. 3) 空洞闭合模型法得到的 R_V 值



(a) 设空洞法 (b) 闭合模型法
图5 设空洞法和空洞闭合模型法的有限元模型



(a) 设空洞法 (b) 闭合模型法
图6 压下率为32%时设空洞法和空洞闭合模型法 R_V 的结果对比

表2 设空洞法和空洞闭合模型法的结果对比

对比项目	对比方法												
	设空洞法						空洞闭合模型法						
压下率 η	0	8%	16%	24%	32%	40%	0	8%	16%	24%	32%	40%	
空洞相对 体积 R_V	P1	1	0.867	0.692	0.426	< 0.1	≈ 0	1	0.859	0.703	0.424	0.054	5×10^{-5}
	P2	1	0.897	0.757	0.533	< 0.1	≈ 0	1	0.895	0.772	0.540	0.071	2×10^{-6}
	P3	1	0.869	0.697	0.440	< 0.1	≈ 0	1	0.862	0.705	0.429	0.059	6×10^{-5}
有限元单元数(旋转面上)	405 0						400						
计算(CPU)时间 t/s	655						55						
可监测的位置	3(P1, P2, P3)						无数个位置(任意位置)						

与设空洞法相比最大相对偏差小于 3.18% (表 2), 可见空洞闭合模型法能获得比较准确的结果. 4) 空洞闭合模型法所需有限元单元数和计算时间都只要设空洞法的 1/10, 计算效率高. 由此可见, 采用空洞闭合模型法进行坯料锻造工艺的优化设计, 将大大缩短研发和设计周期, 是一条有应用前景的新途径.

5 结 论

锻件坯料中通常会存在大量微小空洞, 由于空洞体积相对坯料极小, 仅用宏观力学方法很难得到准确有效的定量结果. 本文基于典型元元(RVE)模型和 Rayleigh-Ritz 法, 对材料内部空洞从球形闭合成裂纹的过程进行了理论分析. 通过研究材料变形过程中内部空洞的演化规律, 发现空洞周围基体材料的速度场决定空洞变形, 进而揭示了空洞演化的主要机理为空洞周围基体材料的塑性流动. 通过分别建立球形空洞和裂纹的体积应变率的表达式, 采用插值近似, 得到了空洞闭合的解析模型. 空洞闭合模型表明空洞相对体积依赖于材料属性、远场应力三轴度和远场等效应变. 空洞闭合模型的预测结果与文献中的数值结果和有限元计算结果相吻合. 空洞闭合模型与 CAE 技术相结合可对材料加工工艺进行优化设计, 为消除材料内部空洞提供了一条有应用前景的新途径.

附录 方程(12)的推导

材料宏观应力势 $\Phi(\Sigma)$ 可表示为^[20, 26, 32, 36]

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}, \quad (\text{A.1})$$

$$\Phi(\Sigma) = \frac{1}{V_R} \int_{V_M} \phi(\sigma) dV, \quad (\text{A.2})$$

其中 $\phi(\sigma)$ 为 RVE 中材料的细观应力势

$$\phi(\sigma) = \int_0^\sigma \mathfrak{E} : d\sigma = \frac{\mathfrak{E}_0 \sigma_0}{n+1} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1}. \quad (\text{A.3})$$

由于空洞的存在而导致势的改变为

$$\Phi_V(\Sigma) = \frac{1}{V} \left[\int_{V_M} \phi(\sigma) dV - V_R \Phi^0(\Sigma) \right], \quad (\text{A.4})$$

其中 $\Phi^0(\Sigma) = \phi(\Sigma)$ 是无空洞时的宏观应力势.

联立方程(A.2)和(A.4)可得

$$\Phi = \Phi^0 + \frac{V}{V_R} \Phi_V. \quad (\text{A.5})$$

由于基体材料满足方程(1), Φ_V 可写作^[32, 36]

$$\Phi_V = f \mathfrak{E}_0 \sigma_0 \left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1}, \quad (\text{A.6})$$

其中 $f = f(\lambda, n, X)$ 是依赖于空洞形状参数 λ 、Norton 指数 n 和应力三轴度 $X = \Sigma_m / \Sigma_e$ 的无量纲函数.

由于基体材料不可压缩, 有 $\mathfrak{V}_R = \mathfrak{V}$, 且

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{V}}{V} &= \frac{V_R \mathfrak{V}_R}{V V_R} = \frac{V_R}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_m} = \frac{V_R}{V} \frac{\partial}{\partial \Sigma_m} \left(\Phi^0 + \frac{V}{V_R} \Phi_V \right) = \frac{V_R}{V} \left(0 + \frac{\partial}{\partial \Sigma_m} \left(\frac{V}{V_R} \Phi_V \right) \right) = \\ & \frac{\partial \Phi_V}{\partial \Sigma_m} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_m} \left[f \mathfrak{E}_0 \sigma_0 \left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} \right] = \mathfrak{E}_0 \sigma_0 \left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \Sigma_m} = \mathfrak{E}_c^0 \frac{\partial f}{\partial X}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

于是

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{E}_c^0 V} = \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (\text{A.8})$$

对方程(10)和(11)积分, 可分别得到高、低应力三轴度时的 f_H 和 f_L :

$$f_H = \frac{n}{n+1} \left[\frac{3}{2n} |X| + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^{n+1} + A_1(n) \quad |X| \geq 1, \quad (\text{A. 9})$$

$$f_L = \frac{3}{4} \left[\frac{3}{2n} + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^n X^2 + A_2(n) \quad |X| < 1. \quad (\text{A. 10})$$

构造方程(A. 11), 使得 $|X|$ 很大时 f 趋向于 f_H , 而 $|X|$ 很小时 f 趋向于 f_L :

$$f(1, n, X) = \frac{n}{n+1} \left[\frac{3}{2n} |X| + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^{n+1} + q_1 X^2 + q_2 |X| + q_3, \quad (\text{A. 11})$$

其中

$$q_1 = \frac{3}{4} \left[\frac{3}{2n} + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^n - \frac{9}{8} \left[\frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^{n-1},$$

$$q_2 = -\frac{3}{2} \left[\frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^n,$$

$$q_3 = A_2 - \frac{n}{n+1} \left[\frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right]^{n+1},$$

于是得到

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \text{sign}(\Sigma_m) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2n} \left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + \frac{(n-1)(n+\omega(m))}{n^2} \right)^n + 2q_1 \left| \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \right| + q_2 \right]. \quad (\text{A. 12})$$

为了提高方程(A. 12)的精确度, 引入两个参数 c_1 和 c_2 代替式中的 q_1 和 q_2 , 并且由于空洞闭合时 $\omega(m) = 2\pi/(9\sqrt{3}) \approx 0.4$, 于是就得到方程(12). 参数 c_1 和 c_2 的值通过拟合 Rayleigh-Ritz 程序计算得到的数值结果来确定.

[参 考 文 献]

- [1] Dudra S P, Im Y T. Analysis of void closure in open- die forging[J]. Internat J Mach Tools Manu- fact, 1990, **30**(1): 65- 75.
- [2] Wallerl A. Closing of a central longitudinal pore in hot rolling[J]. J Mech Work Technol, 1985, **12**(2): 233- 242.
- [3] Keife H, Ståhlberg U. Influence of pressure on the closure of voids during plastic deformation[J]. J Mech Work Technol, 1980, **4**(2): 133- 143.
- [4] Ståhlberg U, Keife H, Lundberg M, et al. A study of void closure during plastic deformation[J]. J Mech Work Technol, 1980, **4**(1): 51- 63.
- [5] Ståhlberg U. Influence of spread and stress on the closure of a central longitudinal hole in the hot rolling of steel[J]. J Mech Work Technol, 1986, **13**(1): 65- 81.
- [6] Tanaka M, Ono S, Tsuneno M. Factors contributing to crushing of voids during forging[J]. J Jpn Soci Technol Plast, 1986, **27**(306): 825- 859.
- [7] Tanaka M, Ono S, Tsuneno M. A numerical analysis on void crushing during side compression of round bar by flat dies[J]. J Jpn Soci Technol Plast, 1987, **28**(314): 238- 244.
- [8] Tanaka M, Ono S, Tsuneno M, et al. An analysis of void crushing during flat die free forging[A]. In: Lange K, Ed. Proceedings of the 2nd International Conference on Technology of Plasticity (ICTP) [C]. Vol 2. Stuttgart, Germany: Springer- Verlag, 1987, 1035- 1042.
- [9] Park C Y, Yang D Y. Modelling of void crushing for large- ingot hot forging[J]. J Mater Process Technol, 1997, **67**(1/3): 195- 200.
- [10] Pietrzyk M, Kawalla R, Pircher H. Simulation of the behavior of voids in steel plates during hot rolling [J]. Steel Res, 1995, **66**(12): 526- 529.
- [11] 崔振山, 任广升, 徐秉业, 等. 圆柱体内部空洞的热锻闭合条件[J]. 清华大学学报, 2003, **43**(2): 227 - 229, 233.
- [12] Wang A, Thomson P F, Hodgson P D. A study of pore closure and welding in hot rolling process[J].

- J Mater Process Technol, 1996, **60**(1/4): 95– 102.
- [13] Chaaban M A, Alexander J M. A study of the closure of cavities in swing forging[A]. In: Tobias S A, Ed. Proceedings of the 17th International Machine and Tool Design Research Conference[C]. Birmingham, UK: Macmillan, 1976, 633– 645.
- [14] Nakasaki M, Takasu I, Utsunomiya H. Application of hydrostatic integration parameter for free- forging and rolling[J]. J Mater Process Technol, 2006, **177**(1/3): 521– 524.
- [15] McClintock F A. A criterion for ductile fracture by growth of holes[J]. J Appl Mech, 1968, **35**(2): 363 – 371.
- [16] Rice J R, Tracey D M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields[J]. J Mech Phys Solids, 1969, **17**(3): 201– 217.
- [17] Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth—part I : yield criteria and flow rules for porous ductile media[J]. J Eng Mater Technol, 1977, **99**(1): 2– 15.
- [18] Sivik O P, Thaulow C. Growth of spheroidal voids in elastic– plastic solids[J]. Fatigue Fract Engng Mater Struct, 1997, **20**(12): 1731– 1744.
- [19] Budiansky B, Hutchinson J W, Slutsky S. Void growth and collapse in viscous solids[A]. In: Hopkins H G, Sewell M J, Eds. Mechanics of Solids [C]. Oxford: Pergamon Press, 1982, 13– 45.
- [20] Duva J M. A constitutive description of nonlinear materials containing voids[J]. Mechanics Materials, 1986, **5**(2): 137– 144.
- [21] Cocks A. Inelastic deformation of porous materials[J]. J Mech Phys Solids, 1989, **37**(6): 693– 715.
- [22] 王自强, 秦嘉亮. 含空洞非线性材料的本构势和空洞扩展率[J]. 固体力学学报, 1989, **10**(2): 127– 142.
- [23] Leblond J B, Perrin G, Suquet P. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids [J]. International Journal of Plasticity, 1994, **10**(3): 213– 235.
- [24] Liu Y, Huang Z P. Macroscopic strain potentials in nonlinear porous materials[J]. Acta Mech Sinica, 2003, **19**(1): 52– 58.
- [25] Huang Z P, Wang J. Nonlinear mechanics of solids containing isolated voids[J]. ASME Appl Mech Rev, 2006, **59**(4): 210– 229.
- [26] Hsu C Y, Lee B J, Mear M E. Constitutive models for power– law viscous solids containing spherical voids[J]. Internat J Plasticity, 2009, **25**(1): 134– 160.
- [27] Flandi L, Leblond J B. A new model for porous nonlinear viscous solids incorporating void shape effects—I: theory[J]. Eur J Mech A/ Solids, 2005, **24**(4): 537– 551.
- [28] Gologanu M, Leblond J B, Devaux J. Approximate models for ductile metals containing nonspherical voids—case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities[J]. J Mech Phys Solids, 1993, **41**(11): 1723– 1754.
- [29] Gologanu M, Leblond J B, Devaux J. Approximate models for ductile metals containing nonspherical voids—case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities[J]. J Eng Mater Technol, 1994, **116**(3): 290– 297.
- [30] LI Zhen – huan, HUANG Min – sheng. Combined effects of void shape and void size—oblate spheroidal microvoid embedded in infinite non– linear solid[J]. Internat J Plasticity, 2005, **21**(3): 625– 650.
- [31] Pardoen T, Hutchinson J W. An extended model for void growth and coalescence[J]. J Mech Phys Solids, 2000, **48**(12): 2467– 2512.
- [32] Lee B J, Mear M E. Axisymmetric deformations of power– law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids[J]. J Mech Phys Solids, 1992, **40**(8): 1805– 1836.
- [33] Lee B J, Mear M E. Studies of the growth and collapse of voids in viscous solids[J]. J Eng Mater

- Technol, 1994, **116**(3): 348– 358.
- [34] Yee K C, Mear M E. Effect of void shape on the macroscopic response of non- linear porous solids [J]. *Internat J Plasticity*, 1996, **12**(1): 45– 68.
- [35] Norton F H. *Creep of Steel at High Temperature* [M]. New York: McGraw- Hill, 1929.
- [36] Duva J M, Hutchinson J W. Constitutive potentials for dilutely voided nonlinear materials [J]. *Mechanics Materials*, 1984, **3**(1): 41– 54.
- [37] Wilkinson D S, Ashby M F. Pressure sintering by power law creep[J]. *Acta Metall*, 1975, **23**(11): 1277 – 1285.
- [38] Tvergaard V. On the creep constrained diffusive cavitation of grain boundary facets[J]. *J Mech Phys Solids*, 1984, **32**(5): 373– 393.
- [39] He M Y, Hutchinson J W. The penny- shaped crack and the plane strain crack in an infinite body of power- law material[J]. *J Appl Mech*, 1981, **48**(4): 830– 840.
- [40] Hutchinson J W. Constitutive behavior and crack tip fields for materials undergoing creep- constrained grain boundary cavitation[J]. *Acta Metal*, 1983, **31**(7): 1079– 1088.
- [41] Banks- sills L, Budiansky B. On void collapse in viscous solids[J]. *Mechanics of Materials*, 1982, **1**(3): 209– 218.

Theoretical Study of Void Closure in Nonlinear Plastic Materials

ZHANG Xiao- xun, CUI Zhen- shan

(National Die and Mold CAD Engineering Research Center ,
Shanghai Jiao Tong University , Shanghai 200030, P. R . China)

Abstract: Void closing from a spherical shape to a crack is investigated quantitatively in the present study. The constitutive relation of the void- free matrix was assumed to obey the Norton power law. A representative volume element (RVE) which includes matrix and void was employed and a Rayleigh – Ritz procedure was developed to study the deformation- rates of a spherical void and a penny- shaped crack. Based on an approximate interpolation scheme, an analytical model for void closure in nonlinear plastic materials was established. It is found that the local plastic flows of the matrix material are the main mechanism of void deformation. It is also shown that the relative void volume during the deformation depends on the Norton exponent, on the far- field stress triaxiality, as well as on the far- field effective strain. The predictions of void closure using the present model are compared with the corresponding results in the literature, arriving at good agreement. The model for void closure provides a novel way for process design and optimization in terms of elimination of voids in billets because the model for void closure can be easily applied in the CAE(computer aided engineering) analysis.

Key words: void closure; representative volme element (RVE); mesomechanics; stress triaxiality; CAE