

# 基于模型缩聚的结构损伤统计识别<sup>\*</sup>

尹 涛<sup>1</sup>, 林向晖<sup>1</sup>, 朱宏平<sup>2</sup>

(1. 香港城市大学 建筑系, 香港;

2. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074)

(陈立群推荐)

**摘要:** 提出了一种基于有限元模型缩聚技术的结构损伤统计识别方法, 该方法仅需要少量传感器的测量数据. 首先基于模型缩聚技术建立确定性的损伤识别过程, 然后利用摄动法将概率过程融入确定性的损伤识别中, 从而得到了一种基于概率统计的结构损伤识别方法. 该方法通过计算未知参数(如损伤构件的弹性特征)对于测量噪声的一阶与二阶偏导数, 来得到这些未知参数的均值与协方差矩阵. 文中不仅阐述了该方法的理论推导过程, 而且通过一个门式框架的数值仿真研究, 并结合 Monte Carlo 数值模拟技术验证了该文方法的正确性.

**关键词:** 损伤识别; 模型缩聚; 摄动法; Monte Carlo 数值模拟

**中图分类号:** O327      **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.007

## 引 言

结构系统的模态参数, 如自振频率和振型, 可以通过结构模态试验来获得. 显然, 结构物理特性的改变将会直接导致结构动力特性和模态参数发生变化. 因此, 连续监控结构系统的动力特性是目前最常用的损伤检测及其程度评估的方法之一<sup>[1]</sup>.

在实际应用中, 结构损伤识别所面临的一个主要困难就是传感器的数量通常是非常有限的, 即用于结构损伤识别或模型修正的传感器数量远少于目标结构有限元模型的自由度总数. 为了克服该自由度不匹配的问题, 可以采用振型扩充技术, 即扩充实验振型, 使其维数与有限元计算振型相匹配; 或者模型缩聚技术, 即将有限元模型降阶, 使理论计算振型维数与实测振型相对应. 许多学者的研究表明振型扩充过程往往会使得诸如测量噪声、建模误差, 以及其他非确定性因素的影响引入到扩充后的振型中<sup>[2-3]</sup>, 而这将会显著影响损伤识别的结果. 模型缩聚技术发展的最初目的是用来降低大型有限元模型的计算量. 其中, 几个比较有代表性的模型缩聚方法包括 Guyan 缩聚法<sup>[4]</sup> 或称为静态缩聚法, 改进的缩聚系统法 (IRS, improved reduced system)<sup>[5]</sup>, 以及动态缩聚法<sup>[6]</sup> 等. 由于经典的 Guyan 缩聚法忽略了惯性力的影响, 因此缩聚模型和原始模型之间的误差较大. 特别是当被凝聚的副自由度所对应的结构质量相对较大时, 这

\* 收稿日期: 2008-03-24; 修订日期: 2009-05-16

作者简介: 尹涛(1979—), 男, 湖北人, 博士(E-mail: tyin66@gmail.com);

林向晖, 男, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 852-27887303; Fax: + 852-27887612; E-mail: paullam@cityu.edu.hk).

种误差尤为显著. IRS 方法在 Guyan 缩聚法的基础上进行了改进, 通过在静态缩聚过程中添加额外项, 在一定程度上考虑了惯性力的影响. 与 Guyan 缩聚法和 IRS 缩聚法不同, 动态缩聚法的变换过程在指定的频率范围内并不引入误差. 在过去几十年中, 模型缩聚技术已经被广泛应用于结构试验模态分析以及有限元模型修正<sup>[2,7-8]</sup>. 然而, 将这项技术与结构损伤识别相结合的研究却不多见. 主要是因为结构原始有限元模型所包含的损伤信息与单元之间的关联性特征很可能在缩聚过程中丢失或者破坏<sup>[8]</sup>. 由于动态缩聚方法能获得一个相对精确的有限元降阶模型, 因此通过这种方法, 缩聚后的模型可以将原始模型中所包含的损伤信息完好地保留下来. 本文的一个主要目的即是动态缩聚方法<sup>[6]</sup>与结构损伤识别相结合, 使得本文所提出的方法能够适用于仅有少量传感器的情形. 此外, 在应用动力响应数据进行结构模型修正及损伤识别时, 测量噪声是一个关键性的影响因素<sup>[9]</sup>. 测量噪声是不可避免的, 它将会使得模型修正和损伤识别的结果变得不确定. 目前还没有哪一种确定性的方法能处理这样的不确定性问题. 为了能够处理损伤识别结果的不确定性, 就需要发展一种基于概率理论的识别方法, 这正是本文研究的主要目的. Monte Carlo 数值模拟法和摄动法是两种常用的处理随机因素影响的方法. 虽然 Monte Carlo 模拟法在数值精度与鲁棒性上均占优势, 但是当用来分析复杂问题时, 其计算量往往相当可观, 因此该方法通常仅用来衡量其他方法的精确与否<sup>[10]</sup>. 基于 Taylor 级数展开式的摄动法是一种较常用的分析系统受随机因素影响的方法, 并且通常采用二阶摄动展开式来计算未知参数的均值和协方差矩阵<sup>[11]</sup>.

本文提出了一种新的结构损伤统计识别方法, 该方法仅利用少量传感器采集的含噪声的测量数据来实现有效的损伤识别. 该方法包含两个阶段, 首先, 将有限元模型动态缩聚方法与损伤识别理论进行有效结合, 建立结构损伤识别的确定性方法. 然后, 基于摄动法的基本理论对之前建立的确定性方法加以拓展, 进而得到一种新的、能处理非确定性问题的损伤识别统计方法. 文中通过对一个典型单层门式框架结构的数值仿真研究, 并结合 Monte Carlo 数值模拟法, 对本文方法的正确性和有效性进行了验证. 结果表明, 本文所提出的方法能较精确地识别损伤程度并评估识别结果的不确定程度.

## 1 阶段一: 基于有限元模型缩聚的损伤识别

一个  $N$  自由度有限元模型的特征系统方程及整体刚度矩阵可以分别表示如下:

$$\hat{K}\varphi^j = \lambda_j M\varphi^j, \quad (1)$$

$$\hat{K} = \hat{K}(\theta) = K - \sum_{i=1}^{N_0} \theta_i K^i, \quad \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_0}]^T, \quad (2)$$

其中,  $\hat{K}$  和  $M$  分别代表该有限元模型的整体刚度矩阵和质量矩阵. 损伤通过结构构件的刚度降低来模拟, 并假设损伤不改变结构的质量分布. 因此, 这里采用健康状态下的整体质量矩阵符号  $M$ , 而非对应损伤状态的整体质量矩阵符号  $\hat{M}$ .  $\lambda_j = (2\pi f_j)^2$ , 其中  $f_j$  表示第  $j$  阶自振频率,  $j = 1, 2, \dots, N_t$ .  $N_t$  表示测量模态阶数.  $\lambda_j$  与  $\varphi^j$  分别代表系统的第  $j$  阶特征值和特征向量.  $K^i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_0$ ) 表示第  $i$  个单元或子结构对整体刚度矩阵的贡献.  $N_0$  表示待识别未知参数的个数,  $\theta_i$  代表未知参数向量  $\theta$  的第  $i$  个元素, 它是一系列无量纲的参数, 表征第  $i$  个单元或子结构  $K^i$  的损伤状态.

将式(2)代入到式(1)中可得

$$\left( \mathbf{K} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}^i \right) \boldsymbol{\varphi}^j = \lambda_j \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^j. \quad (3)$$

依据有限元模型的主(或测量)自由度(由下标  $m$  表示)和副(或未测)自由度(由下标  $s$  表示),可以形成自由度转换矩阵  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}_N$ ,  $\mathbf{I}_N$  表示  $N$  维单位矩阵. 将自由度转换矩阵  $\mathbf{P}$  的转置左乘到式(3)的两边,并利用  $\mathbf{P}$  的正交性可得

$$\mathbf{P}^T \left( \mathbf{K} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}^i \right) \mathbf{P} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varphi}^j = \lambda_j \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varphi}^j. \quad (4)$$

依据主副自由度的关系,式(4)可以进一步化为以下分块矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{mm}^i & \mathbf{K}_{ms} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ms}^i \\ \mathbf{K}_{sm} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{sm}^i & \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_m^j \\ \boldsymbol{\varphi}_s^j \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_m^j \\ \boldsymbol{\varphi}_s^j \end{bmatrix}, \quad (5)$$

这里,  $\boldsymbol{\varphi}_m^j$  和  $\boldsymbol{\varphi}_s^j$  分别表示特征向量  $\boldsymbol{\varphi}^j$  的测量( $N_m$  维向量)与未测量( $N_s$  维向量)部分,  $N_m + N_s = N$ . 式(5)的第2个方程组经过变换,可以得到下式:

$$\boldsymbol{\varphi}_s^j = \mathbf{D}(\lambda_j, \theta) \boldsymbol{\varphi}_m^j, \quad (6)$$

其中,矩阵  $\mathbf{D}(\lambda, \theta)$  由下式给出:

$$\mathbf{D}(\lambda, \theta) = - \left( \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \lambda \mathbf{M}_{ss} \right)^{-1} \left( \mathbf{K}_{sm} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{sm}^i - \lambda \mathbf{M}_{sm} \right). \quad (7)$$

应指出,矩阵  $\mathbf{D}(\lambda, \theta)$  不仅与特征值  $\lambda$  有关,而且也与未知参数  $\theta$  有关. 为简明起见,下文采用符号  $\mathbf{D}_j$  来代表矩阵  $\mathbf{D}(\lambda, \theta)$ . 为使测量振型维数与计算振型相匹配,可利用如下转换矩阵:

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_j(\lambda, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_m} \\ \mathbf{D}_j \end{bmatrix}_{N \times N_m}, \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{I}_{N_m}$  表示  $N_m$  维单位矩阵. 进而可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_m^j \\ \boldsymbol{\varphi}_s^j \end{bmatrix} = \mathbf{T}_j \boldsymbol{\varphi}_m^j. \quad (9)$$

将式(9)代入式(5)中得

$$\left( \mathbf{K} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}^i \right) \mathbf{T}_j \boldsymbol{\varphi}_m^j = \lambda \mathbf{M} \mathbf{T}_j \boldsymbol{\varphi}_m^j, \quad (10)$$

这里

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm}^i & \mathbf{K}_{ms}^i \\ \mathbf{K}_{sm}^i & \mathbf{K}_{ss}^i \end{bmatrix}. \quad (11)$$

将矩阵  $\mathbf{T}_j$  的转置左乘到式(10)的两边,可得与  $N_m$  个主自由度相对应的降阶系统方程,即

$$\left( \mathbf{K}_m^R - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_m^i \right) \boldsymbol{\varphi}_m^j = \lambda \mathbf{M}_m^R \boldsymbol{\varphi}_m^j, \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{K}_m^R$  和  $\mathbf{M}_m^R$  分别代表缩聚后的整体刚度和质量矩阵,它们均与第  $j$  阶模态有关.  $\mathbf{K}_m^i$  也与第  $j$  阶模态有关,其表示  $\mathbf{K}^i$  的缩聚形式. 式(12)中的这些缩聚后的矩阵可表示如下:

$$\mathbf{K}_m^R = \mathbf{K}_m^R(\lambda, \theta) = \mathbf{T}_j^T \mathbf{K} \mathbf{T}_j, \quad (13a)$$

$$\mathbf{M}_m^R = \mathbf{M}_m^R(\lambda, \theta) = \mathbf{T}_j^T \mathbf{M} \mathbf{T}_j, \quad \mathbf{K}_m^i = \mathbf{K}_m^i(\lambda, \theta) = \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j. \quad (13b, c)$$

经过整理,与所有测量模态对应的式(12)一起可以表达成以下的矩阵形式:

$$\mathbf{A}(\theta) \theta = \mathbf{b}(\theta), \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^1 & \mathbf{a}_2^1 & \cdots & \mathbf{a}_{N_0}^1 \\ \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_2^2 & \cdots & \mathbf{a}_{N_0}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_1^{N_1} & \mathbf{a}_2^{N_1} & \cdots & \mathbf{a}_{N_0}^{N_1} \end{bmatrix}_{(N_t \times N_m) \times N_0}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{b}(\theta) = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T, \dots, \mathbf{z}_{N_0}^T]_{(N_t \times N_m) \times 1}, \quad (15b)$$

$$\mathbf{a}_i^j = \mathbf{a}_i^j(\lambda, \varphi_m^j, \theta) = \mathbf{K}_m^i \varphi_m^j, \quad \mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(\lambda, \varphi_m^j, \theta) = \left[ \mathbf{K}_m^R - \lambda \mathbf{M}_m^R \right] \varphi_m^j. \quad (15c, d)$$

式(14)是一组关于未知参数向量  $\theta$  的隐式非线性方程. 该方程组的求解可转化为以下具有非线性最小二乘形式的无约束优化问题:

$$\min_{\theta \in R^{N_0}} f(\theta) = \frac{1}{2} \|\mathbf{g}(\theta)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_t \times N_m} g_i^2(\theta), \quad (16)$$

$$\mathbf{g}(\theta) = \mathbf{A}(\theta) \theta - \mathbf{b}(\theta). \quad (17)$$

采用 Levenberg-Marquardt (LM) 算法可以有效求解上述优化问题<sup>[12]</sup>.

## 2 阶段二: 损伤统计识别

### 2.1 二阶摄动形式

依据最大熵原理, 本文研究具有零均值正态分布的测量噪声. 测量噪声的不确定性影响可通过在计算自振频率和振型中引入随机噪声项来体现<sup>[31]</sup>, 如

$$f_j = f_j(1 + \mu_j), \quad \varphi_m^j = \varphi_m^j \prec (1 + \eta_j^i), \quad (18a, b)$$

其中, 上标  $\sim$  和  $\prec$  分别表示试验模态数据和相应的均值. 符号  $\prec$  代表向量逐元相乘运算符.  $\mu_j$  和  $\eta_j^i$  分别代表第  $j$  阶测量自振频率和振型所对应的噪声. 将所有阶测量模态的噪声元素堆积成一个向量, 可得到如下形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\xi}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi^T]_{N_\varepsilon \times 1}, \quad \boldsymbol{\xi} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N_1}]_{N_t \times 1}, \quad (19a, b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\varphi = [(\eta^1)^T, (\eta^2)^T, \dots, (\eta^{N_1})^T]_{N_\eta \times 1}, \quad N_\varepsilon = N_t + N_\eta, \quad N_\eta = N_t \times N_m. \quad (19c)$$

噪声向量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的均值(或数学期望值)  $E(\boldsymbol{\varepsilon})$  和协方差矩阵  $C(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$  可以分别表示如下:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad C(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \sigma_f^2 \mathbf{I}_{N_t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_\varphi^2 \mathbf{I}_{N_\eta} \end{bmatrix}_{N_\varepsilon \times N_\varepsilon}, \quad (20a, b)$$

其中,  $\sigma_f$  与  $\sigma_\varphi$  分别代表频率和振型噪声的标准差.  $\mathbf{I}_{N_t}$  和  $\mathbf{I}_{N_\eta}$  分别表示  $N_t$  和  $N_\eta$  维单位矩阵.

为研究测量噪声对损伤识别结果的影响, 式(14)的两边均可以展开为关于  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的二阶 Taylor 级数的形式:

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}^{(0)} + \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \mathbf{A}_p^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \sum_{q=1}^{N_\varepsilon} \mathbf{A}_{pq}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_p \boldsymbol{\varepsilon}_q, \quad (21a)$$

$$\mathbf{b} \approx \mathbf{b}^{(0)} + \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \mathbf{b}_p^{(1)} \xi_p + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \sum_{q=1}^{N_\varepsilon} \mathbf{b}_{pq}^{(2)} \xi_p \xi_q, \quad (21b)$$

$$\theta \approx \theta^{(0)} + \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_p} \xi_p + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \sum_{q=1}^{N_\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \xi_p \xi_q, \quad (21c)$$

其中,  $(\cdot)^{(0)}$ ,  $(\cdot)^{(1)}$  和  $(\cdot)^{(2)}$  分别代表在随机噪声向量  $\varepsilon$  的均值(即  $\varepsilon^{(0)}$ ) 以及未知参数向量  $\theta$  的均值(即  $\theta^{(0)}$ ) 处的零阶、一阶、和二阶偏导数. 由于  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  均与  $\varepsilon$  和  $\theta$  相关, 且同时,  $\theta$  也与  $\varepsilon$  相关, 因此, 关于  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  的一阶和二阶偏导数(见式(21a)和式(21b))分别表示如下:

$$\mathbf{A}_p^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_p}, \quad \mathbf{b}_p^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_p}, \quad (22a, b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{pq}^{(2)} = & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi_p \partial \xi_q} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi_p \partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_q} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \theta_r \partial \xi_q} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_p} + \\ & \sum_{r=1}^{N_\theta} \sum_{s=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi_q} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_r} \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \xi_p \partial \xi_q}, \end{aligned} \quad (22c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{pq}^{(2)} = & \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \xi_p \partial \xi_q} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \xi_p \partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_q} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \theta_r \partial \xi_q} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_p} + \\ & \sum_{r=1}^{N_\theta} \sum_{s=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi_q} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_r} \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \xi_p \partial \xi_q}. \end{aligned} \quad (22d)$$

依据式(21c)以及  $\varepsilon$  具有零均值的假定, 均值  $E(\theta)$  和相应的协方差矩阵  $C(\theta, \theta)$  分别可由以下两式给出:

$$\begin{aligned} E(\theta) \approx & E(\theta^{(0)}) + \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_p} E(\xi_p) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_p^2} C(\xi_p, \xi_p) = \\ & \theta^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_p^2} C(\xi_p, \xi_p), \end{aligned} \quad (23a)$$

$$C(\theta, \theta)_{N_\theta \times N_\theta} \approx \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{N_\theta \times N_\varepsilon} C(\xi, \xi)_{N_\varepsilon \times N_\varepsilon} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{N_\varepsilon \times N_\theta}^T. \quad (23b)$$

从式(23)中可以看出, 均值  $E(\theta)$  近似地依赖于未知参数的零阶及二阶偏导数值, 而协方差矩阵  $C(\theta, \theta)$  的近似值则仅由  $\theta$  的一阶偏导数值决定.

将式(21)和式(22)代入式(14)中, 并比较包含 1,  $\xi_p$  和  $\xi_p \xi_q$  的各项, 可以得到

$$\mathbf{A}^{(0)} \theta^{(0)} = \mathbf{b}^{(0)}, \quad (24a)$$

$$\mathbf{A}^{(0)} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_p} = \mathbf{b}_p^{(1)} - \mathbf{A}_p^{(1)} \theta^{(0)}, \quad (24b)$$

$$\mathbf{A}^{(0)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_p \partial \xi_q} = \mathbf{b}_{pq}^{(2)} - \mathbf{A}_{pq}^{(2)} \theta^{(0)} - 2\mathbf{A}_p^{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_q}. \quad (24c)$$

式(24a)是一组非线性隐式方程, 可以由 LM 算法<sup>[12]</sup>进行求解. 观察式(23)可以发现, 仅需要计算当  $p = q$  时的相关结果即可, 于是, 式(24b)和式(24c)的解可以分别显式地表示如下:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_p} = (\mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}_0^0 - \mathbf{B}_0) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi_p} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi_p} \theta^{(0)} \right], \quad (25a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_p^2} = (\mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}_0^0 - \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{p}, \quad (25b)$$

其中, 符号  $\cdot$  表示矩阵的广义逆, 且

$$\begin{aligned}
p = & \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \varepsilon_p^2} + 2 \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \varepsilon_r \partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \varepsilon_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \sum_{s=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \theta_r}{\partial \varepsilon_p} - \\
& \left( \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_p^2} + 2 \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_r \partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \varepsilon_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \sum_{s=1}^{N_\theta} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \theta_r}{\partial \varepsilon_p} \right) \theta^{(0)} - \\
& 2 \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_p} + \sum_{r=1}^{N_\theta} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_r} \frac{\partial \theta_r}{\partial \varepsilon_p} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_p}, \quad (26a)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_{N_\theta}} \end{bmatrix}_{N_\theta \times N_\theta}, \quad (26b)$$

$$\mathbf{A}_0^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_1} \theta^{(0)} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_2} \theta^{(0)} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_{N_\theta}} \theta^{(0)} \end{bmatrix}_{N_\theta \times N_\theta}. \quad (26c)$$

注意, 在式(25)与式(26)的推导过程中, 运用了偏导算子  $\partial^2/(\partial \theta_r \partial \varepsilon_p)$  和  $\partial^2/(\partial \varepsilon_p \partial \theta_r)$  的等价性条件. 这是因为  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  中所用到的缩聚后的系统矩阵均具有对称性的特点. 式(25)和式(26)中有关  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  的一阶和二阶偏导数计算将在下面两节中给出.

## 2.2 有关矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{b}$ 的一阶偏导数计算

本节将计算  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  的一阶偏导数, 这包括偏导算子  $\partial/\partial \varepsilon_p$  和  $\partial/\partial \theta_r$  ( $p = 1, 2, \dots, N_\varepsilon; r = 1, 2, \dots, N_\theta$ ). 其中, 偏导算子  $\partial/\partial \varepsilon_p$  可以分成两个部分, 即  $\partial/\partial \mu_k$  和  $\partial/\partial \eta_l^k$  ( $k = 1, 2, \dots, N_t, l = 1, 2, \dots, N_m$ ) 来分别计算.  $\eta_l^k$  表示向量  $\eta^k$  的第  $l$  个元素. 对于矩阵  $\mathbf{A}$ , 由式(13)与式(15c)可得

$$\frac{\partial a_i}{\partial \mu_k} = \frac{\partial \mathbf{K}_m^i}{\partial \mu_k} \varphi_m^i = \left( \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k} \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k} \right) \varphi_m^i, \quad \frac{\partial a_i}{\partial \eta_l^k} = \mathbf{K}_m^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial \eta_l^k}, \quad (27a, b)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N_\theta; j = 1, 2, \dots, N_t$ . 根据式(8)和式(18), 从式(27)中可以看出  $\partial \mathbf{T}_j/\partial \mu_k$  与  $\partial \varphi_m^i/\partial \eta_l^k$ , 即  $\partial a_i/\partial \mu_k$  与  $\partial a_i/\partial \eta_l^k$  的值仅在  $k = j$  情况下非零.  $\partial a_i/\partial \theta_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N_\theta$ ) 的值可由下式给出:

$$\frac{\partial a_i}{\partial \theta_r} = \frac{\partial \mathbf{K}_m^i}{\partial \theta_r} \varphi_m^i = \left( \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r} \right) \varphi_m^i. \quad (28)$$

类似地, 注意到,  $\lambda = (2\pi f_j)^2$ ,  $\partial \mathbf{b}/\partial \varepsilon_p$  可以根据式(13)和式(15d)导出, 即

$$\frac{\partial z_j}{\partial \mu_k} = \left( \frac{\partial \mathbf{K}_m^R}{\partial \mu_k} - 4\pi \sqrt{\lambda} \frac{\partial f_j}{\partial \mu_k} \mathbf{M}_m^R - \tilde{\lambda} \frac{\partial \mathbf{M}_m^R}{\partial \mu_k} \right) \varphi_m^i, \quad (29a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_m^R}{\partial \mu_k} = \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k} \mathbf{H} \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^T \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K} \text{ 或 } \mathbf{M}, \quad (29b)$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial \eta_l^k} = (\mathbf{K}_m^R - \tilde{\lambda} \mathbf{M}_m^R) \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial \eta_l^k}. \quad (29c)$$

与式(27)类似, 从式(29)中可以看出  $\partial z_j/\partial \mu_k$  和  $\partial z_j/\partial \eta_l^k$  仅当  $k = j$  时非零.  $\partial \mathbf{b}/\partial \theta_k$  可由下式计算得到:

$$\frac{\partial z_j}{\partial \theta_r} = \left( \frac{\partial \mathbf{K}_m^R}{\partial \theta_r} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \mathbf{M}_m^R}{\partial \theta_r} \right) \varphi_m^i, \quad (30a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_m^R}{\partial \theta_r} = \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{H} \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^T \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K} \text{ 或 } \mathbf{M}. \quad (30b)$$

## 2.3 有关矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{b}$ 的二阶偏导数计算

本节将计算式(25)和式(26)中所用到的  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  的有关二阶偏导数, 这包括偏导算子

$\partial^2/\partial \varepsilon_p^2, \partial^2/(\partial \varepsilon_p \partial \theta_r)$  以及  $\partial^2/(\partial \theta_r \partial \theta_s)$  ( $p = 1, 2, \dots, N_\varepsilon; r, s = 1, 2, \dots, N_\theta$ ).

为了方便起见, 偏导算子  $\partial^2/\partial \varepsilon_p^2$  可以拆分成  $\partial^2/\partial \mu_k^2$  和  $\partial^2/(\partial (\Gamma_k^i)^2)$  ( $k = 1, 2, \dots, N_t$ ) 两部分来分别进行计算. 则  $\partial^2 A/\partial \varepsilon_p^2$  可以方便地由式(27) 计算得到, 即

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial \mu_k^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^i}{\partial \mu_k^2} \varphi_m^j, \quad (31a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^i}{\partial \mu_k^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k^2} \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j + 2 \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k} \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k} + \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k^2}, \quad (31b)$$

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial (\Gamma_k^i)^2} = \mathbf{K}_m^i \frac{\partial^2 \varphi_m^j}{\partial (\Gamma_k^i)^2} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N_\theta; j = 1, 2, \dots, N_t. \quad (31c)$$

从式(31) 中可以看出,  $\partial^2 a_i/\partial \mu_k^2$  仅当  $k = j$  时才不为 0. 而根据式(18b) 中的定义,  $\partial^2 a_i/\partial (\Gamma_k^i)^2$  的值对于任意  $k$  恒为 0.  $\partial^2 A/(\partial \varepsilon_p \partial \theta_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, N_\theta$ ) 可由式(27) 得到

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial \mu_k \partial \theta_r} = \frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^i}{\partial \mu_k \partial \theta_r} \varphi_m^j, \quad (32a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^i}{\partial \mu_k \partial \theta_r} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k \partial \theta_r} \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k} \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r} + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k} + \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k \partial \theta_r}, \quad (32b)$$

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial \Gamma_k^i \partial \theta_r} = \frac{\partial \mathbf{K}_m^i}{\partial \theta_r} \frac{\partial \varphi_m^j}{\partial \Gamma_k^i} = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r} \right] \frac{\partial \varphi_m^j}{\partial \Gamma_k^i}. \quad (32c)$$

同样, 当  $k \neq j$  时, 式(32a) 与式(32c) 的值均为 0, 因为在此条件下,  $\partial \mathbf{T}_j/\partial \mu_k, \partial^2 \mathbf{T}_j/(\partial \mu_k \partial \theta_r)$  及  $\partial \varphi_m^j/\partial \Gamma_k^i$  的值均为 0.

$\partial^2 A/(\partial \theta_r \partial \theta_s)$  ( $r, s = 1, 2, \dots, N_\theta$ ) 的值可在式(28) 的基础上求得, 即

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial \theta_r \partial \theta_s} = \frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^i}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \varphi_m^j, \quad (33a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^i}{\partial \theta_r \partial \theta_s} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \mathbf{K}^i \mathbf{T}_j + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_s} + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_s} \mathbf{K}^i \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r} + \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}^i \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r \partial \theta_s}. \quad (33b)$$

有关向量  $\mathbf{b}$  的二阶偏导数计算可以采用与  $A$  相类似的过程来实现. 具体地讲, 注意到  $\lambda = (2\pi f_j)^2, \partial^2 \mathbf{b}/\partial \varepsilon_p^2$  的值可以由式(29) 导得, 即

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial \mu_k^2} = \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^R}{\partial \mu_k^2} - 8\pi \sqrt{\lambda} \frac{\partial f_j}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mathbf{M}_m^R}{\partial \mu_k} - \tilde{\lambda} \frac{\partial^2 \mathbf{M}_m^R}{\partial \mu_k^2} \right] \varphi_m^j, \quad (34a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_m^R}{\partial \mu_k^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k^2} \mathbf{H} \mathbf{T}_j + 2 \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k} + \mathbf{T}_j^T \mathbf{H} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k^2}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K} \text{ 或 } \mathbf{M}, \quad (34b)$$

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial (\Gamma_k^i)^2} = (\mathbf{K}_m^R - \tilde{\lambda} \mathbf{M}_m^R) \frac{\partial^2 \varphi_m^j}{\partial (\Gamma_k^i)^2} = \mathbf{0}. \quad (34c)$$

$\partial^2 \mathbf{b}/(\partial \varepsilon_p \partial \theta_r)$  也可在式(29) 的基础上求得, 即

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial \mu_k \partial \theta_r} = \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^R}{\partial \mu_k \partial \theta_r} - 4\pi \sqrt{\lambda} \frac{\partial f_j}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mathbf{M}_m^R}{\partial \theta_r} - \tilde{\lambda} \frac{\partial^2 \mathbf{M}_m^R}{\partial \mu_k \partial \theta_r} \right] \varphi_m^j, \quad (35a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_m^R}{\partial \mu_k \partial \theta_r} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k \partial \theta_r} \mathbf{H} \mathbf{T}_j + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \mu_k} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r} + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k} +$$

$$\mathbf{T}_j^T \mathbf{H} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j}{\partial \mu_k \partial \theta_r}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K} \text{ 或 } \mathbf{M}, \quad (35b)$$

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial \Gamma_k^i \partial \theta_r} = \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_m^R}{\partial \theta_r} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \mathbf{M}_m^R}{\partial \theta_r} \right] \frac{\partial \varphi_m^j}{\partial \Gamma_k^i}. \quad (35c)$$

$\partial^2 \mathbf{b} / (\partial \theta_r \partial \theta_s)$  则可根据式(30)求得,即

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial \theta_r \partial \theta_s} = \left( \frac{\partial^2 \mathbf{K}_m^R}{\partial \theta_r \partial \theta_s} - \tilde{\lambda}_y \frac{\partial^2 \mathbf{M}_m^R}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \varphi_m^j, \quad (36a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_m^R}{\partial \theta_r \partial \theta_s} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \mathbf{H} \mathbf{T}_j + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_r} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_s} + \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial \theta_s} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r} +$$

$$\mathbf{T}_j^T \mathbf{H} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j}{\partial \theta_r \partial \theta_s}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K} \text{ 或 } \mathbf{M}. \quad (36b)$$

同理,从式(34)与式(35)中可以看出,当  $k \neq j$  时,关于  $z_j$  的二阶偏导数,即  $\partial^2 z_j / \partial \mu_k^2$  和  $\partial^2 z_j / (\partial \mu_k \partial \theta_r)$  均为 0.

#### 2.4 有关矩阵 $\mathbf{D}$ 的一阶与二阶偏导数计算

从以上的推导过程中可以看出,要获得  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  的一阶与二阶偏导数,就首先要计算转换矩阵  $\mathbf{T}_j (j = 1, 2, \dots, N_t)$  的一阶与二阶偏导数. 另外,注意到式(8)中所表示的  $\mathbf{T}_j$  和  $\mathbf{D}_j$  的关系,即是首先要计算  $\partial \mathbf{D}_j / \partial \mu_k$ ,  $\partial \mathbf{D}_j / \partial \theta_r$ ,  $\partial^2 \mathbf{D}_j / \partial \mu_k^2$ ,  $\partial^2 \mathbf{D}_j / (\partial \mu_k \partial \theta_r)$  和  $\partial^2 \mathbf{D}_j / (\partial \theta_r \partial \theta_s) (r, s = 1, 2, \dots, N_\theta)$ . 有关  $\mathbf{D}_j$  的偏导数的计算,将分别在下面公式中给出.

为方便起见,假定

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{ss}, \quad \mathbf{G}_j = \mathbf{K}_{sm} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{sm}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{sm}, \quad (37a, b)$$

则式(7)可以重新表示为

$$\mathbf{F}_j \mathbf{D}_j + \mathbf{G}_j = \mathbf{0}. \quad (38)$$

注意到  $\tilde{\lambda}_y = (2\mathcal{Y}_j)^2$ , 则  $\partial \mathbf{D}_j / \partial \mu_k$  与  $\partial \mathbf{D}_j / \partial \theta_r$  均可基于式(38)导出:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k} = -\mathbf{F}_j^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mu_k} \mathbf{D}_j + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \mu_k} \right] =$$

$$4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}_y} \frac{\partial f_j}{\partial \mu_k} \left( \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{ss} \right)^{-1} (\mathbf{M}_{ss} \mathbf{D}_j + \mathbf{M}_{sm}), \quad (39a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_r} = -\mathbf{F}_j^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \theta_r} \mathbf{D}_j + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \theta_r} \right] = \left( \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{ss} \right)^{-1} (\mathbf{K}_{ss}^r \mathbf{D}_j + \mathbf{K}_{sm}^r). \quad (39b)$$

从式(37)中可以看出,有关  $\mathbf{F}_j$  和  $\mathbf{G}_j$  的二阶偏导算子  $\partial^2 / \partial \mu_k^2$ ,  $\partial^2 / (\partial \mu_k \partial \theta_r)$ , 以及  $\partial^2 / (\partial \theta_r \partial \theta_s)$  的值均为 0. 因而,  $\mathbf{D}_j$  的二阶偏导数可以在式(38)的基础上方便地求得:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k^2} = -2\mathbf{F}_j^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k} =$$

$$8\pi \sqrt{\tilde{\lambda}_y} \frac{\partial f_j}{\partial \mu_k} \left( \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{ss} \right)^{-1} \mathbf{M}_{ss} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k}, \quad (40a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k \partial \theta_r} = -\mathbf{F}_j^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_r} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \theta_r} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k} \right] =$$

$$\left( \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{ss} \right)^{-1} \left[ 4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}_y} \frac{\partial f_j}{\partial \mu_k} \mathbf{M}_{ss} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_r} + \mathbf{K}_{ss}^r \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \mu_k} \right], \quad (40b)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}_j}{\partial \theta_r \partial \theta_s} = -\mathbf{F}_j^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \theta_r} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_s} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \theta_s} \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_r} \right] =$$

$$\left( \mathbf{K}_{ss} - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i \mathbf{K}_{ss}^i - \tilde{\lambda}_y \mathbf{M}_{ss} \right)^{-1} \left[ \mathbf{K}_{ss}^s \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_r} + \mathbf{K}_{ss}^r \frac{\partial \mathbf{D}_j}{\partial \theta_s} \right]. \quad (40c)$$



有关  $A$  和  $b$  的一阶与二阶偏导数在式(27) 至式(40) 中已经全部求得, 它们是式(25) 和式(26) 中计算未知参数向量  $\theta$  对于噪声向量  $\varepsilon$  的一阶与二阶偏导数的基础. 这里必须指出的是, 前面有关  $A$  和  $b$  的一阶与二阶偏导数的计算都是在随机噪声  $\varepsilon$  的均值(即  $\varepsilon^{(0)}$ ) 与未知参数  $\theta$  的均值(即  $\theta^{(0)}$ ) 处进行的, 这也就意味着之前所导出的偏导数的值在这些均值处都是常数. 于是, 未知参数向量  $\theta$  的均值和协方差矩阵可以由式(23) 分别计算得到, 进而通过其分别计算识别的损伤大小及对应结果的不确定程度.

### 3 数值仿真研究

本文采用一个单层平面框架结构作为数值仿真算例<sup>[3, 13]</sup>. 其截面特性和材料特性如下: 弹性模量  $E = 2.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ; 截面面积  $A = 3.03 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  (柱) 与  $2.43 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  (梁), 截面惯性矩  $I = 9.09 \times 10^{-10} \text{ m}^4$  (柱) 与  $7.29 \times 10^{-10} \text{ m}^4$  (梁), 材料密度  $\rho = 7.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . 该框架结构的二维平面有限元模型及节点、单元、自由度编号如图 1 所示.

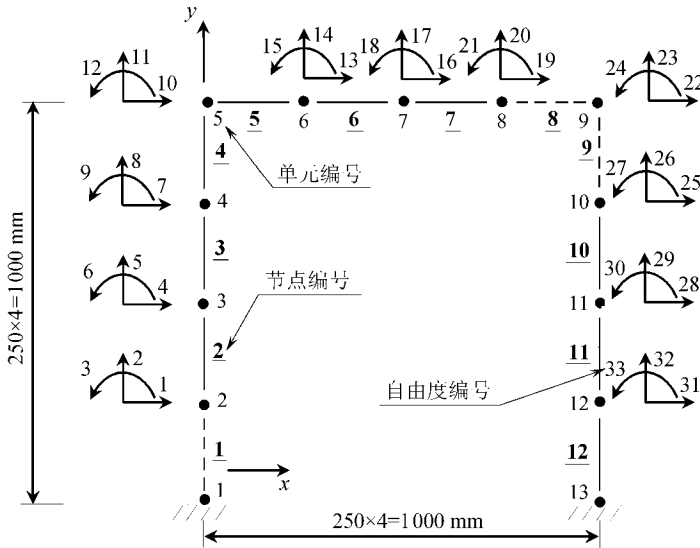


图 1 框架结构的平面二维有限元模型图

结构损伤的程度在损伤发展的初级阶段通常是比较小的, 因而探测这样的小损伤往往很困难. 本文利用所提出的方法专门研究在这种小损伤状况下的多损伤识别问题, 即在结构中多个不同部位出现不同程度的小损伤. 单元 1、8、9 被同时假定为损伤单元(如图 1 中的虚线单元), 且分别发生 5%、5% 和 7% 的刚度降低(即损伤). 在这种情况下, 由损伤所引起的模式参数的改变相当小. 计算机仿真结果表明, 前 6 阶自振频率的下降百分比中, 最大的不超过 1%.

表 1 本文所考虑的工况

工况编号(简短描述)	使用模式	噪声水平	使用的测量自由度编号
工况 1(基本)	前 6 阶	(1%, 1%)	1, 4, 7, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 28, 31
工况 2(较少模式)	前 3 阶	(1%, 1%)	1, 4, 7, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 28, 31
工况 3(较大噪声)	前 6 阶	(1%, 3%)	1, 4, 7, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 28, 31
工况 4(较少测量自由度)	前 6 阶	(1%, 1%)	1, 4, 7, 25, 28, 31

损伤识别结果的不确定性跟很多影响因素有关,比如测量噪声的大小,损伤识别所采用的模态阶数、测量自由度的数目等.为了研究和比较以上各种因素对于损伤识别结果的影响,本文设置了4种工况,如表1所示.工况1是一个基本工况,其他工况的结果均与其进行比较.在该工况中,采用前6阶模态参数(包括自振频率和振型)进行损伤识别,所考虑的噪声水平为 $\sigma_f = 1\%$ 和 $\alpha_f = 1\%$ .假定加速度计(传感器)安装在两个柱节点的 $x$ 方向,以及水平梁节点的 $y$ 方向.与这些传感器位置相对应的自由度编号(见图1)分别是1,4,7,11,14,17,20,23,25,28和31,即测量自由度总数为11.工况2研究本文所提出的方法在较少可用模态信息情况下的适用性.在此工况中,损伤识别仅采用前3阶模态参数.工况3则是用来研究本文方法在较大噪声水平下的适用情况.由于实际情况下,从模态试验中识别的振型测量数据的精度与自振频率相比相对较低,因此本工况中振型的噪声水平从1%提高到3%,而自振频率的噪声水平 $\sigma_f$ 则维持1%不变.在工况4中,测量自由度数目从11减少到6.

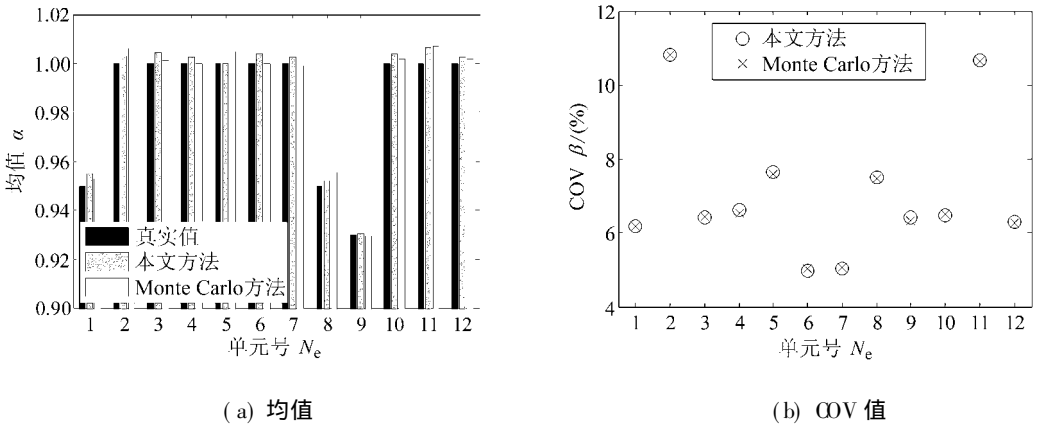


图2 本文方法与 Monte Carlo 方法对于工况1的研究结果比较

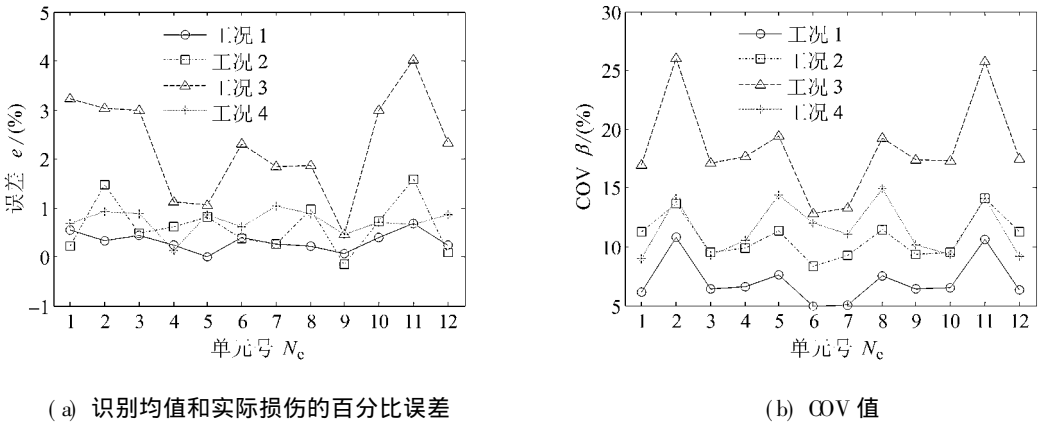


图3 本文方法对于各工况分析结果的比较

所有工况均采用变异系数(COV, coefficient of variation)  $\beta(\%)$  来研究损伤识别结果的不确定性程度,并且为方便起见,利用 $\alpha = 1 - \theta$ 来计算变异系数COV的值.损伤识别结果的精度是通过 $\alpha$ 的均值(或最优值)与真实损伤程度之间的百分比误差来衡量的.

在基本工况(工况1)中,采用5000次的Monte Carlo数值模拟来对本文方法进行验证.识别结果的均值和相应的不确定程度的比较结果如图2所示.从该图的对比中可以很清楚地看

出,两种方法给出的均值和对应的不确定程度很接近.这表明,本文方法的正确性通过 Monte Carlo 模拟法得到了很好地验证.

采用本文方法,图 3(a) 比较了各工况识别结果( $\alpha$  的均值)的精度,而图 3(b) 则给出了相应识别结果的不确定程度.从图 3(a) 中可以很明显地发现,在本文所考虑的 3 种影响因素中,测量噪声(见工况 3 对应的带有上三角符号的虚线)对于识别结果精度的影响最大.而其余两种因素(见工况 2 和 4)对于损伤识别精度的影响程度大致相当.此外,有关测量噪声对于本算例识别精度影响最大的论断,也可以从图 3(b) 中所给出的 COV 值上得到进一步地验证.应当指出,本文工况研究的目的并非要找出对于损伤识别结果的不确定性影响最大的一般性因素(因为这随所研究问题的不同而变化),而在于阐明,本文方法对于研究结构损伤识别中的不确定性问题,提供了一个快速、准确、而又方便的解决途径.

## 4 结 论

本文提出了一种基于有限元模型缩聚技术和摄动法的结构损伤统计识别方法.该方法仅利用从少量传感器采集到的受噪声污染的模态测量数据来进行损伤识别.本文方法能显式地处理损伤识别结果中的不确定性问题.这些不确定性的因素主要来源于测量信息的不完备,以及测量噪声等.文中采用 Monte Carlo 数值模拟技术,通过一个单层门式框架结构在多工况下的数值仿真研究,来对本文的方法进行验证.仿真结果表明本文方法与 Monte Carlo 数值模拟法的结果非常吻合,且能成功地识别损伤程度很小的多损伤情况.此外,文中还通过一系列的数值工况,研究了 3 种因素,即测量噪声、使用的测量模态阶数、测量自由度数目,对损伤识别结果不确定性的影响.由此可见,本文方法为定量研究影响损伤识别结果的不确定因素,提供一种方便而有效的解决途径.另外,工况研究结果表明,本文方法的一个突出的特点就是它可以很好地适用于较少测量自由度的情况.这一点对于实际应用中传感器数量受限,以及结构仅部分可测的情况尤其重要.

致谢 本文作者感谢香港城市大学策略研究基金(7001970)对本文的资助.

### [参 考 文 献]

- [1] Carden E P, Fanning F. Vibration based condition monitoring: a review[J]. *Structural Health Monitoring*, 2004, **3**(4): 355-377.
- [2] 朱安文,曲广吉,高耀南. 航天器结构动力模型修正中的缩聚方法[J]. *中国空间科学技术*, 2003, **23**(2): 6-10.
- [3] 尹涛,朱宏平,余岭. 基于敏感性的结构损伤识别中的噪声分析[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(6): 659-667.
- [4] Guyan R J. Reduction of stiffness and mass matrices[J]. *AIAA Journal*, 1965, **3**(2): 380.
- [5] O Callahan J. A procedure for an improved reduced system (IRS) model[A]. In: Demichele D J, Ed. *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference* [C]. Las Vegas, Nevada. Schenectady, NY: Union College, 1989, 17-21.
- [6] Kidder R L. Reduction of structural frequency equations[J]. *AIAA Journal*, 1973, **11**(6): 892-892.
- [7] Friswell M I, Garvey S D, Penny J E T. Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **186**(2): 311-323.
- [8] 张德文,魏阜旋. 模型修正与破损诊断[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

- [9] Lam H F, Ng C T, Veidt M. Experimental characterization of multiple cracks in a cantilever beam utilizing transient vibration data following a probabilistic approach[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, **305**(1/2): 34-49.
- [10] Papadopoulos L, Garcia E. Structural damage identification: a probabilistic approach[J]. AIAA Journal, 1998, **36**(11): 2137-2145.
- [11] Xia Y, Hao H. Statistical damage identification of structures with frequency changes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, **263**(4): 853-870.
- [12] MATLAB, Version 6.5 (Release 13)[EB]. Matlab Optimization Toolbox User's Guide. <http://www.mathworks.com/products/optimization/>, Mathworks, 2002.
- [13] Hao H, Xia Y. Vibration-based damage detection of structures by genetic algorithm[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2002, **16**(3): 222-229.

## Statistical Damage Detection of Structures Based on Model Reduction

YIN Tao<sup>1</sup>, LAM Heung fai<sup>1</sup>, ZHU Hong-ping<sup>2</sup>

(1. Department of Building and Construction, City University of Hong Kong,  
Kowloon, Hong Kong, P. R. China;

2. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and  
Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

**Abstract:** A statistical damage detection method based on the finite element (FE) model reduction technique that utilizes measured modal data with a limited number of sensors is proposed. A deterministic damage detection process was formulated based on the model reduction technique, and then the probabilistic process was integrated into the deterministic damage detection process using the perturbation technique, which results in a statistical structural damage detection method. This is achieved by deriving the first- and second-order partial derivatives of uncertain parameters, such as the elasticity of the damaged member, with respect to the measurement noise, which then allows the expectation and the covariance matrix of the uncertain parameters to be calculated. The theoretical development of the proposed method is reported. Its numerical verification is proved by using a portal frame example and Monte Carlo simulation.

**Key words:** damage detection; model reduction; perturbation technique; Monte Carlo simulation