

热环境中粘贴压电层功能梯度材料梁的自由振动*

李世荣¹, 苏厚德¹, 程昌钧²

(1. 兰州理工大学 理学院 工程力学系, 兰州 730050;

2. 上海大学 力学系, 上海 200436)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 研究了上下表面粘贴压电层的功能梯度材料 Euler-Bernoulli 梁在升温及电场作用下的屈曲和自由振动行为. 在精确考虑轴线伸长基础上, 建立了压电功能梯度材料层合梁在热-电-机载荷作用下的几何非线性动力学控制方程. 其中, 假设功能梯度材料性质沿厚度方向按照幂函数连续变化, 上下压电层为各向同性均匀材料. 在小振幅和谐振动假设下, 上述非线性偏微分方程组被转化为两套相互耦合的常微分方程组, 即过屈曲问题的控制方程和过屈曲构形附近的线性振动控制方程. 采用打靶法数值求解上述两个耦合的常微分方程边值问题, 获得了在均匀电场和横向非均匀升温场作用下两端固定压电-功能梯度材料层合梁在屈曲前和过屈曲构型附近的自由振动响应. 绘出了梁的过屈曲平衡路径以及前 3 阶固有频率随热、电载荷及材料梯度参数变化的特性曲线. 结果表明, 梁的前 3 阶频率在屈曲前随着温度升高而减小, 在进入过屈曲后它们却随着温度升高而增加. 通过施加电压在压电层产生拉应力可有效地提高梁的热屈曲临界载荷, 从而提高其固有频率.

关键词: 功能梯度材料; 压电层合梁; 热屈曲; 自由振动; 固有频率

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1009-0887.2009.08.003

引 言

近年来, 弹性梁(杆)在温度载荷作用下的热屈曲以及热过屈曲构型附近的振动响应引起了研究者的关注^[1-8]. Confin 等^[1]在精确考虑轴线伸长情况下, 首次给出了两端不可移简支弹性杆湿热过屈曲问题的椭圆积分形式解. Vaz 和 Solano^[2-3]在考虑材料的热应变与升温之间的非线性效应后采用与文献[1]中的同样的方法研究了均匀受热的简支梁的热过屈曲问题, 其中还考虑了端部轴向弹簧支承. Li 等^[4-6]在精确考虑轴线伸长的基础上建立了包含轴线位移、横截面转角和内力等 7 个基本未知量的梁(杆)的几何非线性控制方程, 采用打靶法求解所得非线性两点边值问题, 获得了多种边界条件下加热梁(杆)的热过屈曲平衡路径和平衡构形, 并

* 收稿日期: 2009-03-12; 修订日期: 2009-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872083; 10602021); 教育部博士点基金资助项目(200807310002)

作者简介: 李世荣(1957—), 男, 甘肃人, 教授, 博士(联系人, E-mail: lsr@lut.cn).

分析了由于弹性地基刚度引起的热屈曲模态跃迁特性. 在进一步考虑横向剪切变形的情况下, 还研究了 Timoshenko 梁在机械和热载荷作用下的过屈曲响应^[7]. 在文献[4-6]的基础上, Li 等^[8]研究了受轴向约束的均匀加热 Euler-Bernoulli 梁在热屈曲前后的自由振动响应, 获得了前四阶固有频率与升温参数的特性关系曲线.

由于功能梯度材料结构在高温梯度环境下具有减小热变形梯度和缓解热应力的优越性, 功能梯度梁板的在变温场中热弹性静动态响应研究引起人们的重视. Sankar^[9]等基于弹性力学基本理论推导出了 FGM Euler 梁的位移、应力的简化表达式. Chakraborty 等^[10]采用有限元法分析了具有 FGM 过渡层的 Timoshenko 夹层梁的弯曲和振动. Bhangale 等^[11]利用有限单元方法研究含有粘弹性层的功能梯度梁在热环境下的屈曲与振动. 夏贤坤和沈惠申^[12-13]基于 Reddy 高阶剪切变形理论和广义 von Kármán 型方程分别研究了 FGM 板和混杂铺设的层合板在热屈曲前和热过屈曲状态的非线性自由振动响应, 给出了频率与温度载荷的特征曲线. 李世荣等^[14]采用文献[7]中的理论和数值方法, 研究了材料性质沿厚度按幂函数变化的功能梯度材料 Timoshenko 梁的热过屈曲响应, 分析不同材料梯度变化参数下梁的过屈曲挠度随温度载荷变化的规律.

由于压电驱动材料在结构主动控制中的广泛应用, 压电智能复合材料结构的屈曲和自由振动特性已有大量的研究. Crawley 和 Luis^[15]研究了压电层合梁的静动态响应, 给出了压电材料与结构体之间的静动态耦合模型, 并通过实验验证了理论结果的可靠性. 但是, 在文献[15]中的梁模型没有考虑横向剪切变形以及轴向力的影响. Zhou 等^[16-17]对表面粘贴压电片的梁式板和变厚度板的几何非线性大变形及振动响应的智能控制进行了研究. 林启荣等^[18]分析了压电驱动器对弹性梁的等效作用, 并给出了一端固支一端简支梁的解析解. Fridman 等^[19]基于一阶剪切理论, 研究了对称和非对称铺设压电层的层合梁的固有频率、屈曲变形等与机械载荷及电载荷之间的特征曲线关系. 于涛和仲政^[20]采用 Airy 应力函数法推导出了压电功能梯度材料悬臂梁二维平面问题解析解. Huang 和 Shen 在文献[21]中在考虑高阶剪切变形的情况下研究了上下表面粘贴压电层的功能梯度材料矩形板的在热-电载荷作用下的非线性振动响应, 其中还考虑了材料性质参数与温度的依赖性.

在关于压电层合梁和压电功能梯度材料梁的分析研究中, 极少涉及热-电载荷共同作用下 FGM 梁和压电 FGM 梁在热过屈曲大变形构型附近的自由振动响应研究. 本文拟在已有研究工作^[4-7, 14]基础上, 对上下表面粘贴压电层的 FGM 层合梁在横向非均匀升温 and 均匀驱动电压作用下的几何非线性大变形以及大变形构型附近的自由振动进行定量分析, 给出与热、电载荷参数有关的过屈曲平衡路径以及频率-载荷特性曲线, 详细分析和讨论逆压电效应、热载荷和材料梯度性质对变形和振动特性的影响.

1 问题的数学模型

考虑上、下表面层为压电层, 中间层为功能梯度材料层合梁. 上下压电层厚度相同, 均为 h_1 , 功能梯度材料层厚度为 h_2 . 梁的长度为 l , 宽度为 b , 总厚度为 h_0 . 为研究方便起见, 只考虑逆压电效应, 并且认为压电层与功能梯度层之间牢固粘贴. 这里, 研究梁在升温 and 电压作用下的静动态响应, 分析通过对压电层的电压驱动实现对梁的热静态变形、振动固有频率的调整作用.

1.1 非线性几何方程

精确考虑梁的轴线伸长, 可得梁变形后轴线的几何方程^[4,5]:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \Lambda_0 \cos \theta - 1, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = \Lambda_0 \sin \theta, \quad (1)$$

其中, x 为变形前梁轴线上任意一点物质坐标, 且 $x \in [0, l]$; $u_0(x)$ 和 $w_0(x)$ 分别为轴线上点在 x, z 方向的位移, $\theta(x)$ 为梁变形后轴线切线与 x 轴正向的夹角, Λ_0 为轴线伸长率^[4,6].

忽略横向剪切变形, 由 Euler-Bernoulli 梁理论可得横截面上任意点处的正应变为^[5]

$$\varepsilon = \Lambda_0 - 1 - z \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2)$$

1.2 本构方程

假设材料为线性热弹性材料, 并且梁的各层之间界面上的变形是连续的, 由此可得压电功能梯度材料层合梁中第 j 层的物理方程^[20]:

$$\sigma^{(j)} = E_j (\varepsilon - \alpha T - d_j E'_{zj}), \quad (3)$$

其中 E_j , α 和 E'_{zj} 分别为第 j 层的拉伸弹性模量、热膨胀系数和电场强度 ($j = 1, 2, 3$), d_j 为压电应变常量, T 为升温. 考虑外电压只沿厚度方向作用, 且沿 z 轴的负方向为电压减小的方向, 则压电层的电场强度可以表示为^[20]

$$E'_{zj} = V_j / h_j, \quad (4)$$

其中 V_j 为第 j 层的电压, 对于功能梯度材料层有 $V_2 = 0$.

设功能梯度材料中间层由陶瓷和金属两种材料组成, 并且由上表面的纯陶瓷连续变化为下表面的纯金属. FGM 的材料物性参数(弹性模量 E 、Poisson 比 ν 、热膨胀系数 α 和热传导系数 K 等) 满足下列关系^[14, 21]

$$P = V_m P_m + V_c P_c, \quad V_m + V_c = 1, \quad V_c = \left[\frac{1}{2} + \frac{z}{h_2} \right]^n, \quad \left[-\frac{h_2}{2} \leq z \leq \frac{h_2}{2} \right], \quad (5)$$

其中 V_m, V_c 分别为金属和陶瓷的体积分数. 这里假设陶瓷体积分数沿厚度方向坐标按幂函数连续变化. 将式(2)代入式(3)可得轴力和弯矩表达式:

$$N(x) = (\Lambda_0 - 1) C_1 - \frac{\partial \theta}{\partial x} C_2 - N_T - N_E, \quad (6a)$$

$$M(x) = (\Lambda_0 - 1) C_2 - \frac{\partial \theta}{\partial x} C_3 - M_T - M_E, \quad (6b)$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 分别为刚度系数; N_T, N_E 分别为热轴力和电轴力, M_T, M_E 分别为热弯矩和电弯矩, 具体定义为

$$(C_1, C_2, C_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{A_j} (1, z, z^2) E_j dA, \quad N_T = \sum_{j=1}^3 \iint_{A_j} E_j \alpha T dA_j, \quad (7)$$

$$M_T = \sum_{j=1}^3 \iint_{A_j} E_j \alpha T z dA_j, \quad N_E = \sum_{j=1}^3 \iint_{A_j} E_j d_{13} E'_{zj} dA_j, \quad M_E = \sum_{j=1}^3 \iint_{A_j} E_j d_{13} E'_{zj} z dA_j. \quad (8)$$

1.3 热传导方程

考虑梁受到静态横向非均匀升温场作用. 设梁的上表面升温为 T_U , 下表面升温为 T_L . 梁内升温可由下列一维热传导方程确定^[14, 21]:

$$\frac{d}{dz} \left[K \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0. \quad (9)$$

由上、下表面的边界条件和界面出处的连续性条件可以确定各层的升温场分别为

$$T_1(z) = T_{12} + \frac{T_U - T_{12}}{h_1} \left[z - \frac{h_2}{2} \right] \quad \left[\frac{h_2}{2} < z < h_1 + \frac{h_2}{2} \right], \quad (10)$$

$$T_2 = T_{32} + (T_{12} - T_{32}) \frac{1}{c} \int_{-h_2/2}^z \frac{1}{K_m + V_c(z)(K_c - K_m)} dz \quad \left[-\frac{h_2}{2} < z < \frac{h_2}{2} \right], \quad (11)$$

$$T_3(z) = T_{32} + \frac{T_{32} - T_L}{h_1} \left[z + \frac{h_2}{2} \right] \quad \left[-h_1 - \frac{h_2}{2} < z < -\frac{h_2}{2} \right], \quad (12)$$

其中 T_{12} 和 T_{32} 分别为功能梯度层上表面和下表面(或上、下界面)处的温度. 具体表达式为

$$T_{12} = \frac{(h_1 + cK_p)T_U + T_L h_1}{2h_1 + cK_p}, \quad T_{32} = \frac{(h_1 + cK_p)T_L + T_U h_1}{2h_1 + cK_p}, \quad (13)$$

其中 K_p , K_c 和 K_m 分别表示压电、陶瓷和金属材料的导热系数; c 为常数, 其表达式为

$$c = \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{1}{K_m + V_c(z)(K_c - K_m)} dz.$$

1.4 平衡方程

采用轴线可伸长几何非线性理论, 可得梁在变形后构形的平衡方程^[5-6]:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\Lambda_0 q_x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda_0 q_z, \quad (14a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \Lambda_0(-H \sin\theta + V \cos\theta + q_0), \quad (14b)$$

其中 H , V 分别为横截面内的水平和横向内力分量, (q_x, q_z) 为作用于梁上的分布力, q_0 为分布力矩. 由静力等效关系, 变形后横截面内法向内力 N (轴力) 可由 H , V 表示为

$$N = H \cos\theta + V \sin\theta. \quad (15)$$

由方程(6)和(15)可以解得

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{[(\Lambda_0 - 1)C_2 - M - M_T - M_E]}{C_3}, \quad (16)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{C_1 C_3 - C_2^2} [C_3(H \cos\theta + V \sin\theta + N_T + N_E) - C_2(M + M_T + M_E)] + 1. \quad (17)$$

对于自由振动问题, 其惯性力可以表示为

$$q_x = -m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q_z = -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad q_0 = -I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (18)$$

其中 m_0, I_0 的表达式为

$$(m_0, I_0) = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \rho(z)(1, z^2) dz. \quad (19)$$

方程(1)、(14)、(16)构成了压电-功能梯度 Euler-Bernoulli 梁在热-电-机载荷同时作用下的几何非线性动力学控制方程. 其中包含了轴线位移 $u_0(x)$, $w_0(x)$, 横截面转角 $\theta(x)$ 以及等效内力 $H(x)$, $V(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 等6个基本未知函数, 它们都是物质坐标 x 的函数. 由式(17)可知轴线伸长率 Λ_0 也可以表示为上述基本未知函数的表达式.

2 无量纲控制方程

为便于分析, 将上述控制方程转化为无量纲形式. 为此, 引入下列无量纲量:

$$(\xi, S, U, W) = (x, s_0, u_0, w_0)/l, \quad (F_1, F_2, F_4) = (l^2 C_1, l C_2, l^2 C_4)/C_3,$$

$$\begin{aligned} (P_H, P_V, P_T, P_E) &= l^2(H, V, N_T, N_E)/C_3, \quad (p_x, p_z) = l^3(q_x, q_z)/C_3, \\ (m, m_T, m_E) &= l(M, M_T, M_E)/C_3, \quad \lambda = 12\delta^2\alpha_m T_L, \quad \Phi_1 = 12\delta^2 d_{31} V_1/h_1, \\ \Phi_2 &= 12\delta^2 d_{31} \frac{V_2}{h_1}, \quad \eta = \frac{h_1}{h_0}, \quad E_{r1} = \frac{E_c}{E_m}, \quad E_{r2} = \frac{E_p}{E_m}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{C_3}{l^4 I_0}}, \\ \alpha_{r1} &= \alpha_c/\alpha_m, \quad \alpha_{r2} = \alpha_p/\alpha_m, \quad T_r = T_U/T_L, \quad a = 1/(K_{r1} - 1), \quad \delta = l/h_0. \end{aligned}$$

将上述无量纲变换代入方程(1)、(14)、(16), 得到压电-功能梯度层合梁无量纲动力学控制方程:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \Lambda_0 \cos \theta - 1, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = \Lambda_0 \sin \theta, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = [(\Lambda_0 - 1)F_2 - m - m_T - m_E], \quad (20b)$$

$$\frac{\partial P_H}{\partial \xi} = \Lambda_0 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial P_V}{\partial \xi} = \Lambda_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad (20c)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \xi} = \Lambda_0 \left[-P_H \sin \theta + P_V \cos \theta - F_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right], \quad (20d)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= [(P_H \cos \theta + P_V \sin \theta + P_T + P_E) - \\ &F_2(m + m_T + m_E)] / (F_1 - F_2^2) + 1. \end{aligned} \quad (21)$$

上下表层电场同向(即 $V_1 = -V_2 = V$)时 $m_E = 0$, 上下表层电场异向(即 $V_1 = V_2 = V$)时 $P_E = 0$ ^[18].

考虑梁的两端固定, 则相应的无量纲边界条件可表示为

$$U(0, \tau) = 0, \quad W(0, \tau) = 0, \quad \theta(0, \tau) = 0, \quad (22)$$

$$U(1, \tau) = 0, \quad W(1, \tau) = 0, \quad \theta(1, \tau) = 0. \quad (23)$$

3 问题的求解

方程(20)的响应包括两部分: 静态热弹性变形解和静平衡构形附近的振动解. 为此, 将方程(20)解分解为^[8, 22]

$$U(\xi, \tau) = U_s(\xi) + U_d(\xi, \tau), \quad W(\xi, \tau) = W_s(\xi) + W_d(\xi, \tau), \quad (24a)$$

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_s(\xi) + \theta_d(\xi, \tau), \quad M(\xi, \tau) = M_s(\xi) + M_d(\xi, \tau), \quad (24b)$$

$$H(\xi, \tau) = H_s(\xi) + H_d(\xi, \tau), \quad V(\xi, \tau) = V_s(\xi) + V_d(\xi, \tau), \quad (24c)$$

其中下标为s的量为静态过屈曲问题的解, 下标为d的量为小振幅振动的动态解. 静态解满足热过屈曲问题的控制方程^[48]:

$$U'_s = \Lambda_s \cos \theta_s - 1, \quad W'_s = \Lambda_s \sin \theta_s, \quad (25a)$$

$$\theta'_s = [(\Lambda_s - 1)F_2 - m_s - m_T - m_E], \quad (25b)$$

$$H'_s = 0, \quad V'_s = 0, \quad (25c)$$

$$m'_s = \Lambda_s(-H_s \sin \theta + V_s \cos \theta), \quad (25d)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_s &= [(H_s \cos \theta + V_s \sin \theta + P_T + P_E) - \\ &F_2(m_s + m_T + m_E)] / (F_1 - F_2^2) + 1, \end{aligned} \quad (25e)$$

其中()'表示关于空间无量纲变量 ξ 的导数, H_s, V_s 为待定常量, 若考虑过屈曲构形的对称性, 则有 $V_s = 0$.

将式(24)代入式(20),令 $\sin \theta_d = \theta_d$, $\cos \theta_d = 1$, 略去动态响应量 U_d 、 W_d 、 θ_d 、 H_d 、 V_d 和 M_d 的非线性项, 并利用式(25)得到弹性梁在静态过屈曲构形附近小振幅振动的控制方程:

$$\frac{\partial U_d}{\partial \xi} = \Lambda_d \cos \theta_s - \Lambda_s \theta_d \sin \theta_s, \quad \frac{\partial W_d}{\partial \xi} = \Lambda_d \sin \theta_s + \Lambda_s \theta_d \cos \theta_s, \quad (26a)$$

$$\frac{\partial \theta_d}{\partial \xi} = \Lambda_d F_2 - m_d, \quad \frac{\partial H_d}{\partial \xi} = \Lambda_s \frac{\partial^2 U_d}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial V_d}{\partial \xi} = \Lambda_s \frac{\partial^2 W_d}{\partial \tau^2}, \quad (26b)$$

$$\frac{\partial m_d}{\partial \xi} = \Lambda_s [- (H_d + V_s \theta_d) \sin \theta_s + (V_d - H_s \theta_d) \cos \theta_s] + \Lambda_d [V_s \cos \theta_s - H_s \sin \theta_s] - \Lambda_s F_0 \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial \tau^2}, \quad (26c)$$

其中

$$\Lambda_d = [(V_d - H_s \theta_d) \sin \theta_s + (H_d + V_s \theta_d) \cos \theta_s - F_2 m_d] / (F_1 - F_2^2). \quad (27)$$

考虑系统的调和响应, 方程(26)的解可表示为

$$(U_d, W_d, \theta_d, H_d, V_d, m_d) = (u_d, w_d, \Theta_d, h_d, v_d, M_d) \cos \omega \tau, \quad (28)$$

其中 ω 为系统自由振动的频率, $u_d, w_d, \Theta_d, h_d, v_d, M_d$ 为振型函数. 将式(28)代入方程(26)可得到关于振型函数的线性常微分方程:

$$u_d' = \Gamma \cos \theta_s - \Lambda_s \Theta_d \sin \theta_s, \quad w_d' = \Gamma_s \sin \theta_s + \Lambda_s \Theta_d \cos \theta_s, \quad (29a)$$

$$\Theta_d' = \Gamma F_2 - M_d, \quad h_d' = -\Lambda_s \omega^2 u_d, \quad v_d' = -\Lambda_s \omega^2 w_d, \quad (29b)$$

$$M_d' = \Lambda_s [- (h_d + V_s \Theta_d) \sin \theta_s + (v_d - H_s \Theta_d) \cos \theta_s] + \Gamma [V_s \cos \theta_s - H_s \sin \theta_s] + \Lambda_s F_0 \omega^2 \Theta_d, \quad (29c)$$

其中

$$\Gamma = [(v_d - H_s \Theta_d) \sin \theta_s + (h_d + V_s \Theta_d) \cos \theta_s - F_2 m_d] / (F_1 - F_2^2). \quad (29d)$$

对于两端固支的边界, 关于静态过屈曲问题和振动问题的边界条件分别为

$$U_s(0) = U_s(1) = W_s(0) = W_s(1) = \theta_s(0) = \theta_s(1) = 0, \quad (30)$$

$$u_d(0) = u_d(1) = w_d(0) = w_d(1) = \Theta_d(0) = \Theta_d(1) = 0. \quad (31)$$

4 数值结果与讨论

尽管振动问题的控制方程(29)是线性的, 但是要求其解析解仍然是非常困难的. 因为其中包含的静态解本身则需要通过求解非线性边值问题(25)、(30)才能获得. 显然, 由于强非线性和变系数特点, 不论是过屈曲问题还是振动问题的解析解都难以获得. 因此, 本文采用打靶法寻其数值解. 首先, 把两点边值问题转化为包含待定初始参数的初值问题. 然后采用 Runge-Kutta 方法和 Newton-Raphson 法有机结合的数值方法不断调正这些未定的初始参数, 使得初值问题的解也满足终点处的边界条件, 从而得到相应的边值问题的解. 为了保证热过屈曲解与振动解在采用变步长四阶 Runge-Kutta 方法积分时具有相同离散点, 可将两个边值问题联立求解. 关于打靶法数值求解的具体实现步骤和程序可以参见文献[4-8, 22].

表 1 压电-功能梯度层合梁的物性参数

	弹性模量 E /GPa	Poisson 比 ν	线膨胀系数 α /($^{\circ}\text{C}$)	热导率 K /($\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$)
Al/m	70	0.31	23×10^{-6}	204
ZrO ₂ /m	151	0.288 2	10×10^{-6}	2.09
G-1 195 N/p	63	0.3	1.2×10^{-4}	0.17

数值计算中, 考虑梁的中间层为陶瓷氧化锆(Zirconia/ ZrO_2) 和金属铝(Aluminum/Al) 两相材料制成的功能梯度材料(记为 ZrO_2/Al), 上、下表层为压电材料为 G-1 195 N. 其组分材料物性参数见表 1^[14-21].

将压电-功能梯度梁退化为均匀各向同性梁 ($n = 0, \eta = 0$), 并考虑只受均匀升温作用, 得到无量纲临界升温的数值结果 $\lambda_{cr} = 39.478$, 与精确解^[4] $\lambda_{cr} = 4\pi^2$ 非常吻合. 由此可说明本文理论分析和计算程序的正确性.

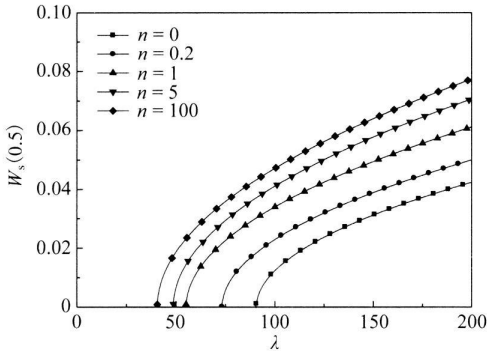


图 1 均匀升温下 FGM 梁无量纲中心挠度与无量纲升温的关系曲线 ($\eta = 0, T_r = 1$)

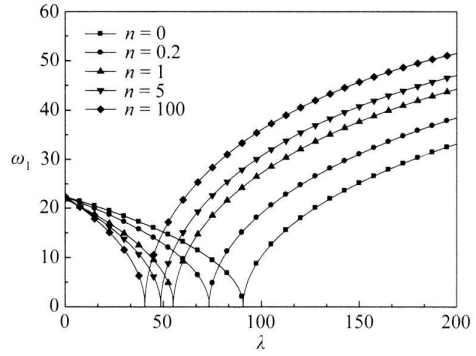


图 2(a) 一阶频率

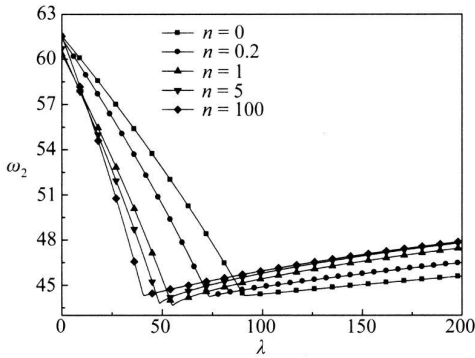


图 2(b) 二阶频率

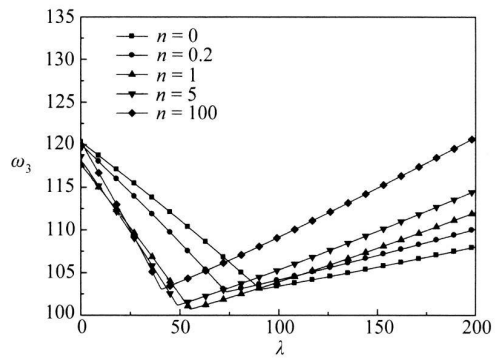


图 2(c) 三阶频率

图 2 均匀升温下具有不同指数 n 的功能梯度材料梁的前 3 阶固有频率 ω_i 与无量纲升温 λ 之间的关系曲线 ($\eta = 0, T_r = 1$)

对于贴压电层的 FGM 层合梁, 在两端固定边界条件下, 无论温度载荷沿厚度方向是否均匀分布, 静态解的控制方程(25)的线性化方程和边界条件(30)都是齐次的. 因此, 边值问题的解将表现出分叉特性, 静态弹性变形为过屈曲型的. 图 1 绘出了均匀升温下 ($T_r = 1$) 具有不同材料梯度分布指数 n 的 FGM 单层梁的热过屈曲平衡路径. 可以看出材料组分的体积分数变化规律对热屈曲临界温度及热过屈曲变形有明显影响. 指数越大临界温度越低, 过屈曲挠度越大. 在相同的温度载荷下, 纯陶瓷梁 ($n = 0$) 的变形量最小, 纯金属 ($n = 100$) 梁的变形量最大, 功能梯度材料梁的变形界于两者之间. 图 2 为具有不同材料组分体积分数指数的 FGM 梁在均匀升温场内的前 3 阶自由振动的频率与无量纲临界升温之间的特征关系曲线. 结果表明, 在屈曲前, 前 3 阶频率随着无量纲升温的升高而单调下降; 而在梁进入热过屈曲状

态后, 这些频率则随着温度的升高而单调增大. 正如预料的那样, 当温度达到梁的临界屈曲升温时一阶固有频率降为 0. 频率与温度的曲线连续而不光滑, 在临界温度载荷点处斜率改变了正负号. 材料体积组分指数 n 对固有频率也有明显影响. 在屈曲前, 频率随着指数 n 的增加而减小, 而在进入过屈曲状态后频率随 n 的增加而增加.

图 3 中绘出了非均匀升温下具有不同体积指数 n 的 FGM 单层梁的热过屈曲平衡路径. 结果表明, 两端固定的 FGM 梁在横向非均匀升温下仍会发生过屈曲变形, 其临界屈曲升温低于图 1 中均匀升温时的临界升温, 这是由于横向非均匀升温导致的梁内拉弯耦合效应比均匀升温时增加了, 因而使得梁更容易发生屈曲. 图 4 为具有不同材料组分体积分数指数的 FGM 梁在非均匀升温场内 ($T_r = 5$) 的前三阶自由振动的频率与无量纲临界升温之间的特征关系曲线. 图 2~ 4 反映出的频率随升温的变化规律与均匀升温场中结果类似.

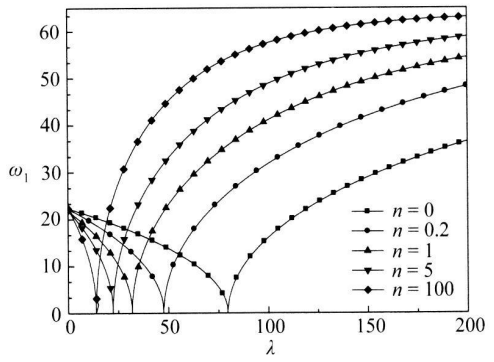
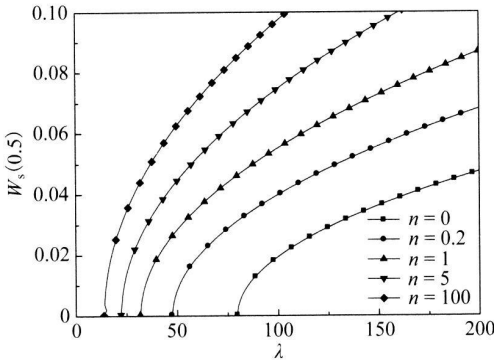


图 3 非均匀升温下中心无量纲挠度 $W_s(0.5)$ 与升温参数 λ 的具有不同指数 n 的功能梯度材料梁的热过屈曲平衡路径 ($\eta = 0, T_r = 5$)

图 4(a) 一阶频率

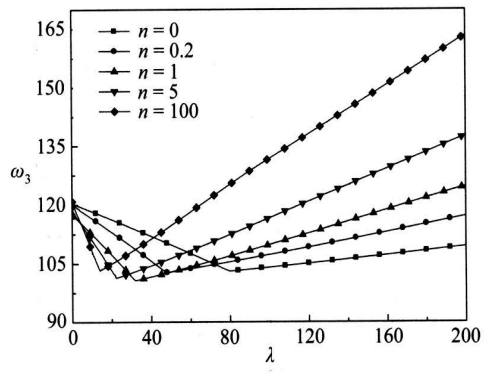
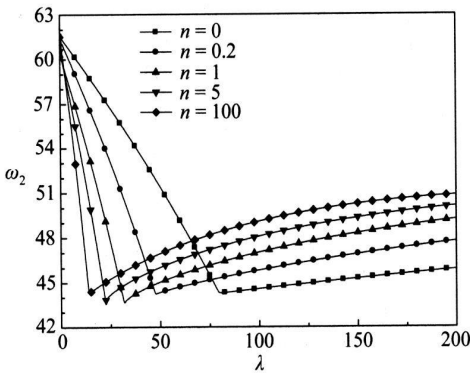


图 4(b) 二阶频率

图 4(c) 三阶频率

图 4 非均匀升温下具有不同指数 n 的功能梯度材料梁在屈曲前和屈曲后的前三阶固有频率 ω_i 与无量纲升温 λ 之间的关系曲线 ($\eta = 0, T_r = 5$)

在图 5 中绘出了只在电场作用下具有不同体积分数指数 n 的具有压电层的 FGM 层合梁的热过屈曲平衡路径. 在两端固定边界条件下, 对下压电表层施加正电压时 ($\Phi > 0$) 会在梁内产生压应力, 当压应力超过临界应力后梁的静态弹性变形依然为过屈曲型的. 图 6 为 FGM 压电层合梁在电场作用下的前三阶自由振动频率与无量纲电压之间的特征关系曲线. 在 Φ

> 0 的范围内, 频率随电压的变化规律与图 4 类似. 因此, 屈曲前, 不同的 n 值对应的频率-电压曲线出现了相互交叉的现象. 在 $\Phi = 0$ 处的频率与图 4 中 $\lambda = 0$ 的结果相同. 在 $\Phi < 0$ 时,

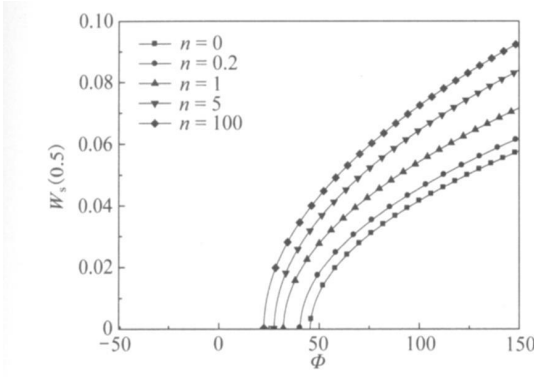


图 5 只在电场作用下压电功能梯度材料层合梁的过屈曲中心挠度 $W_s(0.5)$ 与无量纲电压 Φ 之间关系曲线 ($\eta = 0.01, \lambda = 0$)

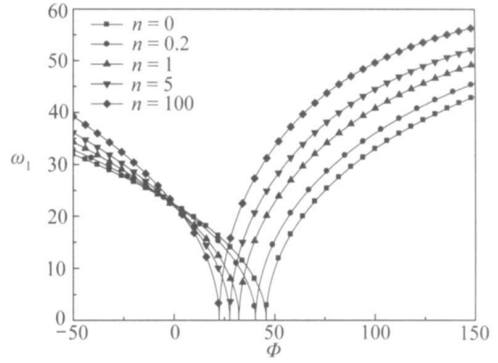


图 6(a) 一阶频率

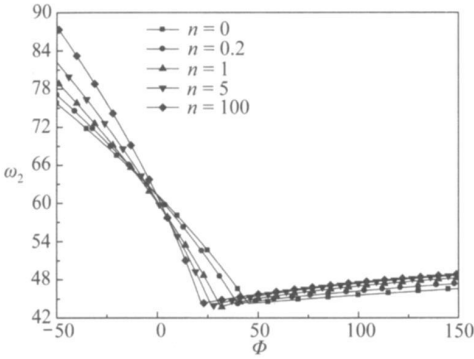


图 6(b) 二阶频率

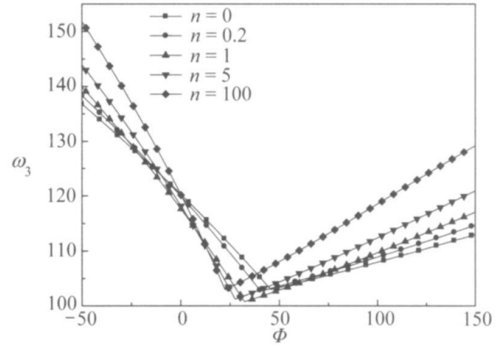


图 6(c) 三阶频率

图 6 只有电场作用下压电-功能梯度材料梁的前 3 阶固有频率 ω_i 与无量纲电压 Φ 之间关系曲线 ($\eta = 0.01, \lambda = 0$)

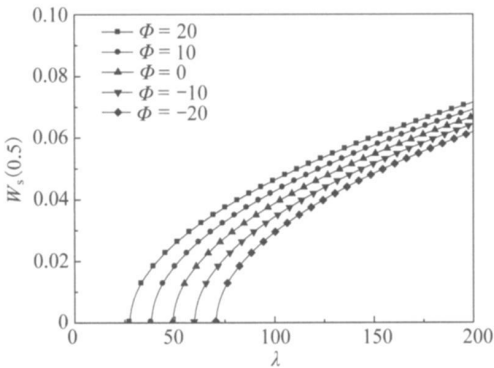


图 7 在热、电载荷共同作用下压电层合梁的无量纲挠度 $W_s(0.5)$ 与无量纲升温 λ 之间关系曲线 ($\eta = 0.01, n = 0, T_r = 5$)

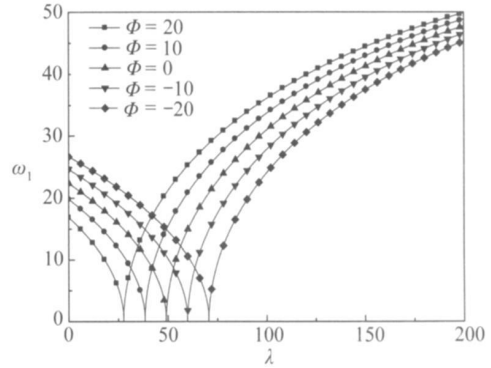


图 8(a) 一阶频率

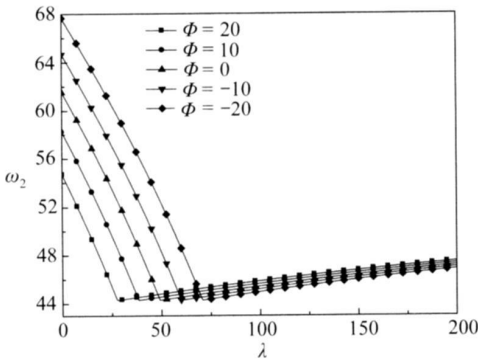


图 8(b) 二阶频率

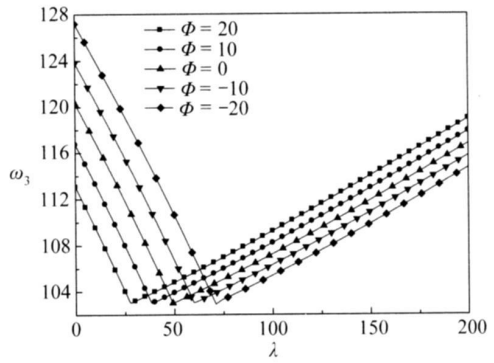


图 8(c) 三阶频率

图 8 在热、电载荷共同作用下压电层合梁的前 3 阶固有频率 ω_i 与无量纲升温 λ 之间关系曲线 ($\eta = 0.01, n = 0, T_r = 5$)

随着电压绝对值的增加频率增加,这是由于此时在压电层中产生了拉应力,从而提高了梁的抗弯刚度。在临界电压处,一阶频率为 0,二、三阶频率不为 0。随着指数 n 的增大,临界电压减小,这是由于金属材料成分的增大使得梁的刚度降低了。

图 7 绘出了给定不同无量纲电压 Φ 时中心层为均匀材料 ($n = 0$) 的压电层合梁在横向非均匀升温作用下的热过屈曲平衡路径。结果表明,正的电场会降低梁的临界温度载荷,增加过屈曲变形;而负电场则会提高临界温度载荷,抑制过屈曲变形。图 8 为压电层合梁在图 7 所示的平衡路径所对应的平衡构形附近的前三阶自由振动频率与无量纲升温之间的特征关系曲线。结果表明,在屈曲前,随着无量纲电压 Φ 的代数值的减小导致了压电层中拉应力增加的趋势,从而产生对升温产生的压应力的抵消作用,因此梁的频率呈现增大的趋势;而在过屈曲以后,电压对频率的影响则与屈曲前相反,在同样的过屈曲温度下电压代数值的减小却导致频率的减小,这是由于在过屈曲后压电层中拉应力增加的趋势将导致过屈曲变形的减小,从而导致结构平衡构形向临界屈曲状态的靠近,这样相当于过屈曲状态结构刚度的减小趋势。图中反应的频率随电压的变化规律是单调的,而且分布均匀,具有比例增加的特点,这在实际应用中易于控制。

5 结 论

采用数值打把法研究了贴压电层的功能梯度材料梁在均匀电场和非均匀升温场作用下的过屈曲行为和过屈曲构形附近的小振幅自由振动响应。给出了梁的中心无量纲挠度与热、电载荷之间过屈曲平衡路径曲线以及屈曲前后系统的前 3 阶固有频率随载荷参数变化的特性曲线。定量分析了材料梯度变化指数、升温参数以及驱动电压对静态过屈曲变形和振动频率的影响。从本文的研究结果可得如下结论: 1) 无量纲电压一定时,随着材料体积分数指数的增加临界温度降低过屈曲变形增加,这是由于体积分数值数的增加意味着金属材料成分的增加,从而导致梁的弯曲刚度的降低; 2) 梁在未屈曲时,前 3 阶频率都随温度载荷和电载荷的增加而单调下降。当载荷达到临界值时,一阶振动频率为 0;但是,2 阶以上频率在临界载荷处,或临界平衡状态不为 0; 3) 频率-载荷曲线在临界载荷点处连续但不光滑。这是由于临界载荷点对应过屈曲平衡路径的分叉点,结构由此点从原始的直线平衡状态进入第二平衡构形或过屈曲平衡构形。这是两个完全不同的平衡状态,因此它们具有完全不同的振动响应^[8,12,22];

4) 通过对上下压电层的反向驱动可以减小或延缓温度载荷下的热屈曲, 同样可以实现对结构的固有频率的调节.

[参 考 文 献]

- [1] Coffin D W, Bloom F Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam[J] International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, **34**(5): 935-947
- [2] Vaz M A, Solano R F Post-buckling analysis of slender elastic rods subjected to uniform thermal loads[J] Journal of Thermal Stresses, 2003, **26**(9): 847-860
- [3] Vaz M A, Solano R F Thermal post-buckling of slender elastic rods with hinged ends constrained by a linear spring[J] Journal of Thermal Stresses, 2004, **27**(4): 367-380
- [4] 李世荣, 程昌钧 加热弹性杆的热过屈曲分析[J] 应用数学和力学, 2000, **21**(2): 119-125
- [5] Li S-R, Zhou Y-H, Zheng X-J Thermal post-buckling of a heated elastic rod with pinned-fixed ends [J] Journal of Thermal Stresses, 2002, **25**(1): 45-56
- [6] Li S-R, Batra R C Thermal buckling and post-buckling of Euler-Bernoulli beams supported on nonlinear elastic foundations[J] AIAA Journal, 2007, **45**(3): 711-720
- [7] Li S-R, Zhou Y-H Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko beams under thermomechanical loadings[J] Journal of Thermal Stresses, 2003, **26**(9): 867-872
- [8] Li S-R, Teng Z-C, Zhou Y-H Free vibration of heated Euler-Bernoulli beams with thermal post-buckling deformations[J] Journal of Thermal Stresses, 2004, **27**(9): 843-856
- [9] Sankar B V An elasticity solution for functionally graded beams[J] Composites Science and Technology, 2001, **61**(5): 689-696
- [10] Chakraborty A, Gopalakrishnan S, Reddy J N A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials[J] International Journal of Mechanical Sciences, 2003, **45**(3): 519-539
- [11] Bhangale R K, Ganesan N Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core[J] Journal of Sound and Vibration, 2006, **295**(1/2): 294-316
- [12] Xia X-K, Shen H-S Vibration of postbuckled FGM hybrid laminated plates in thermal environment [J] Engineering Structures, 2008, **30**(9): 2420-2435
- [13] 夏贤坤, 沈惠申 功能梯度材料剪切板热屈曲后的非线性振动[J] 振动工程学报, 2008, **21**(2): 120-125
- [14] 李世荣, 张靖华, 赵永刚 功能梯度材料 Timoshenko 梁的热过屈曲分析[J] 应用数学和力学, 2006, **27**(6): 709-715
- [15] Crawley E F, de Luis J Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures[J] AIAA Journal, 1987, **25**(10): 1373-1385
- [16] Zhou Y-H, Wang J-Z Vibration control of piezoelectric beam-type plates with geometrical nonlinear deformation[J] Int J Non-Linear Mech, 2004, **39**(6): 909-920
- [17] Zhou Y-H, Wang J-Z, Zheng X-J, et al Vibration control of variable thickness plates with piezoelectric sensors and actuators based on wavelet theory[J] Journal of Sound and Vibration, 2000, **237**(3): 395-410
- [18] 林启荣, 刘正兴, 王宗利 电场作用下压电层合梁的分析[J] 应用数学和力学, 2001, **22**(9): 969-975
- [19] Fridman Y, Abramovich H Enhanced structural behavior of flexible laminated composite beams[J] Composite Structures, 2008, **82**(1): 140-154

- [20] 于涛, 仲政 均布荷载作用下功能梯度悬臂梁弯曲问题的解析解[J] 固体力学学报, 2006, 27(1): 15-20
- [21] Huang X-L, Shen H-S Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments[J] Journal of Sound and Vibration, 2006, 289(1/2): 25-53
- [22] LI Shi-rong, Batra Romesh C, MA Lan-sheng Vibration of thermally post buckled orthotropic circular plate[J] Journal of Thermal Stresses, 2007, 30(1): 43-57
- [23] William H P, Brain P F, San A T, et al. Numerical Recipes —The Art of Scientific Computing[M] London: Cambridge University Press, 1986

Free Vibration of Functionally Graded Material Beams With Surface-Bonded Piezoelectric Layers in Thermal Environment

LI Shi-rong¹, SU Hou-de¹, CHENG Chang-jun²

(1. Department of Engineering Mechanics, School of Science,
Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200436, P. R. China)

Abstract: Free vibration of statically thermal post-buckled functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers subjected to both temperature rise and voltage is studied. By accurately considering the axial extension and based on Euler-Bernoulli beam theory, geometrically nonlinear dynamic governing equations for FGM beams with surface-bonded piezoelectric layers subjected to thermo-electro-mechanical loadings were formulated. It was assumed that the material properties of the middle FGM layer vary continuously as a power law function of the thickness coordinate and that the piezoelectric layers are isotropic and homogenous. By assuming that the amplitude of beam's vibration is small and its response harmonic, the above mentioned non-linear partial differential equations were reduced to two sets of coupled ordinary differential equations; the one for the post-buckling, and the other for linear vibration of the beam superimposed upon the post-buckled configuration. By using a shooting method to solve the two sets of ordinary differential equations with fixed-fixed boundary conditions numerically, response of post-buckling and free vibration in the vicinity of the post-buckled configuration of the beam with fixed-fixed ends and subjected to transversely non-uniform heating and uniform electric field were obtained. Thermo-electric post-buckling equilibrium paths and characteristic curves of the first three natural frequencies versus the temperature, the electricity and the material gradient parameters were plotted. It is found that the three lowest frequencies of the pre-buckled beam decrease with an increase in the temperature, but those of a buckled beam increase monotonically with the temperature rise. The results also show that the tensional force produced in the piezoelectric layers by the voltage can efficiently increase the critical buckling temperature and the natural frequency.

Key words: functionally graded material; laminated beams with piezoelectric layers; thermal buckling; free vibration; natural frequency