

# Landau-Ginzburg-Higgs 方程的 多辛 Runge-Kutta 方法\*

胡伟鹏<sup>1,2</sup>, 邓子辰<sup>1,3</sup>, 韩松梅<sup>1</sup>, 范玮<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;

2. 西北工业大学 动力与能源学院, 西安 710072;

3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

(岳珠峰推荐)

**摘要:** 非线性波动方程作为一类重要的数学物理方程吸引着众多的研究者, 基于 Hamilton 空间体系的多辛理论研究了 Landau-Ginzburg-Higgs 方程的多辛算法, 讨论了利用 Runge-Kutta 方法构造离散多辛格式的途径, 并构造了一种典型的半隐式的多辛格式, 该格式满足多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律. 数值算例结果表明该多辛离散格式具有较好的长时间数值稳定性.

**关键词:** 多辛; Landau-Ginzburg-Higgs 方程; Runge-Kutta 方法; 守恒律; 孤子解

**中图分类号:** O175.24      **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.009

## 引 言

几个世纪以来, 非线性发展方程有趣而新颖的性质一直是学术界关注的热点问题之一. 为了更为直接的揭示非线性发展方程的这些性质, 学术界相继提出了一系列求解非线性发展方程的数值算法. 近年来, 由于多辛算法能够精确地保持某些偏微分方程组系统的局部性质而得到了广泛重视<sup>[1-4]</sup>. 基于多辛算法的这一特点, 许多保守型的偏微分方程, 如 Schrödinger 方程、KdV 方程等等, 都存在能够较好保持守恒律的多辛格式的性质<sup>[1-6]</sup>. 本文将详细讨论 Landau-Ginzburg-Higgs 方程的多辛算法.

本文针对一典型的非线性波动方程: Landau-Ginzburg-Higgs 方程, 导出了其多辛偏微分方程组形式及多种守恒律; 利用辛 Runge-Kutta 方法, 先独立地离散多辛偏微分方程组的各个方向, 复合这些多辛离散格式得到原偏微分方程的多辛格式, 得到相应的多辛算法, 并以孤子解

\* 收稿日期: 2009-04-12; 修订日期: 2009-06-20

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10772147; 10632030); 教育部博士点基金资助项目(20070699028); 陕西省自然科学基金资助项目(2006A07); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目(GZ0802)

**作者简介:** 胡伟鹏(1977—), 男, 湖北人, 博士(联系人, E-mail: wphu@nwpu.edu.cn);  
邓子辰(1964—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn);  
韩松梅(1981—), 女, 陕西人, 硕士;  
范玮(1966—), 女, 江西人, 教授, 博士, 博士生导师.

数值模拟验证了该多辛算法的有效性. 值得说明的是: 在波动方程的多辛形式构造方法及其借鉴 Runge-Kutta 离散思想方面, 本文的工作与文献[4]类似, 本文的贡献在于借鉴 Runge-Kutta 离散思想构造复合多辛格式及其 Landau-Ginzburg-Higgs 方程多辛复合格式的计算机实现.

## 1 Landau-Ginzburg-Higgs 方程的多辛形式

依据多辛理论<sup>[1,3]</sup>, 许多保守系统都能够描述为以下的多辛形式:

$$M\partial_t z + K\partial_x z = \nabla_z S(z), \quad z \in R^d, \quad (1)$$

式中  $M, K \in R^{d \times d}$  为反对称矩阵,  $S: R^d \rightarrow R$  是光滑函数, 称为 Hamilton 函数.

在这一部分, 我们将详细推导 Landau-Ginzburg-Higgs 方程的多辛形式:

$$\partial_u u - \partial_{xx} u - m^2 u + k^2 u^3 = 0, \quad (x, t) \in u \subset R^2, \quad (2)$$

该方程是一典型的非线性发展方程, 方程中  $m$  和  $k$  为实常数.

引入正交动量:  $v = \partial_t u, w = \partial_x u$ , Landau-Ginzburg-Higgs 方程(2)就可以写成如下的一阶偏微分方程组形式:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x w = m^2 u - k^2 u^3 - \\ - \partial_t u = -v, \\ \partial_x u = w. \end{cases} \quad (3a, b, c)$$

定义状态变量  $z = [u, v, w]^T \in R^3$ , 一阶偏微分方程组(3)就可以写成矩阵形式(1), 其中反对称矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

以及 Hamilton 函数为

$$S(z) = \frac{1}{2} m^2 u^2 - \frac{1}{4} k^2 u^4 + \frac{1}{2} (w^2 - v^2).$$

众所周知, 多辛算法的精髓就在于多辛算法能够精确保持多种守恒率<sup>[1]</sup>. 与多辛形式(1)相对应的多辛守恒律为

$$\partial_t (dz \wedge M dz) + \partial_x (dz \wedge K dz) = 0. \quad (4)$$

对于 Landau-Ginzburg-Higgs 方程(2), 多辛守恒律的具体形式为

$$\partial_t (dv \wedge du) + \partial_x (du \wedge dw) = 0. \quad (5)$$

另外两种守恒率是局部能量守恒律和局部动量守恒律<sup>[7]</sup>. 多辛形式(1)的局部能量守恒律为

$$\partial_t E + \partial_x F = 0, \quad (6)$$

其中能量密度  $E = S(z) - z^T K \partial_x z / 2$ , 能量通量  $F = z^T K \partial_t z / 2$ .

对应于 Landau-Ginzburg-Higgs 方程(2), 局部能量守恒律表述为

$$m^2 u \partial_t u - k^2 u^3 \partial_t u + w \partial_t w - v \partial_t v - \partial_t w \partial_x u + \partial_t u \partial_x w = 0. \quad (7)$$

将式(1)与  $\partial_x z$  作内积得到多辛形式(1)的局部动量守恒律. 对应于 Landau-Ginzburg-Higgs 方程(2), 局部动量守恒律表述为<sup>[3-6]</sup>

$$\partial_t I + \partial_x G = 0, \quad (8)$$

其中

$$I = \frac{1}{2}(u\partial_x v - v\partial_x u),$$

$$G = \frac{1}{2}m^2 u^2 - \frac{1}{4}k^2 u^4 + \frac{1}{2}(w^2 - v^2) - \frac{1}{2}(u\partial_t v - v\partial_t u).$$

## 2 多辛 Runge-Kutta 方法

二维相空间上标准的 Hamilton 系统可以表述为

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{J} \nabla_{\phi} H(\phi), \quad (9)$$

其中,  $\phi$  为状态变量  $\phi = (p, q)^T$ ,  $\mathbf{J}$  为 Jacobi 矩阵  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $H(\phi) \in C^{\infty}(R^2)$  为 Hamilton 函数.

实际上, Hamilton 系统(9) 往往是可分的, 所谓可分的 Hamilton 系统, 是指该系统的 Hamilton 函数可以分成  $H(\phi) = H(p, q) = U(p) + V(q)$ .

这样, 可分的 Hamilton 系统的运动方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} U'_p \\ V'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(q) \\ g(p) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其一个相容的  $N$  级 Runge-Kutta 格式为

$$\begin{cases} \phi_{k+1} = \phi_k + h \sum_{i=1}^N b_i \mathbf{J} \nabla H(k_i), \\ k_i = \phi_k + h \sum_{j=1}^N a_{i,j} \mathbf{J} \nabla H(k_i), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

其中,  $h$  是时间步长, 系数  $b_i, a_{i,j}$  满足阶条件<sup>[8]</sup>.

依据辛几何理论<sup>[8]</sup>, 格式(11) 成为辛格式当且仅当

$$b_i a_{i,j} + b_j a_{j,i} - b_i b_j = 0, \quad \forall i, j.$$

为了应用辛 Runge-Kutta 格式(11) 离散多辛偏微分方程组(3), 再次引入 2 个中间变量:  $T = \partial_t v$  和  $Q = \partial_x w$ . 利用这些中间变量, 则多辛偏微分方程组(3) 可以写成如下的 2 个不同方向形式上非耦合的微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v = T, \quad \frac{d}{dt} u = v, \\ \frac{d}{dx} w = Q, \quad \frac{d}{dx} u = w, \end{cases} \quad (12a, b)$$

其中式(12a) 对应时间  $t$  方向, 式(12b) 对应空间  $x$  方向, 同时中间变量  $T, Q$  满足

$$T - Q = m^2 u - k^2 u^3. \quad (13)$$

式(13) 将式(12) 中形式上已经解耦的微分方程组联合起来. 下面我们就以格式(11) 离散联合的微分方程组(12). 为了构造格式方便, 假定两个方向的离散都是从第  $n$  层到第  $n+1$  层,  $\Delta t$  为时间步长,  $\Delta x$  为空间  $x$  方向的步长. 令  $N = r$ , 利用格式(11) 对式(12a) 进行离散:

$$V_i^k = v_i^n + \Delta t \sum_{\zeta=1}^r a_{k,\zeta} T_i^{\zeta}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (14a)$$

$$U_i^k = u_i^n + \Delta t \sum_{\zeta=1}^r a_{k,\zeta} V_i^\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (14b)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t \sum_{\zeta=1}^r b_\zeta T_i^\zeta, \quad (14c)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{\zeta=1}^r b_\zeta V_i^\zeta. \quad (14d)$$

式(14)满足守恒律:

$$\frac{du_i^{n+1} \wedge dv_i^{n+1} - du_i^n \wedge dv_i^n}{\Delta t} = \sum_{\zeta=1}^r b_\zeta (dU_i^\zeta \wedge dT_i^\zeta). \quad (15)$$

令  $N = s$ , 利用格式(11)对式(12b)进行离散得到

$$\begin{cases} W_i^k = w_n^k + \Delta x \sum_{\zeta=1}^s \hat{a}_{i,\zeta} Q_\zeta^k, & i = 1, 2, \dots, s, \\ U_i^k = u_n^k + \Delta x \sum_{\zeta=1}^s \hat{a}_{i,\zeta} W_\zeta^k, & i = 1, 2, \dots, s, \\ w_{n+1}^k = w_n^k + \Delta x \sum_{\zeta=1}^s \hat{b}_\zeta Q_\zeta^k, \\ u_{n+1}^k = u_n^k + \Delta x \sum_{\zeta=1}^s \hat{b}_\zeta W_\zeta^k. \end{cases} \quad (16)$$

式(16)能够精确地满足守恒律:

$$\frac{du_{n+1}^k \wedge dw_{n+1}^k - du_n^k \wedge dw_n^k}{\Delta x} = \sum_{\zeta=1}^r \hat{b}_\zeta (dU_\zeta^k \wedge dQ_\zeta^k). \quad (17)$$

在任意网格点上, 中间变量满足

$$T_i^k - Q_i^k = m^2 u_i^k - k^2 (u_i^k)^3. \quad (18)$$

联立式(15)、(17)和式(18)就可以得到多辛守恒律(5)的离散形式.

### 3 数值实验

令第2节构造的辛 Runge-Kutta 格式中  $r = s = 1$ , 并以此离散 Landau-Ginzburg-Higgs 方程, 削去中间变量  $T$  和  $Q$  后, 得到多辛偏微分方程组(3)的一个多辛格式:

$$\begin{cases} \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{\Delta t} - \frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{\Delta x} = m^2 u_{i+1/2}^{k+1/2} - k^2 (u_{i+1/2}^{k+1/2})^3, \\ -\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = -v_i^{k+1/2}, \\ \frac{u_{i+1}^{k+1/2} - u_i^{k+1/2}}{\Delta x} = w_{i+1/2}^{k+1/2}, \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$u_i^{k+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^{k+1} + u_i^k),$$

$$u_{i+1/2}^{k+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1/2}^{k+1} + u_{i+1/2}^k) = \frac{1}{4}(u_{i+1}^{k+1} + u_i^{k+1} + u_{i+1}^k + u_i^k),$$

等等.

进一步消去变量  $v$  和  $w$  就得到一个半隐式多辛格式:

$$\delta_x^2(u_{i+1/2}^k + u_{i-1/2}^k) - \frac{1}{2} \delta_x^2(u_i^{k+1/2} + u_i^{k-1/2}) = \frac{1}{2} \left\{ m^2 (u_{i+1/2}^{k+1/2} + u_{i+1/2}^{k-1/2} + u_{i-1/2}^{k+1/2} + u_{i-1/2}^{k-1/2}) - k^2 [(u_{i+1/2}^{k+1/2})^3 + (u_{i+1/2}^{k-1/2})^3 + (u_{i-1/2}^{k+1/2})^3 + (u_{i-1/2}^{k-1/2})^3] \right\}, \quad (20)$$

式中  $\delta^2$  为二阶中心差商算子, 例如:  $\delta_x^2 u_i^k = (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) / \Delta x^2$ .

假定  $m = k = \sqrt{2}$ , 考虑如下的初始条件:

$$u(x, 0) = \tanh(\sqrt{2}x), \quad u(x, 0) |_{t=1} = 1 - \tanh^2(\sqrt{2}x),$$

于是我们就得到 Landau-Ginzburg-Higgs 方程的孤子解<sup>[9]</sup>:

$$u(x, t) = \tanh[\sqrt{2}(x + \sqrt{1/2}t)]. \quad (21)$$

利用格式(20)在区间  $x \in [-30, 10]$  内取时间步长  $\Delta t = 0.01$ , 空间步长  $\Delta x = 0.04$  对该孤子解进行数值模拟, 得到该孤子解的波形图. 图1给出了  $t \in [0, 100]$  时段内方程(1)孤子解的数值模拟波形图, 图2给出了孤子解在不同时刻的波形图, 图3给出了  $t \in [0, 100]$  时段内的多辛绝对误差、局部能量绝对误差和局部动量绝对误差. 为了进一步表现多辛方法的高精度, 表1给出了经典四阶 Runge-Kutta(RK)方法和多辛方法得到的数值结果  $t = 20, t = 40, t = 60, t = 80, t = 100$  时刻不同点的绝对误差.

从图1和图2可以看出: 孤子解的波形和波速均没有随着时间的变化而变化, 这充分说明多辛格式(20)能够很好地模拟孤子解(21)的演化过程, 同时具有良好的长时间数值行为. 从图3可以看出: 在模拟时段  $t \in [0, 100]$  内, 系统的多辛绝对误差、局部能量绝对误差和局部动量绝对误差均在  $[-8 \times 10^{-8}, 8 \times 10^{-8}]$  范围内, 这进一步说明多辛格式(20)能够很好地保持多个守恒律. 从物理力学意义上讲, 图3中的局部能量误差和局部动量误差分别决定着激波传播过程中的波幅和波速变化情况, 也就是说, 图3得出极小的局部能量误差和局部动量误差准确解释了图1和图2中波形和波速不发生变化的原因, 这也正是多辛算法的重要优点.

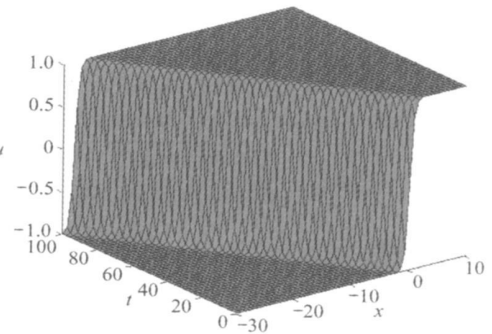


图1  $t \in [0, 100]$  时段内数值波形图

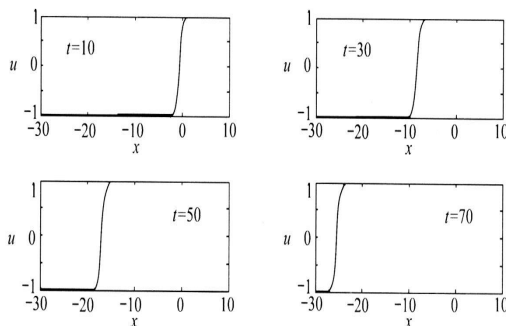


图2 不同时刻的数值波形图

从数值结果对比中不难看出: 多辛方法的数值精度远高于经典的四阶 Runge-Kutta 方法, 同时, 多辛方法的数值误差具有明显的规律性: 在孤子解激波附近, 数值误差不为 0, 而在远离激波的网格点上, 数值解的误差精确为 0, 这与文献[4]的数值结果吻合较好.

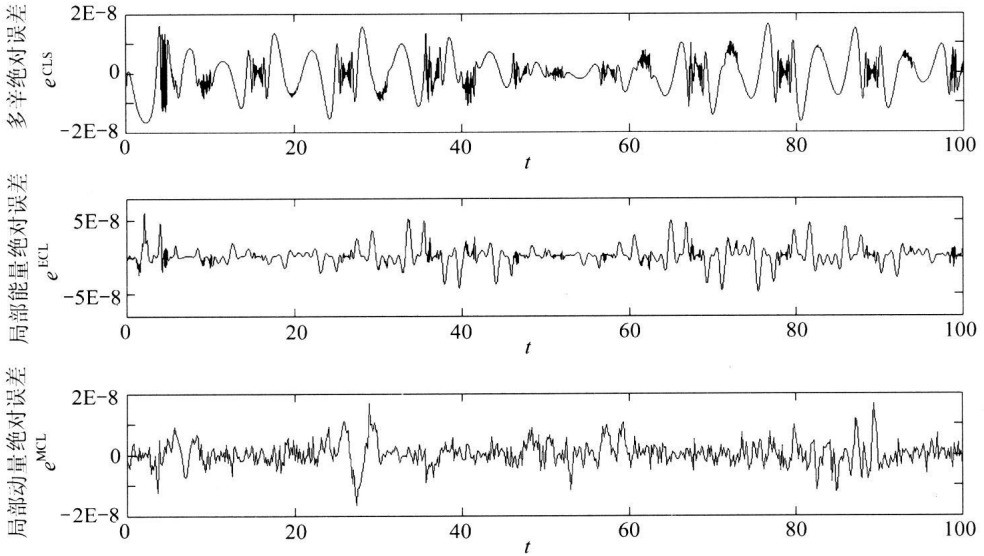


图 3  $t \in [0, 100]$  时段内数值解的多辛守恒律误差、局部能量误差和局部动量误差

表 1 经典四阶 RK 方法和多辛方法绝对误差对比

方法	$x_i \setminus t_j$	20	40	60	80	100
经典四阶	-25	5.528 835E-08	8.381 184E-08	3.317 966E-09	3.046 173E-09	1.132 239E-08
	-15	1.864 529E-09	9.196 395E-08	5.028 128E-08	1.896 537E-09	3.027 644E-06
	-5	2.036 982E-07	6.812 771E-10	7.094 713E-06	1.934 311E-10	5.416 738E-09
	5	3.217 746E-09	3.794 810E-09	4.288 923E-08	6.822 232E-07	1.508 729E-09
多辛方法	-25	0.000 000E-00	0.000 000E-00	0.000 000E-00	3.419 706E-17	8.384 960E-18
	-15	0.000 000E-00	8.600 116E-19	4.965 524E-18	7.271 132E-18	0.000 000E-00
	-5	6.978 984E-18	5.935 629E-19	1.381 265E-18	0.000 000E-00	0.000 000E-00
	5	3.783 730E-18	0.000 000E-00	0.000 000E-00	0.000 000E-00	0.000 000E-00

## 4 结 论

本文基于 Hamilton 空间体系的多辛理论研究了 Landau-Ginzburg-Higgs 方程, 并利用 Runge-Kutta 方法构造了一种半隐式的多辛离散格式. 数值实验的结果表明: 本文构造的多辛格式能够很好地模拟 Landau-Ginzburg-Higgs 方程的孤子解, 同时能够很好地保持系统的多个守恒律, 这些充分说明多辛方法具有以下两大优点: 良好的长时间数值行为和精确地保持多种守恒律.

致谢 感谢西北工业大学基础研究基金的资助.

### [参 考 文 献]

[1] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. Math Proc Camb Philos Soc,

- 1997, **121**(1): 147-190.
- [2] Moore B E, Reich S. Multi-symplectic integration methods for Hamiltonian PDEs[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2003, **19**(3): 395-402.
- [3] Bridges T J, Reich S. Multi-symplectic integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[J]. *Phys Lett A*, 2001, **284**(4/5): 184-193.
- [4] Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **157**(2): 473-499.
- [5] 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. 膜自由振动的多辛方法[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(9): 1054-1062.
- [6] 胡伟鹏, 邓子辰. 广义 Boussinesq 方程的多辛方法[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(7): 839-845.
- [7] Benettin G, Giorgilli A. On the Hamiltonian interpolation of near to the identity symplectic mappings with application to symplectic integration algorithms[J]. *J Stat Phys*, 1994, **74**(5/6): 1117-1143.
- [8] QIN Meng-zhao, ZHANG Mei-qing. Multi-stage symplectic schemes of two kinds of Hamiltonian systems for wave equations[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 1990, **19**(10): 51-62.
- [9] 莫嘉琪, 王辉, 林一骅. 广义 Landau-Ginzburg-Higgs 方程孤子解的扰动理论[J]. *物理学报*, 2005, **54**(12): 5581-5584.

## Multi-Symplectic Runge-Kutta Methods for Landau-Ginzburg-Higgs Equation

HU Wei-peng<sup>1,2</sup>, DENG Zi-chen<sup>1,3</sup>, HAN Song-mei<sup>1</sup>, FAN Wei<sup>2</sup>

(1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;

2. School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;

3. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China)

**Abstract:** The nonlinear wave equation, describing many important physical phenomena, has been investigated widely in last several decades. Landau-Ginzburg-Higgs equation, a typical nonlinear wave equation, was studied based on the multi-symplectic theory in Hamilton space. The multi-symplectic Runge-Kutta method was reviewed and a semi-implicit scheme with certain discrete conservation laws was constructed to solve the first-order partial differential equations that were derived from the Landau-Ginzburg-Higgs equation. The results of numerical experiment for soliton solution of the Landau-Ginzburg-Higgs equation were reported finally, which show that the multi-symplectic Runge-Kutta method is an efficient algorithm with excellent long-time numerical behaviors.

**Key words:** multi-symplectic; Landau-Ginzburg-Higgs equation; Runge-Kutta method; conservation law; soliton solution