文章编号: 1000-0887(2009) 08-0979-11

二阶非线性脉冲微分方程边界值问题*

H·伯利科托路, A·胡舍诺夫

(安卡拉大学 数学系, 坦多甘 06100, 安卡拉 土耳其)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究二阶非线性脉冲微分方程边界值问题(BVPI). 构造了 BVPI 的 Green 函数, 并将非线性的 BVPI 转化为不动点问题, 利用 Banach 不动点定理和 Lipschitz 条件, 证明了该非线性 BVPI 解的唯一性, 最后证明了 BVPI 解的存在性定理.

关 键 词: 脉冲条件; Green 函数; 不动点定理; Lipschitz 条件; 存在性; 唯一性
中图分类号: O175.8 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.011

引 言

脉冲微分方程是研究过程状态发生突然变化动力学的基本工具. 许多应用问题的研究推动了脉冲微分方程理论的发展, 我们可以给出一些典型实例的名称, 控制理论[1-2]、人口动力学[3]、医学中的化学疗法[4], 以及一些物理问题[5]. 近 20 年来, 脉冲微分方程方面的数学理论取得了重大的进展, 参见文献[6-9]. 另一方面, 为微分方程构成了一个有趣且有用的领域, 在经济学、社会科学、生物学、物理学、工程学、神经网络等有着它们的应用[10-11]. 在数值分析中, 微分方程是研究的基本手段, 近年来开始了脉冲微分方程的研究[12-16].

令 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数. 对于任意 $l, m \in \mathbf{Z}$, $l \leqslant m$, 离散区间 $[l, m]$ 表示集合 $\{l, l+1, \ldots, m\}$, 半无限区间 $(-\infty, l]$ 和 $[l, \infty)$ 分别表示离散的集合 $\{\ldots, l-2, l-1, l\}$ 和 $\{l, l+1, l+2, \ldots\}$. 本文的所有区间均为离散区间.

本文中, 我们研究下面的脉冲边值问题(BVPI):

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)] + q(n)y(n) = f(n, y(n)),$$
$$n \in [a, c-1] \cup [c+2, b], \tag{1}$$
$$y(c-1) = d_1 y(c+1), \quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1), \tag{2}$$
$$\alpha y(a-1) - \beta y^{[\Delta]}(a-1) = \mu, \quad \gamma y(b) + \delta y^{[\Delta]}(b) = \nu, \tag{3}$$

其中 $y(n)$ 是一个定义于 $n \in [a-1, b+1]$ 上的期望解, Δ 表示向前微分算子, 由下式定义:

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n),$$

$y^{[\Delta]}(n) = p(n)\Delta y(n)$ 表示 $y(n)$ 的准 Δ-导数, $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a < c < b$, $b - c \geqslant 2$; 系数 $p(n)$,

* 收稿日期: 2009-01-20; 修订日期: 2009-06-19
基金项目: NATO PC-A1 土耳其科学技术委员会(TUBITAK)资助项目
作者简介: A. Huseynov(联系人. E-mail: huseynov@science.ankara.edu.tr).
本文原文为英文, 黄锋 译, 张禄坤 校.

$q(n)$ 为复数函数, 分别定义于$[a-1, c-1] \cup [c+1, b]$ 和$[a, c-1] \cup [c+2, b]$, 且对于任意的 n, $p(n) \neq 0$; $f(n, \xi)$ 为复数函数, 定义于$([a, c-1] \cup [c+2, b]) \times \mathbf{C}$; $d_1, d_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ 是给定的复数, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $|\alpha|+|\beta| \neq 0$, $|\gamma|+|\delta| \neq 0$.

条件(3) 是边界条件, 而条件(2) 可以看作在 c 处的一个脉冲现象.

问题(1)~(3) 是作者在文献[17] 中研究的连续脉冲 BVP 的一个对等的离散模型. 我们的初步分析(见下文定理 1 的证明) 表明, 形式(2) 的脉冲条件对二阶微分方程情形更为合适.

本文由如下诸节构成:

在第 1 节中, 作为辅助问题, 我们分析线性脉冲齐次微分方程:

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)] + q(n)y(n) = 0,$$
$$n \in (-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty),$$
$$y(c-1) = d_1 y(c+1), \quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1).$$

这里, 提出了唯一性和存在性定理, 并给出了相应的非齐次方程系数公式的变化.

在第 2 节中, 构造了下列 BVPI 的 Green 函数:

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)] + q(n)y(n) = h(n),$$
$$n \in [a, c-1] \cup [c+2, b], \tag{4}$$
$$y(c-1) = d_1 y(c+1), \quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1), \tag{5}$$
$$\alpha y(a-1) - \beta y^{[\Delta]}(a-1) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y^{[\Delta]}(b) = 0. \tag{6}$$

在第 3 节中, 利用线性问题(4)~(6) 的 Green 函数将非线性 BVPI(1)~(3) 简化成不动点问题. 这里, 用到了压缩映射定理(Banach 不动点定理), 当$f(n, \xi)$ 满足 Lipschitz 条件时, BVPI (1)~(3) 存在唯一解.

最后, 第 4 节的定理证明了, 除了解必然唯一外, 还给出的解结果的存在性.

1 线性脉冲微分方程

设 c 为整数, d_1, d_2 为非零复数. 考虑脉冲二阶线性齐次微分方程

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y)(n-1)] + q(n)y(n) = 0,$$
$$n \in (-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty), \tag{7}$$
$$y(c-1) = d_1 y(c+1), \quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1), \tag{8}$$

其中系数 $p(n)$, $q(n)$ 分别为定义在$(-\infty, c-1] \cup [c+1, \infty)$ 和$(-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty)$ 上的复数函数, 且对任意 n, $p(n) \neq 0$.

利用 Δ-导数的定义, 将问题(7)、(8) 改写为下面形式:

$$-p(n-1)y(n-1) + q_1(n)y(n) - p(n)y(n+1) = 0,$$
$$n \in (-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty), \tag{9}$$

$$\begin{cases} y(c-1) = d_1 y(c+1), \\ p(c-1)[y(c) - y(c-1)] = d_2 p(c+1)[y(c+2) - y(c+1)], \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$q_1(n) = q(n) + p(n-1) + p(n), \qquad n \in (-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty).$$

定理 1 设 n_0 为 $\mathbf{Z}$ 中的一个不动点, c_0, c_1 为给定的复数, 则问题(7)、(8) 有唯一解 $y(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, 且

$$y(n_0) = c_0, \quad y^{[\Delta]}(n_0) = c_1. \tag{11}$$

证明　首先,假设 $n_0\in(-\infty,c-1]$. 在初始条件(11)下,在$(-\infty,c-1]$上求解方程(9),当 $n\in(-\infty,c]$ 时,$y(n)$ 是唯一的. 于是,由式(10),$y(c+1)$ 和 $y(c+2)$ 是唯一的,则方程(9)在$[c+2,\infty)$上解唯一.

现设 $n_0\in[c+1,\infty)$. 在$[c+2,\infty)$上求解方程(9),满足初始条件(11),当 $n\in[c+1,\infty)$ 时,$y(n)$ 是唯一的. 于是,由式(10),确定 $y(c-1)$ 和 $y(c)$ 是唯一的,则解方程(9)在$(-\infty,c-1]$上解唯一.

最后,如果 $n_0=c$,那么由初始条件(11),发现 $y(c)$ 和 $y(c+1)$ 是唯一的. 再由脉冲条件(10),确定 $y(c-1)$ 和 $y(c+2)$. 接着,首先在$(-\infty,c-1]$上求解方程(9),当 $n\in(-\infty,c-2]$ 时,$y(n)$ 是唯一的;然后,在$[c+2,\infty)$上求解方程(9),当 $n\in[c+3,\infty)$ 时,$y(n)$ 是唯一的. □

定义 2　对于函数 y 和 z: 当 $\mathbf{Z}\to\mathbf{C}$ 时,定义它们的 Wronskian 形式如下:

$$\begin{aligned}W_n(y,z)&=y(n)z^{[\Delta]}(n)-y^{[\Delta]}(n)z(n)=\\&p(n)[y(n)z(n+1)-y(n+1)z(n)],\qquad n\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

定理 3　问题(7)、(8)任意两个 Wronskian 解 $y(n)$ 和 $z(n)$,在任一区间$(-\infty,c-1]$和$[c+1,\infty)$上是常数.

$$W_n(y,z)=\begin{cases}M, & n\in(-\infty,c-1],\\ N, & n\in[c+1,\infty).\end{cases}\tag{12}$$

另外

$$M=d_1d_2N\tag{13}$$

和

$$W_c(y,z)=-\frac{p(c)}{p(c-1)}d_2N.\tag{14}$$

证明　假设 $y(n)$ 和 $z(n)$ 是方程(7)、(8)的解,其中 $n\in\mathbf{Z}$. 计算 $W_n(y,z)$ 的 Δ-导数:对 Δ-导数利用乘法法则

$$\begin{aligned}\Delta[f(n)g(n)]&=[\Delta f(n)]g(n)+f(n+1)\Delta g(n)=\\&f(n)\Delta g(n)+[\Delta f(n)]g(n+1),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\Delta W_n(y,z)&=\Delta[y(n)z^{[\Delta]}(n)-y^{[\Delta]}(n)z(n)]=\\&[\Delta y(n)]z^{[\Delta]}(n)+y(n+1)\Delta z^{[\Delta]}(n)-\\&y^{[\Delta]}(n)\Delta z(n)-[\Delta y^{[\Delta]}(n)]z(n+1)=\\&y(n+1)\Delta z^{[\Delta]}(n)-[\Delta y^{[\Delta]}(n)]z(n+1).\end{aligned}$$

进一步地,因为 $y(n)$ 和 $z(n)$ 是方程(7)、(8)的解,

$$\begin{aligned}\Delta y^{[\Delta]}(n)&=q(n+1)y(n+1),\qquad n\in(-\infty,c-2]\cup[c+1,\infty),\\ \Delta z^{[\Delta]}(n)&=q(n+1)z(n+1),\qquad n\in(-\infty,c-2]\cup[c+1,\infty).\end{aligned}$$

因此

$$\Delta W_n(y,z)=0,\qquad n\in(-\infty,c-2]\cup[c+1,\infty).$$

这意味着 $W_n(y,z)$ 在$(-\infty,c-1]$和$[c+1,\infty)$是常数. 因此,得到式(12),其中 M 和 N 是常数(由解 $y(n)$ 和 $z(n)$ 决定).

接着,对 $y(n)$ 和 $z(n)$ 利用式(12)和脉冲条件(8),有

$$M=W_{c-1}(y,z)=y(c-1)z^{[\Delta]}(c-1)-y^{[\Delta]}(c-1)z(c-1)=$$

$$d_1 d_2 [y(c+1) z^{[\Delta]}(c+1) - y^{[\Delta]}(c+1) z(c+1)] =$$
$$d_1 d_2 W_{c+1}(y, z) = d_1 d_2 N.$$

因此,式(13)证毕.

最后,由脉冲条件(8),得到

$$y(c) = \left[d_1 - d_2 \frac{p(c+1)}{p(c-1)} \right] y(c+1) + d_2 \frac{p(c+1)}{p(c-1)} y(c+2).$$

将 $y(c)$ 和 $z(c)$ 代入

$$W_c(y, z) = p(c)[y(c) z(c+1) - y(c+1) z(c)],$$

得到

$$W_c(y, z) = - d_2 \frac{p(c)}{p(c-1)} W_{c+1}(y, z) = - d_2 \frac{p(c)}{p(c-1)} N.$$

因此式(14)得证. □

推论 4　如果 $y(n)$ 和 $z(n)$ 是方程(7)、(8) 的两个解, 那么, 对于所有的 $n \in \mathbf{Z}$, 不是 $W_n(y, z) = 0$, 就是 $W_n(y, z) \neq 0$.

利用定理 1, 当方程(7)不包含任何脉冲条件[8]时, 下面的两个定理可以采用相同的方法证明是正确的.

定理 5　方程(7)、(8)任意两个解是线性无关的, 当且仅当它们的 Wronskian 不等于 0.

定理 6　方程(7)、(8)有两个线性无关的解, 则方程(7)、(8)的其它任一个解是这两个解的线性组合.

设 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 为方程(7)、(8)产生的一组基础解集, 证明它们是方程(7)、(8)的解, 且 Wronskian 不等于 0.

考虑非齐次方程

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)] + q(n) y(n) = h(n),$$
$$n \in (-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty), \tag{15}$$

有脉冲条件

$$y(c-1) = d_1 y(c+1), \quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1), \tag{16}$$

其中 $h(n)$ 是定义在$(-\infty, c-1] \cup [c+2, \infty)$ 上的复数函数. 通过下式将函数 $h(n)$ 延拓到点 $n = c$ 和 $n = c+1$:

$$h(c) = h(c+1) = 0. \tag{17}$$

定理 7　假设 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 为齐次方程(7)、(8)的一组基础解集. 那么相应的非齐次方程(15)、(16)的通解给出如下:

$$y(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + y_0(n), \qquad n \in \mathbf{Z},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 且

$$y_0(n) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{s=n}^{c} \frac{y_1(n) y_2(s) - y_1(s) y_2(n)}{W_s(y_1, y_2)} h(s), & n \leqslant c, \\ \displaystyle\sum_{s=c+1}^{n} \frac{y_1(n) y_2(s) - y_1(s) y_2(n)}{W_s(y_1, y_2)} h(s), & n \geqslant c+1. \end{cases} \tag{18}$$

证明　考虑到式(17), 这不难验证, 由式(18)定义的函数 $y_0(n)$ 是方程(15)、(16)的一个特解, 也就是说, $y_0(n)$ 满足方程(15)和条件

$$y_0(c-1) = y_0^{[\Delta]}(c-1) = 0, \quad y_0(c+1) = y_0^{[\Delta]}(c+1) = 0.$$

定理 7 证毕. □

2 脉冲线性边值问题及其 Green 函数

设点 $a, b, c \in \mathbf{Z}$, 满足 $a < c < b$ 和 $b - c \geqslant 2$. 考虑下列脉冲线性边值问题(BVPI):

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)] + q(n)y(n) = h(n),$$
$$n \in [a, c-1] \cup [c+2, b], \tag{19}$$
$$y(c-1) = d_1 y(c+1),\quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1), \tag{20}$$
$$\alpha y(a-1) - \beta y^{[\Delta]}(a-1) = 0,\quad \gamma y(b) + \delta y^{[\Delta]}(b) = 0, \tag{21}$$

其中 $y(n)$ 是定义在 $n \in [a-1, b+1]$ 的期望解, $p(n)$ 和 $q(n)$, $h(n)$ 分别是定义在$[a-1, c-1] \cup [c+1, b]$ 和$[a, c-1] \cup [c+2, b]$ 的复数函数, 且对于任意 n, $p(n) \neq 0$, d_1, d_2 和 α, β, γ, δ 为复数, 且分别有 $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, 和 $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$.

$\varphi(n)$ 和 $\psi(n)$ 为下列齐次方程:

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)] + q(n)y(n) = 0,$$
$$n \in [a, c-1] \cup [c+2, b], \tag{22}$$
$$y(c-1) = d_1 y(c+1),\quad y^{[\Delta]}(c-1) = d_2 y^{[\Delta]}(c+1) \tag{23}$$

的解, 且满足边界条件:

$$\varphi(a-1) = \beta,\quad \varphi^{[\Delta]}(a-1) = \alpha \tag{24}$$

和

$$\psi(b) = \delta,\quad \psi^{[\Delta]}(b) = -\gamma, \tag{25}$$

因此, $\varphi(n)$ 满足式(21) 的第 1 个条件, $\psi(n)$ 满足其第 2 个条件.

根据定理 3 和条件(24)、(25), 当 $n \in [a-1, c-1]$ 时, 有

$$W_n(\varphi, \psi) = \varphi(a-1)\psi^{[\Delta]}(a-1) - \varphi^{[\Delta]}(a-1)\psi(a-1) =$$
$$\beta\psi^{[\Delta]}(a-1) - \alpha\psi(a-1);$$

当 $n \in [c+1, b]$ 时, 有

$$W_n(\varphi, \psi) = \varphi(b)\psi^{[\Delta]}(b) - \varphi^{[\Delta]}(b)\psi(b) = -\gamma\varphi(b) - \delta\varphi^{[\Delta]}(b).$$

因此, 考虑式(13), 得到

$$W_n(\varphi, \psi) = \begin{cases} -d_1 d_2[\gamma\varphi(b) + \delta\varphi^{[\Delta]}(b)], & n \in [a-1, c-1], \\ -\gamma\varphi(b) - \delta\varphi^{[\Delta]}(b), & n \in [c+1, b], \end{cases} \tag{26}$$

还有

$$W_n(\varphi, \psi) = \begin{cases} \beta\psi^{[\Delta]}(a-1) - \alpha\psi(a-1), & n \in [a-1, c-1], \\ \dfrac{1}{d_1 d_2}[\beta\psi^{[\Delta]}(a-1) - \alpha\psi(a-1)], & n \in [c+1, b]. \end{cases} \tag{27}$$

注意到, 由式(26)、(27) 有

$$\beta\psi^{[\Delta]}(a-1) - \alpha\psi(a-1) = -d_1 d_2[\gamma\varphi(b) + \delta\varphi^{[\Delta]}(b)]. \tag{28}$$

根据定理 5, 由式(26) 可知, 当且仅当 $\varphi(n)$ 和 $\psi(n)$ 线性无关时, $\gamma\varphi(b) + \delta\varphi^{[\Delta]}(b) \neq 0$.

下面的定理从另外一个角度来阐述条件 $\gamma\varphi(b) + \delta\varphi^{[\Delta]}(b) \neq 0$.

定理 8 $\gamma\varphi(b) + \delta\varphi^{[\Delta]}(b) \neq 0$, 当且仅当齐次方程(22)、(23) 仅有满足边界条件(21) 时的平凡解.

证明 如果 $\gamma\varphi(b) + \delta\varphi^{[\Delta]}(b) = 0$, 根据式(24), $\varphi(n)$ 将是齐次方程(22)、(23) 满足边界

条件(21)的一个非平凡解．现在假设 $\gamma\varphi(b)+\delta\varphi^{[\Delta]}(b)\neq 0$，则 $\varphi(n)$ 和 $\psi(n)$ 为方程(22)、(23)解的一组基础解，所以方程(21)～(23)的一个任意解将由以下形式组成：

$$y(n)=c_1\varphi(n)+c_2\psi(n),$$

其中 c_1，c_2 为常数．将该 $y(n)$ 表达式代入边界条件(21)，并考虑式(24)、(25)，得到

$$c_2[\alpha\psi(a-1)-\beta\psi^{[\Delta]}(a-1)]=0 \text{ 和 } c_1[\gamma\varphi(b)+\delta\varphi^{[\Delta]}(b)]=0.$$

因为 $\gamma\varphi(b)+\delta\varphi^{[\Delta]}(b)\neq 0$，又由式(28)得 $\alpha\psi(a-1)-\beta\psi^{[\Delta]}(a-1)\neq 0$，只有 $c_1=c_2=0$，也就是说，解 $y(n)$ 是平凡解． □

定理 9　如果 $\gamma\varphi(b)+\delta\varphi^{[\Delta]}(b)\neq 0$，那么，非齐次的 BVPI(19)～(21)有唯一解 $y(n)$，

$$y(n)=\sum_{s=a}^{b}G(n,s)h(s),\qquad n\in[a-1,b+1], \tag{29}$$

其中，函数 $G(n,s)$ 被称为 BVPI(19)～(21)的 Green 函数，$(n,s)\in[a-1,b+1]\times[a-1,b]$ 时，由下式定义

$$G(n,s)=-\frac{1}{W_s(\varphi,\psi)}\begin{cases}\varphi(s)\psi(n), & s\leqslant n,\\ \varphi(n)\psi(s), & n\leqslant s.\end{cases} \tag{30}$$

证明　在条件 $\gamma\varphi(b)+\delta\varphi^{[\Delta]}(b)\neq 0$ 下，齐次方程(22)、(23)的解 $\varphi(n)$ 和 $\psi(n)$ 线性无关，因此，根据定理 7，非齐次方程(19)、(20)的通解有以下形式：

$$y(n)=\begin{cases}c_1\varphi(n)+c_2\psi(n)-\displaystyle\sum_{s=n}^{c}\frac{y_1(n)y_2(s)-y_1(s)y_2(n)}{W_s(y_1,y_2)}h(s), & n\leqslant c,\\ c_1\varphi(n)+c_2\psi(n)+\displaystyle\sum_{s=c+1}^{n}\frac{y_1(n)y_2(s)-y_1(s)y_2(n)}{W_s(y_1,y_2)}h(s), & n\geqslant c+1,\end{cases} \tag{31}$$

其中 c_1，c_2 为任意常数．将该 $y(n)$ 表达式代入边界条件(21)，不难发现

$$c_1=-\sum_{s=c+1}^{b}\frac{\psi(s)}{W_s(\varphi,\psi)}h(s),\quad c_2=-\sum_{s=a}^{c}\frac{\varphi(s)}{W_s(\varphi,\psi)}h(s).$$

将 c_1 和 c_2 的值代入式(31)，得到式(29)、(30)． □

不难证明下面的定理．

定理 10　如果 $\gamma\varphi(b)+\delta\varphi^{[\Delta]}(b)\neq 0$，那么，对脉冲条件(20)和非齐次边界条件

$$\alpha y(a-1)-\beta y^{[\Delta]}(a-1)=\mu,\quad \gamma y(b)+\delta y^{[\Delta]}(b)=\nu$$

的非齐次方程(19)的解 $y(n)$ 有下列公式：

$$y(n)=w(n)+\sum_{s=a}^{b}G(n,s)h(s),\qquad n\in[a-1,b+1],$$

其中，函数 $G(n,s)$ 由式(30)定义，并且有

$$w(n)=-\frac{\nu}{W_b(\varphi,\psi)}\varphi(n)-\frac{\mu}{W_a(\varphi,\psi)}\psi(n),\qquad n\in[a-1,b+1]. \tag{32}$$

3　Lipschitz 条件

在本节中，考虑非线性 BVPI：

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)]+q(n)y(n)=f(n,y(n)),\qquad n\in[a,c-1]\cup[c+2,b], \tag{33}$$

$$y(c-1)=d_1y(c+1),\ y^{[\Delta]}(c-1)=d_2y^{[\Delta]}(c+1), \tag{34}$$

$$\alpha y(a-1)-\beta y^{[\Delta]}(a-1)=\mu,\ \gamma y(b)+\delta y^{[\Delta]}(b)=\nu. \tag{35}$$

假设以下条件全都满足:

(H1) $p(n)$ 和 $q(n)$ 分别是定义在 $n\in[a-1,c-1]\cup[c+1,b]$ 和 $n\in[a,c-1]\cup[c+2,b]$ 上的复数函数, 且对于所有的 $n, p(n)\neq 0$.

(H2) $d_1, d_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ 和 ν 为复数, 且有 $d_1\neq 0, d_2\neq 0, |\alpha|+|\beta|\neq 0, |\gamma|+|\delta|\neq 0$.

(H3) $f(n,\xi)$ 是定义在 $([a,c-1]\cup[c+2,b])\times\mathbf{C}$ 上的复数函数, 通过下式延拓到值 $n=c$ 和 $n=c+1$.

$$f(c,\xi)=f(c+1,\xi)=0, \qquad \xi\in\mathbf{C}.$$

(H4) 下列线性齐次的 BVPI 有唯一平凡解 $y(n)\equiv 0$:

$$-\Delta[p(n-1)\Delta y(n-1)]+q(n)y(n)=0,$$
$$n\in[a,c-1]\cup[c+2,b], \tag{36}$$

$$y(c-1)=d_1y(c+1),\ y^{[\Delta]}(c-1)=d_2y^{[\Delta]}(c+1), \tag{37}$$

$$\alpha y(a-1)-\beta y^{[\Delta]}(a-1)=0,\ \gamma y(b)+\delta y^{[\Delta]}(b)=0. \tag{38}$$

设 $\varphi(n)$ 和 $\psi(n)$ 为方程(36)、(37)的解, 它们分别满足初始条件(24)和(25). 那么, 由式(26)和定理 8, 条件(H4) 的等效条件为: 对所有的 $n\in[a-1,b]$, 有 $W_n(\varphi,\psi)\neq 0$. 当 $(n,s)\in[a-1,b+1]\times[a-1,b]$ 时, $G(n,s)$ 由式(30) 定义, $w(n)$ 由式(32) 定义. 因此, 定理 10 意味着, 方程(33) ~ (35) 的解 $y(n)$ 为

$$y(n)=w(n)+\sum_{s=a}^{b}G(n,s)f(s,y(s)), \qquad n\in[a-1,b+1]. \tag{39}$$

方程(39) 对 $n\in[a,b]$ 成立, 有

$$y(n)=w(n)+\sum_{s=a}^{b}G(n,s)f(s,y(s)), \qquad n\in[a,b]. \tag{40}$$

事实上, 若 $y(n), n\in[a,b]$ 满足式(40), 并且分别定义 $y(a-1)$ 和 $y(b+1)$ 为

$$y(a-1)=w(a-1)+\sum_{s=a}^{b}G(a-1,s)f(s,y(s))$$

和

$$y(b+1)=w(b+1)+\sum_{s=a}^{b}G(b+1,s)f(s,y(s)),$$

则 $y(n), n\in[a-1,b+1]$ 是BVPI(33) ~ (35) 的解. 即方程(40) 的解和 BVPI(33) ~ (35) 的解之间存在着一一对应的关系. 在这个意义上, BVPI(33) ~ (35) 等效于方程(40).

在 $b-a+1$ 维 Banach 空间

$$\mathcal{B}=\left\{y\mid y=\left\{y(n)\right\}_{n=a}^{b},\ y(n)\in\mathbf{C}, n\in[a,b]\right\},$$
$$\|y\|=\max_{a\leqslant n\leqslant b}|y(n)|$$

中研究方程(40). 如果定义算子 $A:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$:

$$(Ay)(n)=w(n)+\sum_{s=a}^{b}G(n,s)f(s,y(s))=$$
$$w(n)+\sum_{s=a}^{c-1}G(n,s)f(s,y(s))+\sum_{s=c+2}^{b}G(n,s)f(s,y(s)), \qquad n\in[a,b], \tag{41}$$

则式(40)可以写为

$$y = Ay, \qquad y \in \mathcal{B}.$$

因此,求解方程(40)相当于寻找算子 A 的不动点.

利用下面众所周知的压缩映射定理,亦被称为Banach不动点定理:设 $\mathcal{B}$ 为Banach空间, S 为 $\mathcal{B}$ 的一个非空的闭子集. 假定 $A: S \to S$ 为一个压缩映射,即存在一 λ, $0 < \lambda < 1$,使得 S 中所有的 u, v,有 $\| Au - Av \| \leqslant \lambda \| u - v \|$,则 A 为 S 中唯一的不动点,也就是说,S 中存在唯一的 u_0,使得 $Au_0 = u_0$.

定理 11 假定条件(H1)~(H4)能够满足. 设函数 $f(n, \xi)$ 满足下列Lipschitz条件:存在常数 $K > 0$,使得

$$|f(n, \xi_1) - f(n, \xi_2)| \leqslant K |\xi_1 - \xi_2|, \\ n \in [a, c-1] \cup [c+2, b];\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbf{C}. \tag{42}$$

如果

$$K \cdot \max_{a \leqslant n \leqslant b} \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| < 1, \tag{43}$$

那么BVPI(33)~(35)有唯一解.

证明 显然,由式(41)定义的算子 $A: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 为一个压缩映射. 对于 $y, z \in \mathcal{B}$ 和 $n \in [a, b]$,利用Lipschitz条件(42),由式(43)得到

$$\begin{aligned} &|(Ay)(n) - (Az)(n)| = \\ &\quad \left| \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} G(n, s)[f(s, y(s)) - f(s, z(s))] \right| \leqslant \\ &\quad \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \leqslant \\ &\quad K \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| |y(s) - z(s)| \leqslant \\ &\quad K \left(\max_{a \leqslant s \leqslant b} |y(s) - z(s)| \right) \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| = \\ &\quad K \|y - z\| \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| \leqslant \\ &\quad K \|y - z\| \max_{a \leqslant n \leqslant b} \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| . \end{aligned}$$

因此

$$\|Ay - Az\| \leqslant \lambda \|y - z\|,$$

其中

$$\lambda = K \cdot \max_{a \leqslant n \leqslant b} \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| < 1,$$

所以,A 为一个压缩映射,定理得证. □

在下面的定理中,函数 $f(n, \xi)$ 不在整个 $\mathbf{C}$ 上,但在某个子集上满足Lipschitz条件.

定理 12 除了条件(H1)~(H4)外,在离散集 $\left\{ \xi \in \mathbf{C}, |\xi| \leqslant R \right\}$ 中,对于所有的 $n \in [a, c-1] \cup [c+2, b]$ 及所有的 ξ_1, ξ_2,进一步假定

$$|f(n, \xi_1) - f(n, \xi_2)| \leqslant K |\xi_1 - \xi_2|, \tag{44}$$

其中 $K > 0$ 为一个与 R 相关的常数. 因为

$$\max_{a \leqslant n \leqslant b} |w(n)| + \max_{a \leqslant n \leqslant b} \sum_{s \in [a, c-1] \cup [c+2, b]} |G(n, s)| \cdot \max_{(s, \xi) \in \Omega_R} |f(s, \xi)| \leqslant R, \tag{45}$$

其中 $\Omega_R = \left\{ (s, \xi): s \in [a, c-1] \cup [c+2, b], \xi \in \mathbf{C}, |\xi| \leqslant R \right\}$,又因为

$$K\cdot\max_{a\leqslant n\leqslant b}\sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]}|G(n,s)|<1, \tag{46}$$

那么, BVPI(33)~(35) 有唯一解 $y(n)$, 使得

$$|y(n)|\leqslant R,\qquad n\in[a,b].$$

证明　记集合 $S=\left\{y\in\mathcal{B}:\|y\|\leqslant R\right\}$. 显然, S 为 $\mathcal{B}$ 的一个闭子集. 设 $A:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 为由式(41) 定义的算子. 对 S 中的 y 和 z, 有 $|y(s)|\leqslant R$, $|z(s)|\leqslant R$, 其中所有的 s 属于 $[a,b]$. 因此, 考虑式(44) 和式(46), 采用定理 11 证明完全相同的方法, 对 S 中所有的 y 和 z, 可以得到 $\|Ay-Az\|\leqslant\lambda\|y-z\|$, 其中 $0<\lambda<1$. 表明 $A:S\to S$, 也就是说, A 变为集合 S 和其自身之间的一个映射. 对 S 中的 y 来说, 由式(45) 有

$$|(Ay)(n)|\leqslant|w(n)|+\sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]}|G(n,s)||f(s,y(s))|\leqslant$$

$$\max_{a\leqslant n\leqslant b}|w(n)|+\max_{(s,\xi)\in\Omega_R}|f(s,\xi)|\cdot\max_{a\leqslant n\leqslant b}\sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]}|G(n,s)|\leqslant R,$$

因此, $\|Ay\|\leqslant R$ 及 $Ay\in S$. 现在, 可以应用压缩映射定理来获得 S 中 A 的唯一不动点, 定理得证. □

4　解的存在性

本节将给出除了唯一性外解的存在性定理. 要用到下面 Brouwer 不动点定理: 设 $\mathcal{B}$ 为有限维线性赋范空间, S 为 $\mathcal{B}$ 的一个非空有界的闭凸子集. 假定 $A:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 是一个连续(通常是非线性的) 算子. 如果算子 A 没有越出集合 S, 即 $A(S)\subset S$, 则在 S 中, A 至少有一个不动点.

引理 13　假如对于任意的 $n\in[a,c-1]\cup[c+2,b]$, 函数 $f(n,\xi)$ 关于 $\xi\in\mathbf{C}$ 是连续的, 则由式(41) 定义的算子 $A:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 是连续的.

证明　取任意不动元 $y_0\in\mathcal{B}$, 且 A 在 y_0 连续, 记

$$M_1=\max_{a\leqslant n\leqslant b}\sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]}|G(n,s)|\ \text{和}\ M_2=\max_{a\leqslant n\leqslant b}|y_0(n)|.$$

因为对于任意的 $s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]$, 函数 $f(n,\xi)$ 在 ξ 中是连续的, 它在如下有界闭离散集中一致连续,

$$D=\left\{\xi\in\mathbf{C}:|\xi|\leqslant M_2+1\right\}.$$

因此, 当给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\xi_1,\xi_2\in D$ 和 $|\xi_1-\xi_2|\leqslant\delta$, 意味着对所有的 $s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]$, 有

$$|f(s,\xi_1)-f(s,\xi_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{(b-a-1)M_1}.$$

设 $\delta_1=\min\left\{1,\delta\right\}$, 并取 $y\in\mathcal{B}$, $\|y-y_0\|\leqslant\delta_1$, 则有

$$\|y\|\leqslant\|y_0\|+\delta_1=M_2+\delta_1\leqslant M_2+1,$$

所以, 对所有的 $s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]$, 有

$$y(s),\ y_0(s)\in D,\ |y(s)-y_0(s)|\leqslant\delta_1\leqslant\delta.$$

因此, 对所有的 $s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]$, 有

$$|f(s,y(s))-f(s,y_0(s))|\leqslant\frac{\varepsilon}{(b-a-1)M_1}.$$

那么, 对所有的 $n\in[a,b]$, 有

$$|(Ay)(n)-(Ay_0)(n)|\leqslant$$

$$\sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]}|G(n,s)||f(s,y(s))-f(s,y_0(s))|\leqslant$$

$$M_1 \frac{\varepsilon}{(b-a-1)M_1} \sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]} 1 = \varepsilon.$$

也就是说, $\| Ay - Ay_0 \| \leqslant \varepsilon$. 这说明 A 在 y_0 处连续. □

定理 14 除了假定(H1) ~ (H4) 之外, 假定对于任意不动点 $n \in [a, c-1] \cup [c+2, b]$, $f(n, \xi)$ 关于 $\xi \in \mathbf{C}$ 连续. 存在一个数 $R > 0$, 使得

$$\max_{a\leqslant n\leqslant b} | w(n) | + \max_{a\leqslant n\leqslant b} \sum_{s\in[a,c-1]\cup[c+2,b]} | G(n,s) | \cdot \max_{(s,\xi)\in\Omega_R} | f(s,\xi) | \leqslant R, \tag{47}$$

其中 $\Omega_R = \left\{ (s,\xi): s \in [a, c-1] \cup [c+2, b], \xi \in \mathbf{C}, | \xi | \leqslant R \right\}$. 那么 BVPI(33) ~ (35) 至少存在一个解 $y(n)$, 使得

$$| y(n) | \leqslant R, \qquad n \in [a, b].$$

证明 设 $A: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 为由式(41) 定义的算子. 根据引理 13, A 是连续的. 利用式(47), 如定理 12 的证明那样, 我们发现, A 映射集合 $S \in \left\{ y \in \mathcal{B}, \| y \| \leqslant R \right\}$ 到其自身. 另一方面, 集合 S 显然是有界、闭合的凸子集. 因此, 可以应用 Brouwer 不动点定理得出 A 是 S 中的一个不动点. 证毕. □

备注 15 显然, 如果函数 $f(n, \xi)$ 对于所有的 $n \in [a, c-1] \cup [c+2, b]$ 和 $\xi \in \mathbf{C}$ 满足 $| f(n,\xi) | \leqslant c_1 + c_2 | \xi |^r$, 其中 c_1 和 c_2 为正常数, 则对 $r < 1$ 及足够大的 R, 条件(47) 得以满足.

[参 考 文 献]

[1] George R K, Nandakumaran A K, Arapostathis A. A note on controllability of impulsive systems[J]. J Math Anal Appl, 2000, **241**(2): 276-283.

[2] Guan Z H, Chen G, Ueta T. On impulsive control of a periodically forced chaotic pendulum system [J]. IEEE Trans Automat Control, 2000, **45**(9): 1724-1727.

[3] Nenov S. Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, 1999, **36**(7): 881-890.

[4] Lakmeche A, Arino O. Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment[J]. Dynam Contin Discrete Impuls Systems, 2000, **7**(2): 265-287.

[5] Lenci S, Rega G. Periodic solutions and bifurcations in an impact inverted pendulum under impulsive excitation[J]. Chaos Solitons Fractals, 2000, **11**(15): 2453-2472.

[6] Bainov D D, Simeonov P S. Systems With Impulse Effects[M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.

[7] Benchohra M, Henderson J, Ntouyas S. Impulsive Differential Equations and Inclusions[M]. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.

[8] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[9] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1995.

[10] Elaydi S N. An Introduction to Difference Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

[11] Kelley W G, Peterson A C. Difference Equations: An Introduction With Applications[M]. New York: Academic Press, 1991.

[12] He Z M, Zhang X M. Monotone iterative technique for first order impulsive difference equations with periodic boundary conditions[J]. Appl Math Comput, 2004, **156**(3): 605-620.

[13] LI Jian-li, SHEN Jian-hua. Positive solutions for first order difference equations with impulses[J]. International Journal of Difference Equations, 2006, **1**(2): 225-239.

[14] Tang X H, Yu J S. Oscillation and stability for a system of linear impulsive delay difference equations [J]. Math Appl (Wuhan), 2001, **14**: 28-32.

[15] Wang P, Wang W. Boundary value problems for first order impulsive difference equations[J]. International Journal of Difference Equations, 2006, **1**: 249-259.

[16] Zhang Q Q. On a linear delay difference equation with impulses[J]. Ann Differential Equations, 2002, **18**(2): 197-204.

[17] Bereketoglu H, Huseynov A. On positive solutions for a nonlinear boundary value problem with impulse[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2006, **56**(1): 247-265.

Boundary Value Problems for Nonlinear Second Order Difference Equations With Impulse

Huseyin Bereketoglu, Aydin Huseynov
(Department of Mathematics, Ankara University, Tandogan 06100, Ankara, Turkey)

Abstract: A boundary value problem with impulse (BVPI) for nonlinear second order difference equations is considered. Green's function of the BVPI was constructed and then the nonlinear BVPI was reduced to a fixed point problem. Banach fixed point theorem and Lipschitz condition were applied to show the uniqueness of solutions for the nonlinear BVPI. Finally, the theorem existence of solutions for the nonlinear BVPI was proved.

Key words: impulse conditions; Green's function; fixed point theorems; Lipschitz condition; existence; uniqueness