应用数学和力学, 第 30 卷 第 8 期
2009 年 8 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 8, Aug. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009)08-0990-07

一类二阶拟线性边值问题的可解性*

姚庆六

(南京财经大学 应用数学系, 南京 210003)

(郭兴明推荐)

摘要: 当非线性项奇异和无穷远处的极限增长函数存在时, 考察了一类二阶拟线性边值问题. 通过引入非线性项在有界集合上的高度函数, 并且考察高度函数的积分, 证明了一个解的存在定理. 该定理表明当极限增长函数的积分具有适当值时此问题有一个解.

关 键 词: 拟线性常微分方程; 两点边值问题; 可解性; Lebesgue 控制收敛定理

中图分类号: O175.8 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.012

引 言

设 $n \geqslant 3$. 本文考察二阶拟线性边值问题

$$(\mathrm{P})\begin{cases} u''(t) + \dfrac{n-1}{t}u'(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

的解的存在性. 我们的目标是当非线性项 $f(t, u)$ 在 $t = 0, t = 1$ 处奇异并且极限增长函数 $\lim_{u\to\infty} f(t, u)/u$ 存在时, 建立一个存在定理.

设 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in R^n$, $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ 并且 $D = \{x \in R^n: |x| < 1\}$ 为 R^n 中的单位开球. 众所周知, 单位球上的非线性椭圆方程

$$\Delta u(x) + f(|x|, u(x)) = 0, \quad x \in D; u(x) = 0, \quad x \in \partial D$$

是应用数学和物理学中的经典方程. 此方程在流体动力系统和化学燃烧理论中有广泛的应用, 参见文献[1-2]. 根据文献[3] 中的经典结论, 此方程的任何解都是径向对称的, 即 $u(x) = u(t)$, $|x| = t$. 同时在这个意义下此方程等价于二阶拟线性问题(P).

当 $f: [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续时, 问题(P) 已经被许多作者研究过. 详细情况可参阅文献[1-12] 及其参考文献. 值得注意的是, 这些论文大多只处理某些特殊类型的问题(P), 例如(P) 是形如 $f(t, u) = h(t)u^{\lambda}$ 的 Emden-Fowler 方程或者形如 $f(t, u) = f(u)$ 的自治问题.

在这篇论文中, 我们将使用下列假设:

(H1) $f: (0, 1) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续.

(H2) 对于每一个 $r > 0$, 存在一个非负函数 $j_r \in L^1[0, 1] \cap C(0, 1)$ 使得

* 收稿日期: 2008-10-11; 修订日期: 2009-06-14
作者简介: 姚庆六(1946—), 男, 上海人, 教授(E-mail: yaoqingliu2002@hotmail.com).

$$|f(t,u)| \leqslant j_r(t), \qquad (t,u) \in (0,1) \times [-r,r].$$

(H3) 存在极限增长函数 $F_\infty(t) = \lim_{u\to\infty} f(t,u)/u$.

(H4) 存在 $d > 0$ 及非负函数 $\zeta \in L^1[0,1]$ 使得

$$|f(t,u)/u| \leqslant \zeta(t), \qquad (t,u) \in (0,1) \times ((-\infty,-d] \cup [d,+\infty)).$$

因此,非线性项 $f(t,u)$ 可以在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 处奇异.

如果假设(H1)成立, 则对于任何 $u \neq 0$, $f(\cdot,u)/u$ 在 $(0,1)$ 上连续. 因此, $F_\infty(t)$ 是 $[0,1]$ 上的可测函数. 如果 $f:[0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续, 则 $f(t,u)$ 满足假设(H1)和(H2).

假设(H1)~(H4)表明本文不要求上下解的存在性, 同时主要结论与临界指数无关.

本文将改进文献[11-15]中使用的局部化方法. 为了描述非线性项 $f(t,u)$ 在有界集合上的增长特性, 我们将引入高度函数. 通过考察高度函数的积分并利用 Schauder 不动点定理, 我们将证明一个存在定理. 这个定理表明如果积分值 $\int_0^1 |F_\infty(t)|\,\mathrm{d}t$ 是适当的, 则问题(P)有一个解. 证明将涉及积分号下取极限的问题. Lebesgue 控制收敛定理将为解决这个问题提供一个有效的工具. 第3节中我们将阐述本文所使用方法的某些局部化特性. 两个例子将说明文中的结论都是新的.

1　预 备 工 作

考察具有范数 $\|u\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|$ 的 Banach 空间 $C[0,1]$. 对于 $r > 0$, 设闭球

$$V(r) = \left\{u \in C[0,1] : \|u\| \leqslant r\right\}.$$

定义非线性项 $f(t,u)$ 在有界集合 $[0,1] \times [-r,r]$ 上的高度函数如下:

$$\varphi(t,r) = \max\left\{|f(t,u)| : \|u\| \leqslant r\right\}, \qquad 0 < t < 1.$$

如果 $f(t,u)$ 满足(H1)和(H2), 则对于任何 $r > 0$, 高度函数 $\varphi(t,r)$ 都在 $[0,1]$ 可积.

设 $G(t,s)$ 是齐次线性问题

$$-u''(t) - \frac{n-1}{t}u'(t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0$$

的 Green 函数, 即

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{s^{n-1}(s^{2-n}-1)}{n-2}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{s^{n-1}(t^{2-n}-1)}{n-2}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

于是 $G(t,s) > 0$, $0 < t, s < 1$ 并且

$$\max_{0\leqslant t,s\leqslant 1} G(t,s) = G\left(\frac{1}{\sqrt[n-2]{n-1}}, \frac{1}{\sqrt[n-2]{n-1}}\right) = \frac{1}{(n-1)\sqrt[n-2]{n-1}}.$$

对于 $u \in C[0,1]$, 定义算子 T 如下:

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

引理 1.1　假设(H1)和(H2)成立. 则 $T: C[0,1] \to C[0,1]$ 为全连续算子.

证明　仅需证明对于任何 $r > 0$, $T: V(r) \to C[0,1]$ 都是全连续算子.

设 $[j_r(t)]_k = \min\left\{j_r(t), k\right\}$. 则因为 $j_r \in L^1[0,1]$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 [j_r(t) - [j_r(t)]_k]\,\mathrm{d}t = 0.$$

定义函数$f_k(t,u)=\min\left\{f(t,u),[j_r(t)]_k\right\}$. 则根据假设(H1)和(H2), $f_k:[0,1]\times[-r,r]\to\mathbf{R}$是连续的. 设

$$(T_ku)(t)=\int_0^1 G(t,s)f_k(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

因为$u\in V(r)$意味着$|u(t)|\leqslant r$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 根据Arzela-Ascoli定理可证$T_k:V(r)\to C[0,1]$为全连续的.

直接计算可得

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\sup_{u\in V(r)}\|Tu-T_ku\|\leqslant\\&\quad\lim_{k\to\infty}\sup_{u\in V(r)}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)|f(s,u(s))-f_k(s,u(s))|\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\quad\lim_{k\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)[j_r(s)-[j_r(s)]_k]\mathrm{d}s\leqslant\\&\quad\max_{0\leqslant t,s\leqslant 1}G(t,s)\lim_{k\to\infty}\int_0^1[j_r(s)-[j_r(s)]_k]\mathrm{d}s=0.\end{aligned}$$

这说明全连续算子T_k在$V(r)$上一致收敛于算子T. 因此$T:V(r)\to C[0,1]$全连续. □

为了考察极限增长函数, 我们需要下列实分析中的Lebesgue控制收敛定理(参见文献[16]).

引理1.2 设$\xi_k(t)(k=1,2,\dots)$是一列$[0,1]$上的可测函数并且$\lim_{k\to\infty}\xi_k(t)=\xi(t)$, a.e. $t\in[0,1]$. 如果存在$[0,1]$上的非负可积函数$\Phi(t)$使得$|\xi_k(t)|\leqslant\Phi(t)$, a.e. $t\in[0,1]$, $k=1,2,\dots$. 则$\xi(t)$在$[0,1]$上可积并且

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1\xi_k(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\xi(t)\mathrm{d}t.$$

2 主要结论

这篇论文建立了下列存在定理:

定理2.1 假设(H1)~(H4)成立并且

$$\int_0^1|F_\infty(t)|\,\mathrm{d}t<(n-1)\sqrt[n-2]{n-1},$$

则问题(P)至少有一个解$u^*\in C[0,1]$. 此外如果存在$0<t<1$使得$f(t,0)\neq 0$, 则u^*是非平凡的.

证明 证明分为3步.

第1步 证明$\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^1\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\mathrm{d}t=\int_0^1|F_\infty(t)|\,\mathrm{d}t$.

根据假设(H2), 存在$j_d\in L^1[0,1]\cap C(0,1)$使得

$$|f(t,u)|\leqslant j_d(t),\qquad(t,u)\in(0,1)\times[-d,d].$$

于是对于任何$0<t<1$, $\lim_{r\to+\infty}j_d(t)/r=0$, 并且成立不等式

$$\begin{aligned}&\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\leqslant\max\left\{|f(t,u)|/r:|u|\leqslant r\right\}\leqslant\\&\quad\max\left\{|f(t,u)|/r:|u|\leqslant d\right\}+\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\leqslant\\&\quad j_d(t)/r+\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}.\end{aligned}$$

这样一来, 对于$0<t<1$,

$$\lim_{r\to+\infty}\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}=\lim_{r\to+\infty}\max\left\{|f(t,u)|/r: |u|\leqslant r\right\}.$$

根据假设(H4), 存在 $\zeta\in L^1[0,1]$ 使得对于任何 $r>d$ 和 $0<t<1$,

$$\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\leqslant\max\left\{|f(t,u)/u|: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\leqslant\zeta(t).$$

容易看出 $\lim_{r\to+\infty}\max\left\{|f(t,u)|/r: |u|\leqslant r\right\}=|F_\infty(t)|$, $0<t<1$. 利用引理 1.2, 即可得到

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^1\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^1\lim_{r\to+\infty}\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^1\lim_{r\to+\infty}\max\left\{|f(t,u)|/r: |u|\leqslant r\right\}\mathrm{d}t=\int_0^1|F_\infty(t)|\,\mathrm{d}t.$$

第 2 步　证明 $\limsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^1\varphi(t,r)\mathrm{d}t<(n-1)\sqrt[n-2]{n-1}$.

利用 $\int_0^1 j_d(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$ 和第 1 步, 可得

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\int_0^1\varphi(t,r)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\limsup_{r\to+\infty}\int_0^1\max\left\{|f(t,u)|/r: |u|\leqslant d\right\}\mathrm{d}t+$$
$$\limsup_{r\to+\infty}\int_0^1\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\int_0^1 j_d(t)\mathrm{d}t+\lim_{r\to+\infty}\int_0^1\max\left\{|f(t,u)|/r: d\leqslant|u|\leqslant r\right\}\mathrm{d}t=$$
$$0+\int_0^1|F_\infty(t)|\,\mathrm{d}t<(n-1)\sqrt[n-2]{n-1}.$$

第 3 步　证明定理 2.1 的结论.

根据第 2 步, 存在 $r>0$ 使得

$$\int_0^1\varphi(t,r)\mathrm{d}t\leqslant(n-1)\sqrt[n-2]{n-1}\,r.$$

设 $u\in V(r)$. 则 $\|u\|\leqslant r$ 并且 $|u(t)|\leqslant r$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 根据 $\varphi(t,r)$ 的定义, 可看出 $|f(t,u(t))|\leqslant\varphi(t,r)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 这样一来

$$\|Tu\|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)|f(s,u(s))|\,\mathrm{d}s\leqslant\max_{0\leqslant t,s\leqslant 1}G(t,s)\int_0^1\varphi(s,r)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{1}{(n-1)\sqrt[n-2]{n-1}}(n-1)\sqrt[n-2]{n-1}\,r=r.$$

于是 $\|Tu\|\leqslant r$ 并且 $T: V(r)\to V(r)$.

根据引理 1.1 和 Schauder 不动点定理, 存在 $u^*\in V(r)$ 使得 $Tu^*=u^*$. 于是 $\|u^*\|\leqslant r$ 并且

$$u^*(t)=(Tu^*)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u^*(s))\mathrm{d}s,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

因为 $G(1,s)\equiv 0$, $0\leqslant s\leqslant 1$, 知有 $u^*(1)=0$. 对上述等式两边求导可得

$$(u^*)'(t)=-\int_0^t s^{n-1}t^{1-n}f(s,u^*(s))\mathrm{d}s,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$(u^*)''(t) = -\frac{n-1}{t}(u^*)'(t) - f(t, u^*(t)), \qquad 0 < t < 1.$$

于是 $(u^*)'(0) = 0$. 因此 $u^*(t)$ 是问题(P)的一个解.

如果解 $u^*(t) \equiv 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 则 $f(t, 0) \equiv 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 因此, 如果存在 $0 < t < 1$ 使得 $f(t, 0) \neq 0$, 则 $u^*(t)$ 是一个非平凡解. 定理获证. □

下列例子说明即使 $f: [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续, 定理 2.1 也是一个新结论.

例 2.1 考察非线性问题

$$\begin{cases} u''(t) + \dfrac{2}{t}u'(t) + \dfrac{4t\cos u(t)}{\ln(\mathrm{e} + u^2(t))} + \min\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}, u^2(t)\right\} u(t) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant t < 1, \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

在这个问题中 $n = 3$ 并且

$$f(t, u) = \frac{4t\cos u}{\ln(\mathrm{e} + u^2)} + \min\left\{\frac{1}{\sqrt{1-t}}, u^2\right\} u.$$

于是 $f(t, u)$ 是 $[0, 1] \times \mathbf{R}$ 上的连续函数.

现在 $(n-1)\sqrt[n-2]{n-1} = 4$ 并且 $F_\infty(t) = 1/\sqrt{1-t}$. 因为

$$|f(t, u)/u| \leqslant 4t + \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$
$$(t, u) \in (0, 1) \times ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)),$$

知假设(H1) ~ (H4) 成立.

因为 $f(1/2, 0) = 2$ 并且

$$\int_0^1 |F_\infty(t)| \, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} < 4,$$

根据定理 2.1 此问题有一个非平凡解 $u^* \in C[0, 1]$. 因为

$$\lim_{u \to +\infty} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t, u)/u| = +\infty,$$

这个结论不能从现有文献中导出.

3 局部化结论

分析定理 2.1 证明的第 3 步, 实际上我们获得了下列存在定理. 这个定理表达了本文所使用的方法的某些局部化特征.

定理 3.1 假设(H1) 和(H2) 成立并且存在一个正数 $r > 0$ 使得

$$\int_0^1 \varphi(t, r)\mathrm{d}t \leqslant (n-1)\sqrt[n-2]{n-1}\, r,$$

则问题(P) 至少有一个解 $u^* \in C[0, 1]$ 并且 $\|u^*\| \leqslant r$. 此外如果存在 $0 < t < 1$ 使得 $f(t, 0) \neq 0$, 则 u^* 是非平凡的.

下列例子说明对于奇异问题(P) 来说, 定理 3.1 是一个方便而有力的工具.

例 3.1 考察奇异问题

$$\begin{cases} u''(t) + \dfrac{3}{t}u'(t) + 3u^2(t)\sin u(t) + \dfrac{\mathrm{e}^{\sin u(t)}\cos u(t)}{2\sqrt[3]{1-t}} = 0, \qquad 0 \leqslant t < 1, \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

在这个问题中 $n = 4$ 并且

$$f(t, u) = 3u^2\sin u + \frac{e^{\sin u}\cos u}{2\sqrt[3]{1-t}}.$$

于是 $f(t, u)$ 在 $t = 1$ 奇异.

现在 $(n-1)\sqrt[n-2]{n-1} = 3\sqrt{3}$ 并且

$$\left|3u^2\sin u + \frac{e^{\sin u}\cos u}{2\sqrt[3]{1-t}}\right| \leqslant 3u^2 + \frac{e}{2\sqrt[3]{1-t}}.$$

由此知 $\varphi(t, 1) \leqslant 3 + e/(2\sqrt[3]{1-t})$ 并且

$$\int_0^1 \varphi(t, 1)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1\left[3 + \frac{e}{2\sqrt[3]{1-t}}\right]\mathrm{d}t = 3 + \frac{3e}{4} \approx 5.038\ 71 < 5.196\ 15 \approx 3\sqrt{3}.$$

因为 $f(1/2, 0) = \sqrt[3]{2}/2$, 根据定理 3.1 此问题有一个非平凡解 $u^* \in C[0, 1]$ 并且 $\|u^*\| \leqslant 1$.

因为极限增长函数 $\lim_{u\to\infty} f(t, u)/u$ 不存在. 此结论不能从定理 2.1 导出.

[参 考 文 献]

[1] Gelfand I N. Some problems in the theory of quasilinear equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1963, **29**(2): 295-381.

[2] Bobernes J, Eberly D. Mathematical Problems From Combustion Theory [M]. Volume 83 of Appl Math Sci. New York: Springer-Verlag, 1989.

[3] Gidas B, NI Wei-min, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle[J]. Commun Math Phys, 1979, **68**(1): 209-243.

[4] Joseph D D, Lundgren T S. Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources [J]. Arch Rat Mech Anal, 1973, **49**(2): 241-269.

[5] Cac N P, Fink A M, Gupta J A. Nonnegative solutions of quasilinear elliptic problems with nonnegative coefficients[J]. J Math Anal Appl, 1997, **206**(1): 1-9.

[6] Korman P. Solution curves for semilinear equations on a ball [J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**(11): 1997-2006.

[7] Korman P. Curves of sign-changing solutions for semilinear equations [J]. Nonlinear Anal TMA, 2002, **51**(5): 801-820.

[8] Hai D D. Uniqueness of positive solutions for a class of semilinear elliptic systems [J]. Nonlinear Anal TMA, 2003, **52**(4): 595-603.

[9] 姚庆六. 单位球上一类非线性 Dirichlet 问题的正对径解[J]. 厦门大学学报, 自然科学版, 2003, **42**(5): 567-569.

[10] 姚庆六. 一类奇异二阶拟线性方程的解和正解[J]. 华东理工大学学报, 2007, **33**(2): 290-293.

[11] 姚庆六. 一类非线性 Dirichlet 边值问题正径向解[J]. 数学物理学报, A辑, 2009, **29**(1): 48-56.

[12] YAO Qing-liu. An iterative method to a class of qualinear boundary value problems[J]. J Compu Appl Math, 2009, **230**(1): 306-311.

[13] 姚庆六. 一类奇异二阶边值问题的正周期解[J]. 数学学报, 2007, **50**(6): 1357-1364.

[14] YAO Qing-liu. Positive solution to a special singular second-order boundary value problem[J]. Math Comput Modeling, 2008, **47**(11/12): 1284-1291.

[15] YAO Qing-liu. Existence and multiplicity of positive solutions to a singular elastic beam equation

rigidly fixed at both ends[J]. Nonlinear Anal TMA, 2008, **69**(8): 2683-2694.
[16] 程其骧, 张奠宙, 魏国强, 等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

Solvability of a Class of Second-Order Quasilinear Boundary Value Problems

YAO Qing-liu
(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, P.R. China)

Abstract: A class of second-order quasilinear boundary value problems was considered when the nonlinear term is singular and the limit growth function at infinite exists. By introducing the height function of nonlinear term on bounded set and considering integration of the height function, an existence theorem of solution was proved. The existence theorem shows that the problem has a solution if the integration of the limit growth function has appropriate value.

Key words: quasilinear ordinary differential equation; two-point boundary value problem; solvability; Lebesgue dominated convergence theorem