应用数学和力学, 第 30 卷 第 8 期
2009 年 8 月 15 日出版
Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 8, Aug. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 08-0997-06

复杂网络统计力学的差分方程方法*

郭进利

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

(陈立群推荐)

摘要: 通过分析几种估计增长网络度分布方法的缺点, 提出估计度分布的差分方程方法, 不仅避免了复杂网络分析中将离散问题连续化带来的逻辑矛盾, 也避免了网络稳态度分布存在性的假设. 利用这个方法给出 Poisson 增长择优连接网络的度分布公式, 借助 Poisson 过程理论和 Gamma 分布的性质严格证明 Poisson 增长择优连接网络是无标度网络.

关 键 词: 复杂网络; 度分布; 无标度网络

中图分类号: N94; TP1; TP3 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.013

引 言

网络在我们的日常生活中无处不在, 网络中的节点和连线是广义的, 它可以用来描述人与人之间的社会关系, 物种之间的捕食关系, 计算机之间的网络连接关系, 网页之间的超链接和科学家之间的合作关系等. 上世纪随机图(ER 模型) 理论一直被很多科学家用来描述复杂网络. ER 模型刻画了现实网络中的随机性, 其度分布是 Poisson 分布[1]. Price 在 1965 年研究科技文献引文网时发现度分布具有幂律性[2], 并在 1976 年对科技文献引文网模型进行了理论分析[3]. 由于 40 年前人们对 Internet, WWW 网络的应用和认识有限, Price 的工作没有引起人们的注意. 然而, 随着 Internet 和 WWW 网络发展, 迫切需要对大规模网络深入研究. 计算机技术的发展使得对大规模网络进行实证研究成为可能, 实证研究表明许多现实网络表现出随机图不具有的特性, 比如较大的集聚系数、度分布是幂律分布. 1998 年, Watts 和 Strogatz 构造出了介于完全规则网络与完全随机网络之间的小世界网络[4], 它具有较高的聚集系数和较小的平均最短距离. Barabási 和 Albert 于 1999 年在文献[5-6] 中发现了许多复杂网络都具有的一种大规模的高度自组织特性, 并且网络度服从幂律分布, 他们提出了 Barabási-Albert 模型(BA 模型) 和无标度网络概念. Barabási 等人主要贡献是提出了增长和择优连接是形成无标度网络的机制. 他们将连续化方法应用到了复杂网络的研究中, 获得了增长网络节点的度关于时间的微分方程, 为复杂网络研究提供了有效的方法. 基于 Barabási-Albert 的方法, 人们对复杂网络中许多模型进行了解析研究[7-15]. 近十年来, 物理学、数学、计算机、社会学和控制论等各个领域的学者都从事着复杂网络的研究, 并且主要集中在增长网络方面[7-12]. 在文献[11] 中,

* 收稿日期: 2008-06-13; 修订日期: 2009-06-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70871082); 上海市重点学科建设资助项目(S30504)
作者简介: 郭进利(1960—) , 男, 陕西人, 教授, 博士(E-mail: phd5816@163.com) .

Toivonen 等人提出了社会网络模型．2009 年, Wang 和 Guo 等人在文献[12] 中也提出一个社会网络模型, 即层次网络的局域择优连接模型．Hase 和 Mendes 在文献[14] 提出了一个考虑节点间地理距离的增长网络模型．然而, 这些网络节点寿命和网络增长都是无限的[5-14]．Guo 考虑了复杂网络节点的到达时间间隔分布和寿命分布, 将复杂网络与排队系统联系起来, 运用排队理论的观点研究了网络节点的衰变和消亡, 并对复杂网络进行了分类[15]．因为大多数网络是动态的, 复杂网络中关于动态网络同步问题研究就显得尤为重要．Lü 等人研究了时变复杂网络的同步性质[16-17]．最近, 文献[18] 进一步研究了复杂动态网络的牵制控制问题.

关于 BA 模型及其演化模型的研究主要集中在度分布的解析计算上, 其主要方法有连续化方法[5]、变化率方法[7, 9] 和主方程方法[7, 10]．主方程方法不加证明的引用了 $\lim_{t\to\infty} P(k, t)$ 的存在和 $\lim_{t\to\infty} t(P(k, t+1) - P(k, t)) = 0$, 这里, $P(k, t)$ 是网络在时刻 t 具有度 k 的平均概率[7, 19]．连续化方法和变化率方法都包含连续性假设[7], 即将离散问题连续化, 再通过微分方程求解节点度的解析表达式．这在数学上是一个极不严密的方法, 它会导致 BA 模型分析中出现逻辑错误[13, 19]．除此之外, 在 BA 模型分析中假设节点等时间间隔进入网络, 并且节点进入时间服从均匀分布, 这导致了网络体现不出“富者愈富”现象[20]．对于 BA 模型的分析, 是否存在一种方法, 既不需要稳态度分布存在性的假设也不需要连续性假设, 这是一个值得研究的问题．本文目的是针对这个问题提出一个研究复杂网络度分布的新方法.

在第 1 节中, 介绍 BA 模型和 Poisson 增长择优连接网络(Poisson NPA) 模型．在第 2 节中, 建立 Poisson NPA 模型节点度的差分方程, 在不需要网络度分布稳态概率的存在和连续性假设的条件下, 利用差分方程方法和 Poisson 过程理论获得网络度分布的解析表达式, 很好地反映了“富者愈富”现象．第 3 节中是全文的总结.

1 模 型 描 述

Barabási 和 Albert[5] 提出的无标度网络模型揭示了增长和择优两个机制, 在复杂网络自组织演化过程中涌现出无标度的普遍规律．Barabási 关于复杂网络的一系列工作获得了 2006 年 von Neumann 勋章．Kraqivsky 和 Redner[9] 将 BA 模型称为 GN 模型(growing network model)．由于文献[5-6] 分析 BA 模型时, 假设节点是在 $t = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 离散地到达系统, 因此, BA 模型定义如下:

1) 增长: 从一个具有 m_0 个节点的网络开始, 在时刻 $t = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 各自加入一个带 $m(\leqslant m_0)$ 条边的新节点, 连接这个新节点到 m 个不同的已存在系统中的节点上;

2) 择优连接: 新节点与已经存在于系统中的节点 i 相连接的概率 Π, 与节点 i 的度 k_i 满足以下关系:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_i k_i}. \tag{1}$$

由于现实世界中网络的增长是连续的, 我们采用节点按 Poisson 过程随机增长的择优网络来更好地刻画现实中的复杂网络, 并将它称为 Poisson NPA 模型, 定义如下:

1) 随机增长: 从一个具有 m_0 个节点的网络开始, 节点到达过程是具有强度为 λ 的 Poisson 过程, 在时刻 t 加入一个新节点, 这个新节点连接到 $m(\leqslant m_0)$ 个已存在于系统中的节点上;

2) 择优连接: 一个新节点与已经存在于系统中的节点 i 相连接的概率 Π, 与节点 i 的度 k_i 的关系满足方程(1).

根据 Poisson 过程的性质, BA 模型可被视为 $\lambda = 1$ 的 Poisson NPA 模型.

2 模型分析

对于足够大的 t, 令 $N(t) \approx \{$时刻 t 到达系统的节点个数$\}$ 且

$$A(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx,$$

则

$$\mu(t) = E[N(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t), \tag{2}$$

这里 $$A_i(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{(\lambda x)^l}{l!}, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

表示 $A(t)$ 的第 i 次卷积. 由于节点的到达过程 $N(t)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, 从 Poisson 过程理论[21] 可以得到

$$\mu(t) = E[N(t)] = \lambda t. \tag{3}$$

假设 t_i 为第 i 个节点 i 的到达时间, $K(N(t), i)$ 代表 t 时刻节点 i 的度, 由于变量 $K(N(t), i)$ 与 $\Pi(K(N(t), i))$ 成比例, 则 $K(N(t), i)$ 满足如下差分方程:

$$K(N(t), i) - K(N(t)-1, i) = m \frac{K(N(t)-1, i)}{\sum_{j=0}^{N(t)-1} K(N(t)-1, j)},$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots, N(t) - 1. \tag{4}$$

因为网络的平均度为 $2m$, 对于足够大的 t, 可以得到

$$\sum_{j=0}^{N(t)-1} K(N(t)-1, j) = 2m(N(t)-1). \tag{5}$$

将上式代入式(4), 得到

$$K(N(t), i) - K(N(t)-1, i) = \frac{K(N(t)-1, i)}{2(N(t)-1)},$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots, N(t) - 1. \tag{6}$$

从式(6) 得到

$$K(N(t), i) = \left(1 + \frac{1}{2(N(t)-1)}\right) K(N(t)-1, i),$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots, N(t) - 1. \tag{7}$$

因此

$$K(N(t), i) = \left(1 + \frac{1}{2(N(t)-1)}\right)\left(1 + \frac{1}{2(N(t)-2)}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2(N(t_i))}\right) K(N(t_i), i) =$$
$$m\left(1 + \frac{1}{2(N(t)-1)}\right)\left(1 + \frac{1}{2(N(t)-2)}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2N(t_i)}\right),$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots, N(t) - 1. \tag{8}$$

从式(8), 可以得到

$$\ln \frac{K(N(t), i)}{m} = \sum_{j=N(t_i)}^{N(t)-1} \ln\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \approx \sum_{j=N(t_i)}^{N(t)-1} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N(t)-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{N(t_i)-1} \frac{1}{j}\right),$$

其中

$$\left(\sum_{j=1}^{N(t)-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{N(t_i)-1}\frac{1}{j}\right)=$$

$$[C+\ln(N(t)-1)+\varepsilon_{N(t)-1}]-[C+\ln(N(t_i)-1)+\varepsilon_{N(t_i)-1}],$$

这里 C 为 Euler 常数, 同时当 $n\to\infty$ 时, $\varepsilon_n\to 0$.

对于足够大的 t, 可以得到

$$\left(\sum_{j=1}^{N(t)-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{N(t_i)-1}\frac{1}{j}\right)\approx\ln(N(t)-1)-\ln(N(t_i)-1),$$

$$\ln\frac{K(N(t),i)}{m}\approx\frac{1}{2}\ln\frac{N(t)-1}{N(t_i)-1}\approx\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{E}[N(t)]-1}{\mathrm{E}[N(t_i)]-1}\approx\frac{1}{2}\ln\frac{t}{t_i},$$

因此

$$K(N(t),i)\approx m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}.$$

由于节点到达过程是具有参数为 λ 的 Poisson 过程, 根据 Poisson 过程理论[21] 可知, 到达时间 t_i 服从如下 Gamma 分布:

$$P\{t_i\leqslant x\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{(\lambda x)^l}{l!},$$

因此

$$P\{K(N(t),i)\geqslant k\}=P\left\{t_i\leqslant\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right\}=$$

$$1-\mathrm{e}^{-\lambda t(m/k)^2}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{(\lambda t(m/k)^2)^l}{l!},\qquad k>m,\ t>t_i. \tag{9}$$

从式(9), 得

$$P\{K(N(t),i)\geqslant k\}=P\left\{t_i\leqslant\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right\}=$$

$$A_i\left(\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right),\qquad k>m,\ t>t_i,\ i=1,2,\cdots. \tag{10}$$

对于足够大的 t 且 $j>i>0$, $k>m$, 从方程(9), 可得

$$P\{K(N(t),i)\geqslant k\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t(m/k)^2}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{[\lambda t(m/k)^2]^l}{l!}>$$

$$1-\mathrm{e}^{-\lambda t(m/k)^2}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{[\lambda t(m/k)^2]^l}{l!}=P\{K(N(t),j)\geqslant k\}. \tag{11}$$

式(11) 体现出"富者愈富"现象, 这个公式也表明 Poisson NPA 网络中"中枢"节点的存在[8].

当 $k>m$ 时, 从式(9) 和式(10), 可得

$$P\{K(N(t),i)=k\}=P\{K(N(t),i)\geqslant k\}-P\{K(N(t),i)\geqslant k+1\}=$$

$$A_i\left(\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right)-A_i\left(\left(\frac{m}{k+1}\right)^2 t\right),$$

因此, 根据 Poisson 过程理论[21], Poisson NPA 模型的稳态平均度分布如下:

$$P(k)\approx\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathrm{E}[N(t)]}\sum_{i=1}^{\infty}P\{K(N(t),i)=k\}=$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda t}\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left(\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right)-\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left(\left(\frac{m}{k+1}\right)^2 t\right)\right)=$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda t}\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2 t-\lambda\left(\frac{m}{k+1}\right)^2 t\right)\approx$$

$$\frac{2m^2}{k(k+1)^2}. \tag{12}$$

从式(12)可知该网络的稳态平均度分布的指数为3幂律分布,这个结论比Barabási和Albert的结论更精确.

3 结束语

上述讨论避免了离散问题连续化和网络稳态度分布存在性的假设,给出了一个估计增长网络度分布的严密方法,但不是精确解方法. 从式(10)和式(12)可以看出Poisson NPA模型不仅是无标度网络,而且能够体现出"富者愈富"现象.

对节点到达不加任何限制,分析连续时间随机增长择优连接的模型是比较困难的. 在现有文献中,复杂网络模型的分析均假设节点等时间间隔进入系统. 虽然Bollobás等人提到随机集N_t,但是由文献[22]中式(2)可知,他们仍采用了这个假设. 正如Bollobás等人在文献[22]中指出"虽然有几百篇复杂网络方面的文章,但是,在这个领域的工作缺乏严密数学分析." 如何能更好地刻画现实世界中的复杂网络,同时较严密地对其拓扑结构进行分析,逐步地建立复杂网络理论体系,这是值得研究的理论课题.

[参 考 文 献]

[1] Erdös P, Rényi A. On random graphs[J]. Publicationes Mathematicae, 1959, **6**: 290-297.

[2] Price D J D. Networks of scientific paper[J]. Science, 1965, **149**(3683): 510-515.

[3] Price D J D. A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes[J]. J Amer Soc Inform Sci, 1976, **27**(5): 292-306.

[4] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of "small-world" networks[J]. Nature, 1998, **393**(6): 440-442.

[5] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, **286**(5439): 509-512.

[6] Barabási A L, Albert R, Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks[J]. Physica A, 1999, **272**(1/2): 173-187.

[7] Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Rev Mod Phys, 2002, **74**(1): 47-97.

[8] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics[J]. Physics Reports, 2006, **424**(4/5): 175-308.

[9] Krapivsky P L, Redner S. Organization of growing random networks[J]. Phys Rev E, 2001, **63**(6): 066123-1—066123-14.

[10] Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW[M]. Oxford UK: Oxford University Press, 2003.

[11] Toivonen R, Onnela J P, Saramäki J, et al. A model for social networks[J]. Physica A, 2006, **371**(2): 851-860.

[12] Wang L N, Guo J L, Yang H X, et al. Local preferential attachment model for hierarchical networks[J]. Physica A, 2009, **388**(8): 1713-1720.

[13] Guo J L, Bai Y Q. A note on mean-field theory for scale-free random networks, dynamics of continuous[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Ser B, 2006, **13**(3): 523-531.

[14] Hase M O, Mendes J F F. Solvable metric growing networks[J]. J Stat Mech, 2008, P12002. doi: 10.

1088/1742-5468/2008/12/P12002.

[15] GUO Jin-li. The classification and analysis of dynamic networks[J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(5): 1239-1245.

[16] Lü J H, Chen G, Cheng D. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria[J]. *IEEE Trans Auto Contr*, 2005, **50**(6): 841-846.

[17] Chen L, Lü J H, Lu J L, et al. Local asymptotic coherence of time-varying discrete ecological networks[J]. *Automatica*, 2009, **45**(2): 546-552.

[18] Yu W W, Chen G R, Lü J H. On pinning synchronization of complex dynamical networks[J]. *Automatica*, 2009, **45**(2): 429-435.

[19] 郭进利. 探讨动态复杂网络的新途径[J]. 系统工程理论与实践, 2006, **26**(7): 34-40.

[20] Guo J L, Wang C P. Poisson continuous time growing complex networks[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Ser A, 2006, **13**: 970-972.

[21] Ross S M. *Stochastic Processes* [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1983.

[22] Bollobás B, Riordan O M. Mathematical results on scale-free random graphs[A]. In: *Handbook of Graphs and Network* [C]. Weinheim: Wiley-VCH, 2003, 1-34.

Difference Equation Approach of Statistical Mechanics of Complex Networks

GUO Jin-li

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, P. R. China)

Abstract: The difference equation approach of estimating degree distribution in growing networks was proposed after analyzing the disadvantages of some existing approaches. This approach avoids not only logic conflicts brought by continuum of discrete problem, but also the assumption of existence of the stationary degree distribution in network analysis. The degree distribution formula of Poisson growth and preferential attachment network was obtained by this approach. It was strictly proved that this network is scale-free based on Poisson process theory and properties of Gamma distribution.

Key words: complex network; degree distribution; scale-free network