应用数学和力学,第 30 卷 第 9 期
2009 年 9 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 9, Sep. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 09-1009-06

功能梯度圆板的轴对称自由振动*

王 云[1,2], 徐荣桥[1], 䣭江[1]

(1. 浙江大学 土木系,紫金港校区, 杭州 310058;
2. 杭州电子科技大学 机械工程学院,杭州 310018)

(我刊编委 䣭江来稿)

摘要: 基于三维弹性理论, 用直接位移法求解了横观各向同性功能梯度圆板的轴对称自由振动,其材料特性沿板厚度方向按指数形式变化. 在弹性简支和刚性滑动两种边界条件下得到了三维精确解,即它逐点满足基本方程和边界条件. 最后给出了数值算例并与以前的工作进行了对比. 该方法也可推广应用于材料特性沿板厚度任意变化情形.

关 键 词: 功能梯度材料; 圆板; 自由振动; 轴对称

中图分类号: O343.1 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.001

引 言

圆板的自由振动是弹性力学中的经典问题, 一直受到众多学者的关注[1]. Ding 等[2] 指出了前人工作中的错误, 并利用状态空间法结合有限 Hankel 变换给出了横观各向同性圆板和压电圆板的轴对称自由振动的三维精确解. Xu[3] 把该方法推广到了非轴对称情形. 功能梯度材料是一种新型复合材料, 有广泛应用, 但是由于其材料特性是空间坐标的函数, 使得问题比均匀材料更为复杂. Reddy 等[4] 采用一阶剪切板理论, 分析了功能梯度圆板的轴对称弯曲问题, 并得到了与薄板理论的关系. Ma 和 Wang[5] 把该方法推广到了三阶剪切板理论. Nie 和 Zhong[6] 以及周凤玺和李世荣[7] 基于三维理论采用状态空间法结合 DQM 法分析了功能梯度圆板的自由振动. 最近, Li 等[8] 采用应力函数, 给出了材料特性沿板厚度任意变化的功能梯度圆板, 在轴对称的多项式荷载作用下的弯曲问题的弹性力学解.

本文从三维弹性理论出发, 用直接位移法分析横观各向同性功能梯度圆板轴对称自由振动问题, 当材料特性沿板厚度按指数函数变化时, 在弹性简支和刚性滑动两种边界条件下, 我们得到三维精确解, 当材料特性沿板厚度任意变化时, 可得到近似解.

1 公式推导

设有横观各向同性功能梯度圆板, 其半径为 a, 厚度为 h, 材料的各向同性面平行于板的

* 收稿日期: 2009-04-26; 修订日期: 2009-06-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872180; 10725210)
作者简介: 王云(1970—) , 女, 山东肥城人, 副教授;
徐荣桥(1972 —) , 男, 浙江慈溪人, 副教授, 博士(联系人. Tel/Fax: + 86-571-88208478; E-mail: xurongqiao@zju.edu.cn) .

中面．取板上表面圆心为原点建立圆柱坐标系(r,θ,z)，z 轴由上表面指向下表面．无量纲的运动微分方程可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\tau_{\xi\zeta}}{\partial\zeta}+\dfrac{\sigma_\xi-\sigma_\theta}{\xi}=\rho\dfrac{\rho_1}{c}ah\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{\xi\zeta}}{\partial\xi}+\dfrac{\tau_{\xi\zeta}}{\xi}+\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\sigma_\zeta}{\partial\zeta}=\rho\dfrac{\rho_1}{c}ah\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{cases}\tag{1}$$

式中的各参数为

$$\begin{cases}\xi=r/a,\ \ \zeta=z/h,\ \ u=u_r/h,\ \ w=u_z/h,\ \ \varepsilon=h/a,\ \ \rho=\rho/\rho_1,\\ \sigma_\xi=\sigma_{rr}/c,\ \ \sigma_\theta=\sigma_{\theta\theta}/c,\ \ \sigma_\zeta=\sigma_{zz}/c,\ \ \tau_{\xi\zeta}=\sigma_{rz}/c,\ \ c_{ij}=c_{ij}/c,\end{cases}\tag{2}$$

这里 c 和 ρ_1 是两个常数，它们分别具有应力和密度的量纲，而 u_r 和 u_z 是径向和轴向的位移分量，σ_{rr}，σ_{zz}，σ_{rz} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 是应力分量，t 是时间，$\rho(z)$ 是密度，$c_{ij}(z)$ 是弹性系数，因此无量纲的弹性系数 c_{ij} 和密度 ρ 是坐标 ζ 的函数．而无量纲的本构关系为

$$\begin{cases}\sigma_\xi=c_{11}\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+c_{12}\varepsilon\dfrac{u}{\xi}+c_{13}\dfrac{\partial w}{\partial\zeta},\ \ \sigma_\zeta=c_{13}\left(\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\varepsilon\dfrac{u}{\xi}\right)+c_{33}\dfrac{\partial w}{\partial\zeta},\\[2mm]\sigma_\theta=c_{12}\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+c_{11}\varepsilon\dfrac{u}{\xi}+c_{13}\dfrac{\partial w}{\partial\zeta},\ \ \tau_{\xi\zeta}=c_{44}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}+\varepsilon\dfrac{\partial w}{\partial\xi}\right).\end{cases}\tag{3}$$

我们假设两个位移分量为

$$u=\mathrm{J}_1(k\xi)f(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\ \ w=\mathrm{J}_0(k\xi)g(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\tag{4}$$

式中 ω 是振动频率，$\mathrm{J}_0(\cdot)$ 和 $\mathrm{J}_1(\cdot)$ 分别是 0 阶和 1 阶 Bessel 函数，k 是与圆周边界条件有关的一个参数．把式(4)代入式(3)，我们得到

$$\begin{cases}\sigma_\xi=[(\varepsilon kc_{11}f+c_{13}g')\mathrm{J}_0(k\xi)+\varepsilon(c_{12}-c_{11})f\xi^{-1}\mathrm{J}_1(k\xi)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\\ \sigma_\theta=[(\varepsilon kc_{12}f+c_{13}g')\mathrm{J}_0(k\xi)+\varepsilon(c_{11}-c_{12})f\xi^{-1}\mathrm{J}_1(k\xi)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\\ \sigma_\zeta=G(\zeta)\mathrm{J}_0(k\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\ \ \tau_{\xi\zeta}=F(\zeta)\mathrm{J}_1(k\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\end{cases}\tag{5}$$

这里一撇表示对 ζ 的导数以及

$$G(\zeta)=c_{33}g'+\varepsilon kc_{13}f,\ \ F(\zeta)=c_{44}(f'-\varepsilon kg).\tag{6}$$

再把式(4)和(5)代入式(1)得到

$$F'-\varepsilon k(\varepsilon kc_{11}f+c_{13}g')+\rho\Omega^2 f=0,\ \ G'+\varepsilon kF+\rho\Omega^2 g=0,\tag{7}$$

式中 Ω 是无量纲频率，其定义为

$$\Omega^2=\rho_1 h^2\omega^2/c.\tag{8}$$

另外，式(6)也可以写为

$$g'=c_{33}^{-1}G-\varepsilon kc_{13}c_{33}^{-1}f,\ \ f'=c_{44}^{-1}F+\varepsilon kg.\tag{9}$$

把式(9)第 1 式代入式(7)第 1 式，得到

$$F'(\zeta)=[\varepsilon^2k^2(c_{11}-c_{13}^2c_{33}^{-1})-\rho\Omega^2]f+\varepsilon kc_{13}c_{33}^{-1}G.\tag{10}$$

这样，联立式(7)第 2 式、式(9)和(10)并写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{R}'(\zeta)=\boldsymbol{MR}(\zeta),\tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{R}=[f\quad G\quad F\quad -g]^{\mathrm{T}}$ 被称为状态向量，以及系数矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 0 & c_{44}^{-1} & -\varepsilon k\\ 0 & 0 & -\varepsilon k & \rho\Omega^2\\ \varepsilon^2k^2(c_{11}-c_{13}^2c_{33}^{-1})-\rho\Omega^2 & \varepsilon kc_{13}c_{33}^{-1} & 0 & 0\\ \varepsilon kc_{13}c_{33}^{-1} & -c_{33}^{-1} & 0 & 0\end{bmatrix}.\tag{12}$$

由于系数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中含有随坐标 ζ 变化的弹性系数 c_{ij}, 因此方程(12) 是一个变系数的常微分方程, 一般情况下很难得到解析解． 但是如果材料特性沿厚度的变化遵循指数规律, 即 $c_{ij} = c_{ij}^{0}\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$, $\rho = \rho^{0}\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$(这里 c_{ij}^{0} 和 ρ^{0} 是 $z = 0$ 平面上的材料特性, λ 称为梯度指标), 我们可以把式(11) 化成常系数常微分方程．为此, 设

$$G = G(\zeta)e^{\lambda\zeta}, \quad F = F(\zeta)e^{\lambda\zeta}, \tag{13}$$

并把式(13) 代入式(11) 得到

$$\boldsymbol{R}'(\zeta) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{R}(\zeta), \tag{14}$$

式中

$$\boldsymbol{R} = [f \quad G \quad F \quad -g]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (c_{44}^{0})^{-1} & -\varepsilon k \\ 0 & -\lambda & -\varepsilon k & \rho^{0}\Omega^{2} \\ \varepsilon^{2}k^{2}[c_{11}^{0} - (c_{13}^{0})^{2}(c_{33}^{0})^{-1}] - \rho^{0}\Omega^{2} & \varepsilon k c_{13}^{0}(c_{33}^{0})^{-1} & -\lambda & 0 \\ \varepsilon k c_{13}^{0}(c_{33}^{0})^{-1} & -(c_{33}^{0})^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

由式(15) 知系数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的元素已经全部为常数, 因此式(14) 就是常系数的常微分方程, 它的解容易得到为

$$\boldsymbol{R}(\zeta) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{M}\zeta}\boldsymbol{R}(0). \tag{16}$$

通过式(16), 在任意 ζ 处的状态向量 $\boldsymbol{R}(\zeta)$ 的值可由 $\zeta = 0$ 处的状态向量 $\boldsymbol{R}(0)$ 得到． 例如我们令 $\zeta = 1$, 则圆板下表面处的状态向量为

$$\boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{R}(0), \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{T} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{M}}$ 被称为传递矩阵, 它的具体运算可参考文献[9] 或由 MATLAB 等软件实现．式(17) 建立了圆板上下表面状态向量之间的关系．

对于自由振动, 圆板的上下表面的应力条件可写为

$$\sigma_{\zeta} = \tau_{\xi\zeta} = 0, \qquad 当\ \zeta = 0, 1. \tag{18}$$

注意到式(5) 和(13), 上述条件也可写为

$$G = F = 0, \qquad 当\ \zeta = 0, 1. \tag{19}$$

把式(19) 代入式(17) 得到

$$\begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} \\ T_{31} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(0) \\ -g(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{20}$$

式中 T_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{T}$ 中第 i 行第 j 列的元素．式(20) 是一齐次方程, 为了得到它的非零解, 其系数矩阵的行列式值必须为 0, 即

$$T_{21}T_{34} - T_{24}T_{31} = 0. \tag{21}$$

这就是功能梯度圆板轴对称自由振动的频率方程．

2 边界条件

在前面的推导中, 圆周边界上的边界条件还没有考虑, 这些条件与参数 k 有关． 如果参数 k 满足

$$\mathrm{J}_{0}(k) = 0, \tag{22}$$

那么由式(4) 和(5) 可以得到如下边界条件:

$$w = 0,\ \varepsilon(c_{12} - c_{11})u + \sigma_\xi = 0,\qquad 当\ \xi = 1. \tag{23}$$

这种边界条件我们称之为弹性简支,它由 Ding 等[2]提出.

如果参数 k 满足

$$J_1(k) = 0, \tag{24}$$

那么从式(4)和(5)可以得到如下边界条件:

$$u = 0,\ \tau_{\xi\zeta} = 0,\qquad 当\ \xi = 1. \tag{25}$$

这种边界条件我们称之为刚性滑动,它也由 Ding 等[2]提出.

由式(22)或(24)可以得到无限多个 $k_i > 0$,对应每一个 k_i 可由式(21)求得一系列相应的频率 Ω.

3 数值算例

考虑一横观各向同性功能梯度圆板,其材料特性沿厚度按指数规律变化. 表 1 给出了 z

表 1　在 $z = 0$ 处的材料特性

c_{11}^0/GPa	c_{12}^0/GPa	c_{13}^0/GPa	c_{33}^0/GPa	c_{44}^0/GPa	ρ^0/(kg/m^3)
139	77.9	74.3	115	25.6	7 500

表 2　弹性简支圆板的基频

ε	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2.0$
0.1	0.013 3(0.013 3)	0.013 3	0.013 0	0.012 6	0.012 2
0.2	0.051 6(0.051 6)	0.051 3	0.050 4	0.049 0	0.047 2
0.3	0.110 5(0.110 5)	0.109 9	0.108 0	0.105 1	0.101 3
0.4	0.184 8(0.184 8)	0.183 8	0.180 8	0.176 2	0.170 1
0.5	0.270 0(0.270 0)	0.268 6	0.264 5	0.258 0	0.249 5
0.6	0.362 6(0.362 6)	0.360 8	0.355 5	0.347 1	0.336 2
0.7	0.460 1(0.460 1)	0.457 8	0.451 3	0.441 0	0.427 7
0.8	0.560 8(0.560 8)	0.558 1	0.550 3	0.538 2	0.522 5
0.9	0.663 4	0.660 3	0.651 4	0.637 3	0.619 3
1.0	0.767 3	0.763 8	0.753 6	0.737 7	0.717 4

注　括号内的数值为有限元结果[2],下表同.

表 3　刚性滑动圆板的基频

ε	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2.0$
0.1	0.033 3(0.033 3)	0.033 1	0.032 5	0.031 6	0.030 4
0.2	0.123 3(0.123 3)	0.122 6	0.120 6	0.117 4	0.113 2
0.3	0.250 5(0.250 5)	0.249 2	0.245 3	0.239 2	0.231 3
0.4	0.398 5(0.398 6)	0.396 6	0.390 8	0.381 7	0.369 9
0.5	0.557 4(0.557 4)	0.554 7	0.547 0	0.534 9	0.519 3
0.6	0.721 5(0.721 6)	0.718 2	0.708 5	0.693 4	0.674 2
0.7	0.887 9(0.888 1)	0.883 9	0.872 2	0.854 3	0.831 5
0.8	1.055 1(1.055 8)	1.050 3	1.036 7	1.015 8	0.989 8
0.9	1.222 2	1.216 7	1.201 0	1.177 4	1.148 2
1.0	1.388 8	1.382 5	1.364 9	1.338 5	1.306 3

= 0处的材料特性．表2和表3列出了两种边界条件下圆板的最低固有频率随梯度指标 λ和圆板厚度半径比ε的变化情况, 其中括号内的数据为均匀材料圆板($\lambda=0$) 的有限元结果[2]．我们发现即使当圆板厚度半径比 ε很大时, 本文方法与有限元结果仍然十分接近．这是因为本文方法是基于三维理论的, 并没有采用传统的板理论．从结果可以看出, 两种边界条件下的最低无量纲频率随板的梯度指标的减小和厚度半径比的增大而增大．

4 结 论

本文采用变量分离法, 得到了功能梯度圆板轴对称自由振动的状态方程, 当材料特性沿板厚度按指数规律变化时, 该状态方程被转化为常系数的常微分方程．在两种边界条件下, 得到了精确的频率方程．数值结果也很好地验证了本文方法．如果材料特性沿板厚度是任意分布的, 那么可以把圆板沿厚度方向分成很多子层, 并假设每个子层内材料特性不变并等于子层中面的值, 则对于每一个子层, 式(11) 变成常系数微分方程, 再由式(4)、式(5) 第3式和第4式, 看到f, g, G 和F 分别直接表示位移和应力在 ζ 方向的分布, 然后采用文献[3] 的相应方法, 也可得到本文所述两种边界条件下的频率方程．由于采用了分层模型, 所得结果是近似解．

[参 考 文 献]

[1] Bert C W. Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, Ⅴ: part Ⅰ[J]. The Shock and Vibration Digest, 1991, **23**(6): 3-14.

[2] Ding H J, Xu R Q, Chi Y W, et al. Free axisymmetric vibration of transversely isotropic piezoelectric circular plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(30): 4629-4652.

[3] Xu R Q. 3D exact solutions for free vibration of laminated transversely isotropic circular, annular and sectorial plates with unusual boundary conditions[J]. Archive of Applied Mechanics, 2008, **78**(7): 543-558.

[4] Reddy J N, Wang C M, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates[J]. European Journal of Mechanics A/ Solids, 1999, **18**(2): 185-199.

[5] Ma L S, Wang T J. Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, **41**(1): 85-101.

[6] Nie G J, Zhong Z. Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, **196**(49/52): 4901-4910.

[7] 周凤玺, 李世荣. 功能梯度材料圆板的三维弹性分析[J]. 振动与冲击, 2008, **27**(1): 115-118, 130.

[8] Li X Y, Ding H J, Chen W Q. Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load qr^k[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, **45**(1): 191-210.

[9] Moler C, Loan C V. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later[J]. SIAM Review, 2003, **45**(1): 3-49.

Free Axisymmetric Vibration of FGM Circular Plates

WANG Yun[1,2], XU Rong-qiao[1], DING Hao-jiang[1]

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University,
Zijingang Campus, Hangzhou 310058, P.R.China;
2. School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University,
Hangzhou 310018, P.R.China)

Abstract: Based on three-dimensional theory, a direct displacement method was presented to investigate free axisymmetric vibration of transversely isotropic circular plates, whose material is functionally graded and its properties obey the exponential law along the thickness of the plate. For two boundary conditions the solution satisfies all basic equations and corresponding boundary condition at every point and thus is three-dimensionally exact. Numerical examples were finally tabulated and compared with those of previous works. The present method can also be extended to the case of arbitrary distribution of the material properties along the thickness of the plate.

Key words: functionally graded material (FGM); circular plate; free vibration; axisymmetry