文章编号: 1000-0887(2009) 09-1033-09

Banach 空间中广义混合平衡问题*

张石生

(宜宾学院 数学系, 四川 宜宾 644007)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 在一致光滑和严格凸的 Banach 空间的框架下, 采用综合性算法, 借以寻求广义混合平衡问题的解集、变分不等式的解集、及一有限族的拟 ϕ- 非扩张映象公共不动点集的公共元. 作为应用, 把所得结果应用于研究最优化问题. 所得结果推广和改进了 Ceng, Takahashi, Qin 等人所发布的新结果.

关 键 词: 广义混合平衡问题; 混合平衡问题: 平衡问题; 变分不等式; 拟 ϕ- 非扩张映象; 极大单调映象; 单调映象

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.004

引 言

本文中处处假定 $\mathbf{N}$和 $\mathbf{R}$分别是正整数集和实数集, E 是一实 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, C 是 E 之一非空的闭凸子集, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表 E 和 E^* 之间的配对. 以后, 我们分别用 $x_n \to x$ 和 $x_n \rightharpoonup x$ 表序列$\{x_n\}$强和弱收敛于 x.

设 $\Theta: C \times C \to \mathbf{R}$是一二元函数, $\phi: C \to \mathbf{R}$是一实值函数, 而$A: C \to E^*$ 是一非线性映象. “所谓的” 广义混合平衡问题是求一 $u \in C$ 使得

$$\Theta(u, y) + \langle Au, y - u\rangle + \phi(y) - \phi(u) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{1}$$

问题(1) 的解集以 Ω 记之, 即

$$\Omega = \left\{u \in C: \Theta(u, y) + \langle Au, y - u\rangle + \phi(y) - \phi(u) \geqslant 0,\ \forall y \in C\right\}. \tag{2}$$

特例

(Ⅰ) 如果 $A = 0$, 则问题(1) 等价于求一 $u \in C$ 使得

$$\Theta(u, y) + \phi(y) - \phi(u) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{3}$$

这一问题称为混合平衡问题[1]. (3) 式的解集以 MEP 记之.

(Ⅱ) 如果 $\Theta = 0$, 则问题(1) 等价于求 $u \in C$ 使得

$$\langle Au, y - u\rangle + \phi(y) - \phi(u) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{4}$$

这一问题称之为 Browder 型的混合变分不等式[2]. (4) 式的解集以 VI(C, A, ϕ) 记之.

近年来, 许多作者分别在 Hilbert 空间、一致光滑和一致凸的 Banach 空间的框架下, 研究了寻求非扩张映象的不动点集和平衡问题的解集的公共元的问题, (见文献[3-5]及其参考文献) .

* 收稿日期: 2009-04-04; 修订日期: 2009-07-24
作者简介: 张石生(1934—) , 男, 云南省曲靖市人, 教授(E-mail: changss@yahoo.cn) .

受以往在这一方向上的工作的启发,本文的目的是在一致光滑和一致凸的 Banach 空间的框架下,采用综合性算法,借以寻求广义混合平衡问题的解集、变分不等式的解集、及一有限族的拟 ϕ 非扩张映象公共不动点集的一公共元. 作为应用,我们把所得结果应用于研究最优化问题. 文中所得到的结果,推广和改进了参考文献[1, 3-5] 相应的结果.

1 预备知识

首先我们追述某些定义和结论.

由

$$J(x) = \left\{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}, \qquad x \in E. \tag{5}$$

所定义的映象 $J: E \to 2^{E^*}$ 称为正规对偶映象. 由Hahn-Banach 定理知,对每一 $x \in E$, $J(x) \neq$ ƒ.

注 1.1 如所周知,如果 E 是一光滑的、严格凸的自反 Banach 空间,则正规对偶映象 $J: E \to 2^{E^*}$ 是单值的、一对一的和满射的(见文献[6]).

设 E 是一光滑的、严格凸的自反的 Banach 空间,而 C 是 E 之一非空的闭凸子集. 以后我们总认为 $\phi: E \times E \to \mathbf{R}^+$ 是由下式定义的 Liapunov 泛函:

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2, \qquad \forall x, y \in E. \tag{6}$$

由 ϕ 的定义易知

$$(\|x\| - \|y\|)^2 \leqslant \phi(x, y) \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2, \qquad \forall x, y \in E. \tag{7}$$

依照 Alber[7], 广义投影 $\Pi_C: E \to C$ 定义为

$$\Pi_C(x) = \inf_{y \in C} \phi(y, x), \qquad \forall x \in E. \tag{8}$$

引理 1.1[7-8] 设 E 是一光滑的、严格凸的自反 Banach 空间, C 是 E 之一非空的闭凸子集,则下面的结论成立:

1) $\phi(x, \Pi_C y) + \phi(\Pi_C y, y) \leqslant \phi(x, y)$; $\forall x \in C, y \in E$;

2) 设 $x \in E, z \in C$, 则

$$z = \Pi_C x \Leftrightarrow \langle z - y, Jx - Jz\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{9}$$

注 1.2

1) 如果 E 是一实的Hilbert 空间 H, 则 $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ 而且 Π_C 是 H 到 C 上的度量投影 P_C;

2) 如果 E 是一光滑的、严格凸的自反 Banach 空间, $x, y \in E$, 则 $\phi(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ (见文献[6]).

设 E 是一光滑的、严格凸的自反 Banach 空间, C 是 E 之一非空的闭凸子集, $T: C \to C$ 是一映象, 而 $F(T)$ 是 T 的不动点的集合. 一点 $p \in C$ 称为 T 的渐进不动点, 如果存在一序列 $\{x_n\} \subset C$ 使得 $x_n \rightharpoonup p$ 且 $\|x_n - Tx_n\| \to 0$. 我们用 $F(T)$ 表 T 的所有渐近不动点的集合. 一映象 $T: C \to C$ 称为相对非扩张的[9], 如果 $F(T) \neq$ ƒ, $F(T) = F(T)$, 而且

$$\phi(p, Tx) \leqslant \phi(p, x), \qquad \forall x \in C, p \in F(T).$$

一映象 $T: C \to C$ 称为闭的, 如果对任意的序列 $\{x_n\} \subset C$ 当 $x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$ 时, 则 $Tx = y$.

定义 1.1[10] 一映象 $T: C \to C$ 称为拟-ϕ 单调的, 如果 $F(T) \neq$ ƒ, $\phi(p, Tx) \leqslant \phi(p, x)$,

$\forall x \in C$ 而且 $p \in F(T)$.

引理 1.2[8] 设 E 是一光滑的一致凸的 Banach 空间. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 E 中的二序列, 使得 $\{x_n\}$ 或者 $\{y_n\}$ 是有界的. 如果 $\lim_{n\to\infty}\phi(x_n, y_n) = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$.

引理 1.3[10] 设 E 是一自反的、严格凸的光滑的 Banach 空间, C 是 E 之一闭凸子集, 而 $T: C \to C$ 是一拟-ϕ 非扩张映象. 则 $F(T)$ 是 C 之一闭凸子集.

为了求解广义混合平衡问题, 我们将假定函数 $\varphi: C \to \mathbf{R}$ 是凸下半连续的, 非线性映象 $A: C \to E^*$ 是连续单调的, 而且二元函数 $\Theta: C \times C \to \mathbf{R}$ 满足下面的条件:

(A_1) $\Theta(x, x) = 0$, $\forall x \in C$;

(A_2) Θ 是单调的, 即 $\Theta(x, y) + \Theta(y, x) \leqslant 0$, $\forall x, y \in C$;

(A_3) $\limsup_{t\downarrow 0}\Theta(x + t(z - x), y) \leqslant \Theta(x, y)$, $\forall x, y, z \in C$;

(A_4) 函数 $y \mapsto \Theta(x, y)$ 是凸的和下半连续的.

引理 1.4 设 E 是一光滑的、严格凸的自反的 Banach 空间, 而 C 是 E 之一非空的闭凸子集. 设 $\Theta: C \times C \to \mathbf{R}$ 是一满足条件(A_1)~(A_4)的二元函数. 设 $r > 0$ 且 $x \in E$, 则

1) 存在 $z \in C$ 使得[11]

$$\Theta(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, Jz - Jx\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C; \tag{10}$$

2) 定义一映象 $T_r: E \to C$ 如下[3]:

$$T_r(x) = \left\{z \in C: \Theta(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, Jz - Jx\rangle \geqslant 0, \forall y \in C\right\}, \qquad x \in E,$$

则下面的结论成立:

(a) T_r 是单值的;

(b) T_r 是一强的非扩张型映象, 即 $\forall z, y \in E$

$$\langle T_r z - T_r y, JT_r z - JT_r y\rangle \leqslant \langle T_r z - T_r y, Jz - Jy\rangle;$$

(c) $F(T_r) = \mathrm{EP}(\Theta) = \hat{F}(T_r)$;

(d) $\mathrm{EP}(\Theta)$ 是闭凸的;

(e) $\phi(q, T_r x) + \phi(T_r x, x) \leqslant \phi(q, x)$, $\forall q \in F(T_r)$

引理 1.5 设 E 是一光滑的、严格凸的自反的 Banach 空间, C 是 E 之一非空闭凸子集. 设 $A: C \to E^*$ 是一连续的单调映象, $\varphi: C \to \mathbf{R}$ 是一下半连续的凸函数, 而 $\Theta: C \times C \to \mathbf{R}$ 是一满足条件(A_1)~(A_4)的二变量的函数. 设 $r > 0$ 是任一给定的数, 而 $x \in E$ 是任一给定的点. 则

(Ⅰ) 存在 $u \in C$ 使得

$$\Theta(u, y) + \langle Au, y - u\rangle + \varphi(y) - \varphi(u) + \frac{1}{r}\langle y - u, Ju - Jx\rangle \geqslant 0,$$
$$\forall y \in C. \tag{11}$$

(Ⅱ) 如果我们定义一映象 $K_r: C \to C$ 如下:

$$K_r(x) = \{u \in C: \Theta(u, y) + \langle Au, y - u\rangle + \varphi(y) - \varphi(u) +$$
$$(1/r)\langle y - u, Ju - Jx\rangle \geqslant 0, \forall y \in C\}, \qquad x \in C, \tag{12}$$

则映象 K_r 具有下面的性质:

1) K_r 是单值的;

2) K_r 是一强非扩张型映象, 即

$$\langle K_r z - K_r y, JK_r z - JK_r y\rangle \leqslant \langle K_r z - K_r y, Jz - Jy\rangle, \qquad \forall z, y \in E;$$

3) $F(K_r) = \Omega = \hat{F}(K_r)$;

4) Ω 是 C 之一闭凸子集;

5) $\phi(p, K_r z) + \phi(K_r z, z) \leqslant \phi(p, x), \qquad \forall p \in F(K_r), z \in E.$ (13)

注 1.3 由引理 1.4 得知, 由(9) 式定义的映象 $K_r: C \to C$ 是相对非扩张的, 从而它是拟-ϕ- 非扩张的.

引理 1.6 设 E 是一一致凸的 Banach 空间, $r > 0$ 是一正数, 而且 $B_r(0)$ 是 E 之一闭球. 于是对任意给定的点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \subset B_r(0)$ 及对任意给点的正数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$ 使得 $\sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$, 则存在一连续的、严格增的凸函数 $g: [0, 2r) \to [0, \infty)$, $g(0) = 0$ 使得对任意的 $i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $i < j$,

$$\left\|\sum_{n=1}^N \lambda_n x_n\right\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^N \lambda_n \|x_n\|^2 - \lambda_i \lambda_j g(\|x_i - x_j\|). \tag{14}$$

证明

1) 当 $N = 2$ 时, 结论由文献[12] 的定理 2 可得;

2) 假设引理 1.6 的结论对 $N-1$, $N \geqslant 3$ 成立. 现在我们证明引理 1.6 的结论对 N 也成立. 事实上, 对任意的 $i, j \in 1, 2, \cdots, N$, $i < j$, 及对任意的 $k \neq i$ 和 $k \neq j$, 令 $\sigma_k = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k-1} + \lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_N$, 则有

$$\left\|\lambda_k x_k + \sum_{n\neq k}^N \lambda_n x_n\right\|^2 = \left\|\lambda_k x_k + \sigma_k \sum_{n\neq k}^N \frac{\lambda_n x_n}{\sigma_k}\right\|^2 \leqslant \lambda_k \|x_k\|^2 + \sigma_k \left\|\sum_{n\neq k}^N \frac{\lambda_n x_n}{\sigma_k}\right\|^2, \tag{15}$$

因 $\sum_{n\neq k}^N (\lambda_n / \sigma_k) = 1$, 于是, 由归纳法的假定, 对给定的 i, j 我们有

$$\sigma_k \left\|\sum_{n\neq k}^N \frac{\lambda_n x_n}{\sigma_k}\right\|^2 \leqslant \sum_{n\neq k}^N \lambda_n \|x_n\|^2 - \lambda_i \lambda_j g(\|x_i - x_j\|). \tag{16}$$

把(16) 式代入(15) 式, 引理 1.6 的结论得证.

2 主要结果

在本节中, 我们使用综合性方法, 证明了一个强收敛定理, 借以寻求 Banach 空间中的广义混合平衡问题(1) 的解集与一有限族拟-ϕ- 非扩张映象的公共不动点集中的一公共元.

定理 2.1 设 E 是一致光滑的一致凸的 Banach 空间, C 是 E 之一非空的闭凸子集. 设 $A: C \to E^*$ 是一连续的单调映象, $\psi: C \to \mathbf{R}$ 是一下半连续的凸泛函, 而 $\Theta: C \times C \to \mathbf{R}$ 是一满足条件$(A_1) \sim (A_4)$ 的二元函数. 设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_N\}$ 是一有限族的由 C 到 C 的闭的拟-ϕ- 非扩张映象, 且 $G := \bigcap_{n=1}^N F(S_i) \cap \Omega \neq \varnothing$, 其中 Ω 是问题(1) 的解集. 设 $\{x_n\}$ 是由下面的式子生成的序列:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \quad C_0 = C; \\ y_n = J^{-1}\left(\alpha_{n0} J x_n + \displaystyle\sum_{i=1}^N \alpha_{ni} J S_i x_n\right), \qquad u_n \in C \text{ 使得} \\ \Theta(u_n, y) + \langle A u_n, y - u_n\rangle + \psi(y) - \psi(u_n) + \\ \qquad \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, J u_n - J y_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \phi(v, u_n) \leqslant \phi(v, x_n)\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0, \qquad \forall n \geqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

其中$J: E \to E^*$是正规对偶映象,$\{\alpha_{ni}\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$是$[0, 1]$中的$N+1$个序列且满足下面的条件:

(a) $\alpha_{n0} + \alpha_{n1} + \cdots + \alpha_{nN} = 1, \quad \forall n \geqslant 0$;

(b) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n0} \cdot \alpha_{ni} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$.

则$\{x_n\}$强收敛于$\Pi_{\bigcap_{i=1}^N F(S_i) \cap \Omega} x_0$, 其中$\Pi_{\bigcap_{i=1}^N F(S_i) \cap \Omega}$是由$E$到$\bigcap_{i=1}^N (S_i) \cap \Omega$上的广义投影.

证明　首先, 我们定义两映象$H: C \times C \to \mathbf{R}$和$K_r: C \to C$如下:

$$H(x, y) = \Theta(x, y) + \langle Ax, y - x\rangle + \varphi(y) - \varphi(x), \qquad x, y \in C \tag{18}$$

和

$$K_r(x) = \left\{u \in C: H(u, y) + \frac{1}{r}\langle y - u, Ju - Jx\rangle \geqslant 0,\ \forall y \in C\right\}, \quad x \in C. \tag{19}$$

由引理 1.5 知, 映象H满足条件$(A_1) \sim (A_4)$而且K_r具有引理 1.5 中所给出的性质 1) ~ 5). 因而(17)式等价于下面的(20)式:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \ C_0 = C; \\ y_n = J^{-1}\left(\sum_{i=0}^N \alpha_{ni} J S_i x_n\right), \qquad u_n \in C, \text{使得} \\ H(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, Ju_n - Jy_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C, \\ C_{n+1} = \left\{v \in C_n: \phi(v, u_n) \leqslant \phi(v, x_n)\right\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0, \qquad \forall n \geqslant 0, \end{cases} \tag{20}$$

其中$S_0 = I$(恒等映象).

(Ⅰ) 易于证明, 对每一$n \geqslant 0$, C_n是C之一闭凸子集.

(Ⅱ) 下面我们证明$G := \bigcap_{n=1}^N F(S_i) \cap \Omega \subset C_n, \ \forall n \geqslant 0$.

事实上, 显然$G \subset C_0 = C$. 假设对某一$k \in \mathbf{N}$, $G \subset C_k$. 因为$u_k = K_{r_k} y_k$, 另由引理 1.5 及注 1.4, 我们知道K_{r_k}是拟-ϕ非扩张的. 于是对任意给定的$u \in G \subset C_k$, 由引理 1.6, 对任意的$m, j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $m < j$, 我们有

$$\begin{aligned} &\phi(u, u_k) = \phi(u, K_{r_k} y_k) \leqslant \phi(u, y_k) \leqslant \\ &\quad \|u\|^2 - \sum_{i=0}^N \alpha_{ki} 2\langle u, JS_i x_k\rangle + \sum_{i=0}^N \alpha_{ki} \|JS_i x_k\|^2 - \\ &\quad \alpha_{km}\alpha_{kj} g(\|JS_m x_k - JS_j x_k\|) (\text{由引理 } 1.6) \leqslant \\ &\quad \sum_{i=0}^N \alpha_{ki}\left\{\|u\|^2 - 2\langle u, JS_i x_k\rangle + \|S_i x_k\|^2\right\} - \\ &\quad \alpha_{km}\alpha_{kj} g(\|JS_m x_k - JS_j x_k\|) = \\ &\quad \phi(u, x_k) - \alpha_{km}\alpha_{kj} g(\|JS_m x_k - JS_j x_k\|). \end{aligned} \tag{21}$$

上述表明$u \in C_{k+1}$, 从而$G \subset C_n, \ \forall n \geqslant 0$.

(Ⅲ) 现在我们证明$\{x_n\}$和$\{S_i x_n, i = 1, 2, \ldots, N\}$均为有界的.

由C_n的定义, 我们有$x_n = \Pi_{C_n} x_0, \ \forall n \geqslant 0$. 于是由引理 1.1 的 1) 得知

$$\phi(x_n, x_0) = \phi(\Pi_{C_n} x_0, x_0) \leqslant \phi(u, x_0) - \phi(u, \Pi_{C_n} x_0) \leqslant \phi(u, x_0), \quad \forall n \geqslant 0, \ \forall u \in F. \tag{22}$$

这就表明$\{\phi(x_n, x_0)\}$是有界的. 由(8)式知$\{x_n\}$也是有界的. 因对每一$u \in G$及对每一$i = 1, 2, \cdots, N$, $\phi(u, S_i x_n) \leqslant \phi(u, x_n)$, 从而$\{S_i x_n\}$在$C$中也是有界的. 记

$$M = \sup_{n \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, N} \{\|x_n\|, \|S_i x_n\|\}.$$

(Ⅳ) 现在我们证明$\{x_n\}$是一Cauchy列, 而且

$$\|x_n - S_i x_n\| \to 0, \text{ 对每一 } i = 1, 2, \cdots, N.$$

因为$x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0 \in C_n$和$x_n = \Pi_{C_n} x_0$, 于是由$\Pi_{C_n}$的定义, 有

$$\phi(x_n, x_0) \leqslant \phi(x_{n+1}, x_0), \qquad \forall n \geqslant 0,$$

故$\{\phi(x_n, x_0)\}$是不减的和有界的, 从而极限$\lim_{n\to\infty}\phi(x_n, x_0)$存在. 由引理1.1的1), 对任意给定的$m \in \mathbf{N}$我们有

$$\phi(x_{n+m}, x_n) = \phi(x_{n+m}, \Pi_{C_n} x_0) \leqslant \phi(x_{n+m}, x_0) - \phi(\Pi_{C_n} x_0, x_0) = \phi(x_{n+m}, x_0) - \phi(x_n, x_0), \qquad \forall n \geqslant 0.$$

这就推出

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+m}, x_n) = 0, \qquad \forall m \geqslant 1.$$

由引理1.2

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+m} - x_n\| = 0, \qquad \forall m \in \mathbf{N}. \tag{23}$$

上式表明$\{x_n\}$是C中之一Cauchy序列. 不失一般性, 可设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \in C. \tag{24}$$

因为$x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0 \in C_n$, 故由$C_{n+1}$的定义, 我们有

$$\phi(x_{n+1}, u_n) \leqslant \phi(x_{n+1}, x_n), \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{25}$$

因为E是一致光滑的和一致凸的, 由(23)~(25)式及引理1.2我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - u_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0, \tag{26}$$

在(21)式中取$m = 0$, $j = 1, 2, \cdots, N$, 于是对任意的$u \in G$, 我们有

$$\phi(u, u_n) \leqslant \phi(u, x_n) - \alpha_{n0}\alpha_{nj}\, g(\|Jx_n - JS_j x_n\|), \qquad \forall n \geqslant 0$$

即

$$\alpha_{n0}\alpha_{nj}\, g(\|Jx_n - JS_j x_n\|) \leqslant \phi(u, x_n) - \phi(u, u_n). \tag{27}$$

因为

$$\begin{aligned}\phi(u, x_n) - \phi(u, u_n) &= \|x_n\|^2 - \|u_n\|^2 - 2\langle u, Jx_n - Ju_n\rangle \leqslant \\ &\big|\,\|x_n\|^2 - \|u_n\|^2\big| + 2\|u\| \cdot \|Jx_n - Ju_n\| \leqslant \\ &\|x_n - u_n\|(\|x_n\| + \|u_n\|) + 2\|u\| \cdot \|Jx_n - Ju_n\|,\end{aligned} \tag{28}$$

由(26)式得知$\phi(u, x_n) - \phi(u, u_n) \to 0\ (n \to \infty)$. 故由(27)式及条件(b), 得知$g(\|Jx_n - JS_j x_n\|) \to 0$ (当$n \to \infty$). 因为g是连续的、严格增的且$g(0) = 0$, 而且J在E的任一有界子集上是一致连续的, 于是有

$$\|x_n - S_j x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)\ \forall j = 1, 2, \cdots, N. \tag{29}$$

结论(Ⅳ)被证明.

(Ⅴ) 现在我们证明$p \in G := \bigcap_{i=1}^N F(S_i) \cap \Omega$.

首先我们证明$p \in \bigcap_{i=1}^N F(S_i)$. 事实上, 由假定, 对每一$j = 1, 2, \cdots, N$, S_j是闭的, 故由(29)式和(24)式得知$p = S_j p$, $\forall j = 1, 2, \cdots, N$, 即$p \in \bigcap_{i=1}^N F(S_i)$.

下面我们证明 $p \in \Omega$. 事实上, 因 $x_n \to p$, 故由(26) 式知 $u_n \to p$. 又因 $u_n = K_{r_n} y_n$, 故由(13) 式、(21) 式和(28) 式有

$$\begin{aligned}\phi(u_n, y_n) = \phi(K_{r_n} y_n, y_n) &\leqslant \phi(u, y_n) - \phi(u, K_{r_n} y_n) \leqslant \\ &\phi(u, x_n) - \phi(u, K_{r_n} y_n) = \phi(u, x_n) - \phi(u, u_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).\end{aligned} \tag{30}$$

这就表明 $\|u_n - y_n\| \to 0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}\|Ju_n - Jy_n\| = 0$. 由假定 $r_n \geqslant a$, $\forall n \geqslant 0$, 故有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Ju_n - Jy_n\|}{r_n} = 0. \tag{31}$$

又因

$$H(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, Ju_n - Jy_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C,$$

由条件(A_1) 我们有

$$\frac{1}{r_n}\langle y - u_n, Ju_n - Jy_n\rangle \geqslant - H(u_n, y) \geqslant H(y, u_n), \qquad \forall y \in C. \tag{32}$$

由假定映象 $y \mapsto H(x, y)$ 是凸下半连续的, 在(32) 式中让 $n \to \infty$, 由(31) 式和(32) 式得知

$$H(y, p) \leqslant 0, \qquad \forall y \in C.$$

对 $t \in (0, 1]$ 及 $y \in C$, 令 $y_t = ty + (1 - t)p$, 则 $y_t \in C$ 且 $H(y_t, p) \leqslant 0$. 由条件(A_1) 和(A_4), 我们有

$$0 = H(y_t, y_t) \leqslant tH(y_t, y) + (1 - t)H(y_t, p) \leqslant tH(y_t, y).$$

两端除以 t, 我们有 $H(y_t, y) \geqslant 0$, $\forall y \in C$. 令 $t \downarrow 0$, 由条件(A_3), 得知 $H(p, y) \geqslant 0$, $\forall y \in C$, 即 $p \in \Omega$, 从而 $p \in \bigcap_{i=0}^{N} F(S_i) \cap \Omega$.

(Ⅵ) 现在我们证明 $x_n \to \Pi_{\bigcap_{i=0}^{N} F(S_i) \cap \Omega} x_0$.

令 $w = \Pi_{\bigcap_{i=0}^{N} F(S_i) \cap \Omega} x_0$. 由 $w \in \bigcap_{i=0}^{N} F(S_i) \cap \Omega \subset C_{n+1}$, 及 $x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0$, 我们有

$$\phi(x_{n+1}, x_0) \leqslant \phi(w, x_0), \qquad \forall n \geqslant 0.$$

这就推出

$$\phi(p, x_0) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n, x_0) \leqslant \phi(w, x_0). \tag{33}$$

由 $\Pi_{\bigcap_{i=0}^{N} F(S_i) \cap \Omega} x_0$ 的定义及(33) 式, 我们有 $p = w$. 故 $x_n \to \Pi_{\bigcap_{i=0}^{N} F(S_i) \cap \Omega} x_0$.

这就完成定理 2.1 的证明.

在定理 2.1 中令 $A = 0$, 则 $\Omega = \mathrm{MEP}$. 于是下面的推论由定理 2.1 直接可得:

推论 2.2 设 E, C, ψ, Θ, $\{S_i\}$, $\{\alpha_{ni}\}$, $\{r_n\}$ 与定理 2.1 中的相同. 如果 $\bigcap_{i=}^{\infty} F(S_i) \cap \mathrm{MEP} \neq \emptyset$, 其中 MEP 是混合平衡问题(2) 的解集. 设 $\{x_n\}$ 由下面的式子生成的序列:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \quad C_0 = C; \\ y_n = J^{-1}\left(\alpha_{n0} J x_n + \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ni} J S_i x_n\right), \qquad u_n \in C, \text{使得}, \\ \Theta(u_n, y) + \psi(y) - \psi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, Ju_n - Jy_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \phi(v, u_n) \leqslant \phi(v, x_n)\}; \quad x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0, \qquad \forall n \geqslant 0, \end{cases} \tag{34}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\Pi_{\bigcap_{i=1}^{N} F(S_i) \cap \mathrm{MEP}}\, x_0$.

3 对最优化问题的应用

在本节中, 我们将利用在第 2 节中所介绍的结果, 研究下面的最优化问题:

$$\min_{x \in C}(h(x) + \phi(x)), \tag{35}$$

其中 C 是Hilbert空间 H 中的一非空闭凸子集, $h, \phi: C \to \mathbf{R}$ 是二凸下半连续函数. $K \subset C$ 表示问题(35) 的解集. 易知 K 是 C 中的闭凸子集. 设 $\Theta: C \times C \to \mathbf{R}$ 是由 $\Theta(x, y) = h(y) - h(x)$ 定义的二元函数. 我们考察下面的混合平衡问题: 求一 $x^* \in C$ 使得

$$\Theta(x^*, y) + \phi(y) - \phi(x^*) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{36}$$

易知 Θ 满足第一节中的条件(A_1) ~ (A_4), 而且 MEP = K, 其中 MEP 是混合平衡问题(36) 的解集. 设 $\{x_n\}$ 是由下式生成的迭代序列

$$\begin{cases} x_0 \in C, \quad C_0 = C; \qquad u_n \in C, \text{使得}, \\ \Theta(u_n, y) + \phi(y) - \phi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C, \\ C_{n+1} = \left\{v \in C_n: \|v - u_n\| \leqslant \|v - x_n\|\right\}; \ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \qquad \forall n \geqslant 0, \end{cases} \tag{37}$$

其中 P_C 是由 H 到 C 上的投影算子, $\{r_n\}$ 是 $[a, \infty)$ 中的序列, 而 $a > 0$ 是某一正数, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_K x_0$.

致谢 作者对审稿人的宝贵意见表示衷心感谢; 对宜宾学院自然科学基金(2009Z003)的资助表示感谢.

[参 考 文 献]

[1] CENG Lu-chuan, YAO Jen-chih. A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems[J]. J Comput Appl Math, 2008, **214**(1): 186-201.

[2] Browder F E. Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities[J]. Proc Natl Acad Sci USA, 1966, **56**(4): 1080-1086.

[3] Takahashi W, Zembayashi K. Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2009, **70**(1): 45-57.

[4] Takahashi S, Takahashi W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007, **331**(1): 506-515.

[5] Qin X L, Shang M, Su Y. A general iterative method for equilibrium problem and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. Nonlinear Anal, 2008, **69**(11): 3897-3909.

[6] Cioranescu I. Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems[M]. Dordrecht: Kluwer, 1990.

[7] Alber Y I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications [A]. In: Kartosator A G, Ed. Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type[C]. New York: Marcel Dekker, 1996, 15-50.

[8] Kamimura S, Takahashi W. Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space[J]. SIAM J Optim, 2002, **13**(3): 938-945.

[9] Matsushita S, Takahashi W. Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2004, **2004**(1): 37-47.

[10] Nilsrakoo W, Saejung S. Strong convergence to common fixed points of countable relatively quasi-nonexpansive mappings[J]. Fixed Point Theory Appl, 2008, **2008**: Article ID 312454, doi: 10.1155/2008/312454.

[11] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Studient, 1994, **63**(1/4): 123-145.

[12] Xu H K. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Anal, 1991, **16**(2): 1127-1138.

On the Generalized Mixed Equilibrium Problem in Banach Spaces

ZHANG Shi-sheng
(Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P. R. China)

Abstract: The purpose is by using hybrid algorithm to find a common element of the set of solutions for a generalized mixed equilibrium problem, the set of solutions for variational inequality problem and the set of common fixed points for a finite family of quasi-ϕ-nonexpansive mappings in a uniformly smooth and strictly convex Banach space. By utilizing the results for the study of optimization problem, it shows that the results improve and extend the corresponding results announced recently by many others such as Ceng, Takahashi, Qin, et al.

Key words: generalized mixed equilibrium problem; mixed equilibrium problem; equilibrium problem; variational inequality; quasi-ϕ-nonexpansive mapping; maximal monotone operator; monotone mapping