

# 饱和的多孔介质中含夹杂时的 磁流体动力学自然对流\*

F·G·什哈德, H·M·杜外瑞

(约旦大学 工程技术学院 机械工程系, 约旦)

(周哲玮推荐)

摘要: 在一个多孔介质中含倾斜矩形夹杂物时, 数值地研究磁流体动力学自然对流热交换问题. 矩形夹杂的边界条件为两个绝热壁和两个等温壁. 使用适当的变量集, 将控制方程: 连续性条件、推广的 Darcy 定理——Förchheimer 律、能量方程变换为无量纲形式, 然后使用有限差分格式求解. 磁效应数、Darcy-Rayleigh 数、矩形夹杂物的倾斜角以及纵横比作为控制参数. 得到多孔介质中含矩形夹杂物时, 磁效应数和倾斜角参数影响流体流动和热交换的规律.

关键词: 磁流体动力学; 自然对流; 多孔介质; 有限差分格式

中图分类号: O361.3 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.005

## 符号说明

$u$	$x$ 方向速度(m/s)	$c_p$	常压下比热(kJ/kg·K)
$v$	$y$ 方向速度(m/s)	$Fr$	Förchheimer 数
$T_C$	冷壁温度(K)	$Ha^2$	磁效应数
$T_H$	热壁温度(K)	$Ra_W$	Darcy-Rayleigh 数
$B_0$	磁场强度(Wb/m <sup>2</sup> )	$A$	矩形夹杂纵横比
$g$	重力加速度(m/s <sup>2</sup> )	$\phi$	矩形夹杂倾斜角(°)
$K$	渗透率(m <sup>2</sup> )	$\mu$	绝对粘度(kg/m·s)
$C_F$	Förchheimer 常数	$\rho$	流体密度(kg/m <sup>3</sup> )
$P$	压力(Pa)	$\beta$	热膨胀系数(K <sup>-1</sup> )
$T$	温度(K)	$\phi$	流函数
$W$	$x$ 方向长度(m)	$\Psi$	无量纲流函数
$H$	$y$ 方向长度(m)	$\alpha_a$	热扩散系数(m <sup>2</sup> /s)
$k_a$	多孔介质和流体的导热率(W/m·K)	$\nu$	运动粘度(m <sup>2</sup> /s)

## 引 言

均质流体通过多孔介质的流动, 在应用科学的很多分支中都有广泛的应用, 例如大体积多

\* 收稿日期: 2009-03-25; 修订日期: 2009-07-05

作者简介: H.M. Duwairi, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 962-653-55000; E-mail: duwairi@ju.edu.jo).

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校.

孔岩石的储水, 油的大量补给, 其它如冻胀、渗透或过滤、沙层中的污水净化等. 磁流体动力学 (MHD) 研究导电流体及其在磁场中的运动, 它是流体动力学中相对较新的并且是非常重要的分支. 当导电流体, 例如汞, 通过磁场运动时, 生成的感应电流与磁场相互作用, 产生了作用于流体的体力. 因此, 多孔介质中磁流体动力学流动的研究, 对于核反应堆非常重要, MHD 的作用既危险又重要.

Henoch 和 Meng<sup>[1]</sup> 利用磁力阻滞转换为湍流边界层并简化了 Darcy 摩擦力. 很多作者研究了磁场对混合的、自然的和强迫的对流热交换问题的影响. Sparrow 和 Cess<sup>[2]</sup> 讨论了浮力和感应磁力共同作用下的自然对流热交换, 就等温竖直板的层流边界层流动进行了分析. Jha<sup>[3]</sup> 就两平行板 (一板作脉冲运动) 间导电流体的 Couett 流动, 讨论了自然对流和均匀横向磁场组合作用的影响. Hassain<sup>[4]</sup> 就横向均匀磁场中, 黏性不可压缩流体流经半无限大板 (温度随到前沿的距离呈线性变化) 时, 研究了流体黏性和 Joule 传热对导电流体的影响. 流动的控制方程采用 Newton 线性化逼近方式的有限差分法数值地求解. Aldoss 等<sup>[5]</sup> 就均匀磁场作用下, 一竖直板嵌入饱和和多孔介质中时, 研究了混合对流热交换的组合影响. 他们发现, 磁场强度增大时, 混合对流区中的局部 Nusselt 数将减小.

近年来, Duwairi 和 Damsch<sup>[6]</sup> 就辐射状的竖直多孔界面, 研究了磁流体动力学自然对流热交换的影响, 得到了求解该问题 (沿流线方向坐标抽吸或喷射流体) 的非相似参数, 还得到, 当磁场强度增大时, 边界层内的流动速度和热交换率将减小. Duwairi 等<sup>[7]</sup> 就一个表面热流量恒定的板, 研究了 MHD 和热辐射的相互作用. 他们发现, 导电流体中流动速度和热交换率, 随着磁力的增大而减小. Duwairi 和 Al-Kablawi<sup>[8]</sup> 就竖直表面嵌入饱和和多孔介质的情况, 导出了磁流体动力学和耦合热交换问外的计算公式, 完成了包括磁流体动力学传统的混合对流问题传导参数的推导. Oztop<sup>[9]</sup> 就饱和多孔介质内含倾斜矩形夹杂部分冷却时, 对自然对流热交换的影响进行了研究. 上述工作就普通介质或多孔介质, 研究了磁流体动力学外部流动的影响, 少数研究还注意到内部流动的热交换问题, 用于解决各种管道内部压力梯度的问题.

本文研究多孔介质中含矩形夹杂时, 磁流体动力学自然对流热交换问题, 给出了控制方程: 连续性条件、推广的 Darcy 定理——Forchheimer 律、能量方程, 使用一个适当的变量集, 将它们变换为无量纲形式, 然后利用有限差分格式求解. 给出流线、无量纲温度和局部 Nusselt 数的变化图形. 矩形夹杂的两壁面是绝热的, 另外两壁面是等温的. 找到了用于讨论本问题的 3 个参数, 即多孔饱和介质中矩形夹杂的浮力参数、倾斜角参数和磁效应参数.

## 1 数学描述和分析

考虑问题的几何模型为: 在一个充满流体的多孔介质中, 内含一倾斜的矩形夹杂物, 见图 1. 矩形夹杂的一个面壁保持均匀的高温, 其对立面壁保持均匀的低温, 另外两面壁绝热, 即假设没有热传入或传出壁面. 控制方程为

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$x$  和  $y$  方向的动量方程

$$\frac{\mu u}{K} + \frac{\rho C_F}{\sqrt{K}} u^2 + \frac{\mathcal{G}^2 \alpha_c}{K} u = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mathcal{G} \beta (T - T_C) \cos \phi, \quad (2)$$

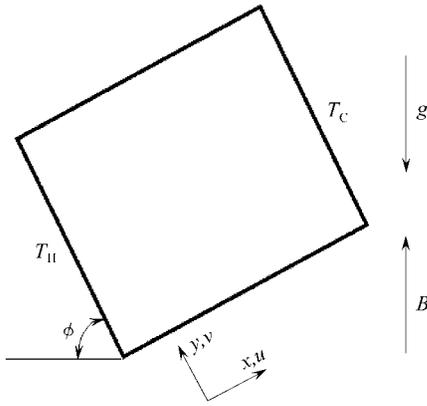


图1 物理模型和坐标系示意图

$$\frac{\mu_v}{K} + \frac{\rho C_F}{\sqrt{K}} v^2 + \frac{\sigma B_0^2}{K} v = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \beta (T - T_C) \sin \phi; \quad (3)$$

能量方程

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad (4)$$

其中  $x$  和  $y$  分别为横坐标和纵坐标, 其对应的速度分别为  $u$  和  $v$ ;  $g$  为重力加速度, 竖直向下作用. 在  $x$  和  $y$  方向的动量方程中, 项  $(\mu_u/K)$  和  $(\mu_v/K)$  表示 Darcy 效应, Forchheimer 项  $(\rho C_F u^2/\sqrt{K})$  和  $(\rho C_F v^2/\sqrt{K})$  表示非 Darcy 效应, 项  $(\sigma B_0^2 u/K)$  和  $(\sigma B_0^2 v/K)$  表示磁效应, 项  $(\rho g \beta (T - T_C) \cos \phi)$  和  $(\rho g \beta (T -$

$T_C) \sin \phi)$  表示对流热交换效应. 矩形夹杂上流体流动的边界条件为

$$\begin{cases} T = T_H, & x = 0, \\ T = T_C, & x = W, \\ \partial T / \partial y = 0, & y = 0, y = H, \\ u = 0, & x = 0, x = W, \\ v = 0, & y = 0, y = H. \end{cases} \quad (5)$$

我们可得到流函数表示的解. 流函数定义为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (6)$$

在讨论上述方程组的解之前, 应将它们写为无量纲形式. 为此引入如下无量纲变量:

$$X = \frac{x}{W}, \quad Y = \frac{y}{W}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\alpha_a}, \quad \theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}. \quad (7)$$

利用无量纲流函数, 连续方程、动量方程、能量方程表示为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y \partial X} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + 2Fr \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + Ha^2 \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \cos \phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \sin \phi \right] = Ra_w \left[ \frac{\partial \theta}{\partial Y} \cos \phi - \frac{\partial \theta}{\partial X} \sin \phi \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}, \quad (10)$$

$$Ra_w = \frac{K g \beta (T_H - T_C)}{\alpha_a \nu}, \quad Fr = \frac{C_F \alpha_a}{W}, \quad Ha^2 = \frac{K \sigma B_0^2}{\mu}, \quad (11)$$

其中  $Ra_w$  是对应于矩形夹杂宽度  $W$  的 Darcy-Rayleigh 数,  $Fr$  为对应于矩形夹杂宽度  $W$  的 Forchheimer 数,  $Ha^2$  为磁效应数. 利用式(7)中的无量纲变量, 边界条件可写为

$$\begin{cases} \theta = 1, & X = 0, \\ \theta = 0, & X = 1, \\ \partial \theta / \partial Y = 0, & Y = 0, Y = A, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $A = H/W$ , 称为矩形夹杂纵横比.

$$\Psi = 0, \quad \text{在所有壁面上.} \quad (13)$$

我们利用有限差分数值方法求解控制方程(9)和(10)及其对应的边界条件(12)和(13). 先在各节点上对所有变量进行迭代, 然后利用控制方程得出修正值, 重复这一过程, 直到收敛. 为了验证数值结果的精度, 与 Oosthuizen 和 Naylor<sup>[10]</sup> 没有磁场强度作用时的结果进行了比较, 见表1. 显然两种结果完全吻合.

表1 数值结果与文献[10]结果的比较

$\phi/(\circ)$	$Nu$ (文献[10])	$Nu$ (本文)
0	1	1
30	2.75	2.745 0
90	2.5	2.508 4
180	1	1

## 2 结果和讨论

数值研究了多孔介质内部含倾斜矩形夹杂物时, 定常、层状对流热交换问题, 并以磁效应数  $Ha^2$ 、Darcy-Rayleigh 数  $Ra_w$ 、矩形夹杂物的倾角  $\phi$  和纵横比  $A$  作为控制参数. 矩形夹杂物的左面壁为热壁, 右面壁为冷壁, 另两面壁为绝热壁. 利用有限差分格式求解动量方程和能量方程. 绘制了无量纲流线和等温线图, 从而得到上述不同参数时的流动特征和温度场. 同时, 绘制了 Nusselt 数和无量纲中心流线图.

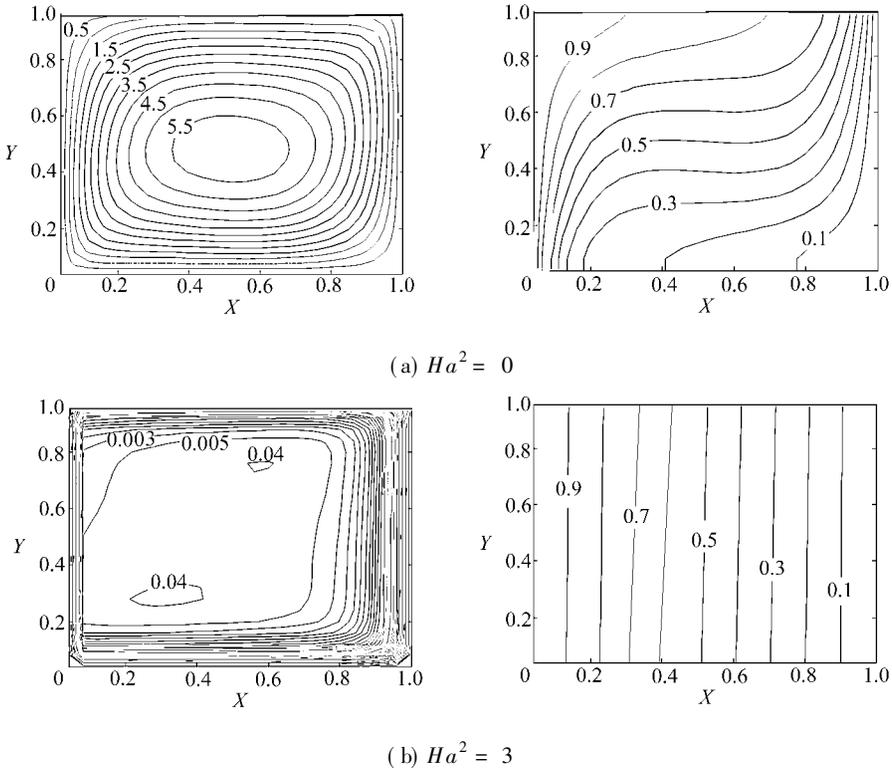


图2 典型的无量纲流线和无量纲等温线图 ( $\phi = 30^\circ, A = 1, Fr = 0.01, Ra_w = 100$ )

## 2.1 磁流体动力学的影响

在动量方程(9)中取  $\phi = 30^\circ$ ,  $A = 1$ ,  $Fr = 0.01$ , 采用不同的磁效应数  $Ha^2$  研究磁流体动力学的影响. 图2示出磁效应数对无量纲流线和等温线的影响. 热流体沿左面的热壁面上升, 同时, 沿右面的冷壁下降(参见流体等温线图). 当  $Ha^2 = 0$  时, 较热的流体沿左面壁向上升, 同时, 由于重力浮力的作用使较冷的流体沿右面壁迅速下降, 形成顺时针方向的流动. 若  $Ha^2$  增大, 由于磁力效应大了, 沿左面壁流动的热流体的无量纲流函数值将大于沿右面壁流动的冷流体的无量纲流函数值. 另一方面, 在矩形夹杂中部的流体有两个流动循环, 与沿壁面的流动相比, 有更大的流函数值. 这是由于磁效应作用与通常的重力对流效应作用刚好相反的缘故.

图3示出平均 Nusselt 数  $Nu_m$  随磁效应数  $Ha^2$  变化的关系. 可以看出, 由于沿左面的上半区域和沿右面的下半区域中无量纲温度的降低, 平均 Nusselt 数随磁效应数的增大而减小.

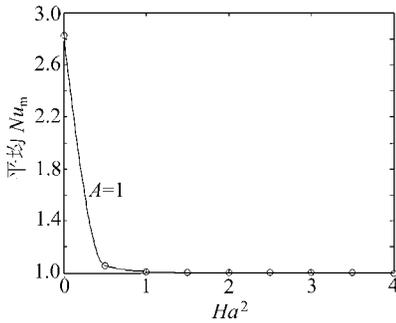


图3 矩形夹杂  $Nu_m$  随  $Ha^2$  的变化

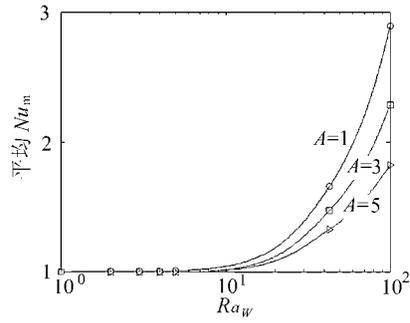


图4 对不同的  $A$  值  $Nu_m$  随  $Ra_w$  的变化

## 2.2 Darcy-Rayleigh 数的影响

平均 Nusselt 数随  $Ra_w$  的变化示于图4. 可以看出, 当 Darcy-Rayleigh 数小时, 平均 Nusselt 数为 1, 与纯传热的极限情况相对应, 然后增大, 在  $Ra_w = 100$  时达到极大值.

## 2.3 矩形夹杂倾斜角的影响

为了说明倾斜角的影响, 对矩形夹杂  $0^\circ \sim 180^\circ$  倾斜角时的流体进行计算. 求得  $Ra_w = 100$ ,  $A = 1$ ,  $Ha^2 = 0.02$ ,  $Fr = 0.01$  时的数值结果. 图5示出当其他参数不变时, 矩形夹杂倾斜角对无量纲流线和等温线的影响. 当  $\phi = 0^\circ$  时, 由于浮力的作用, 较热流体沿矩形夹杂左面壁向下降, 较冷流体沿矩形夹杂右面壁向上升, 形成逆时针流动. 而当  $\phi = 30^\circ$  以及  $\phi = 90^\circ$  时, 热流体沿矩形夹杂左面壁向上升, 冷流体沿矩形夹杂右面壁向下降, 形成顺时针流动. 当  $\phi = 30^\circ$  时, 与其他  $\phi$  值时相比, 流体流动有最大的无量纲流函数值. 当  $\phi = 180^\circ$  时, 磁力的大小对热交换率没有影响, 是一个通常的热传导问题.

图6、7分别示出不同  $Ha^2$  和  $Ra_w$  时, 平均 Nusselt 数  $Nu_m$  和无量纲中心流函数  $\Psi_c$  与矩形夹杂倾斜角  $\phi$  之间的关系. 可以看到,  $\phi = 30^\circ$  时, 平均 Nusselt 数和无量纲中心流函数有极大值. 同时, 无量纲中心流函数随磁效应数的增大而减小, 而随 Darcy-Rayleigh 数的增大而增大.

## 2.4 矩形夹杂纵横比的影响

图4还示出矩形夹杂纵横比对无量纲流线的影晌. 可以看到,  $A = 1$  时, 流体环绕矩形夹杂中心旋转, 形成1个循环流动. 在  $A = 3, 5$  时, 流体分别出现2个和4个循环流动, 不再环绕矩形夹杂中心旋转.

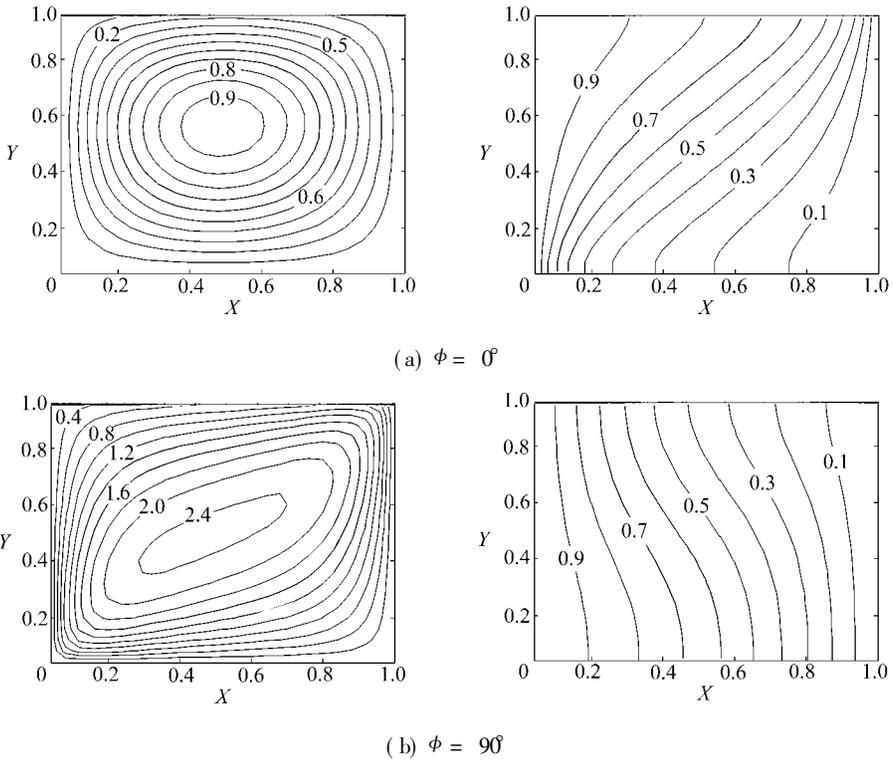


图5 不同矩形夹杂倾斜角时,典型的无量纲流线和无量纲等温线  
( $Ra_w = 100, A = 1, Fr = 0.01, Ha^2 = 0.02$ )

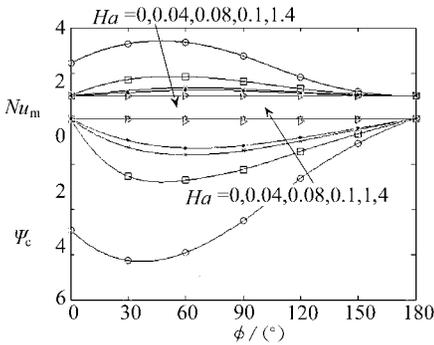


图6 不同  $Ha^2$  时,平均 Nusselt 数和无量纲中心流函数随矩形夹杂倾角的变化

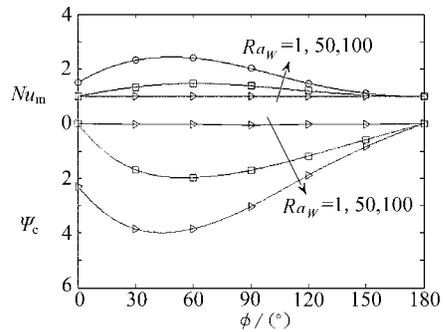


图7 不同  $Ra_w$  时,平均 Nusselt 数和无量纲中心流函数随矩形夹杂倾角的变化

### 3 结 论

本文对多孔介质中含倾斜矩形夹杂时,磁流体动力学自然对流热交换时的流场和热交换特性进行了数值分析.由前面的分析结果可得到以下结论:

- 1) 热交换系数和流体流动速度随磁效应数的增大而减小;
- 2) 当 Darcy 数小时,磁力的大小对热交换率只有很小的影响,热交换率和流体流动速度随 Darcy-Rayleigh 数的增大而增大;
- 3)  $\phi = 30^\circ$  时,热交换率最大;

4) 热交换率随矩形夹杂纵横比的增大而减小.

### [参 考 文 献]

- [1] Henoeh C W, Meng J C S. Magneto hydrodynamic turbulent boundary layer control using external current surface poles[J]. ASME, 1991, **5**(3): 115-121.
- [2] Sparrow E M, Cess R D. The effect of magnetic field on free convection heat transfer[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1961, **3**(4): 267-274.
- [3] Jha B K. Natural convection in unsteady MHD Couette flow[J]. Heat and Mass Transfer, 2001, **37** (4/5): 329-331.
- [4] Hossain M A. Viscous and Joule heating effects on MHD-free convection flow with variable plate temperature[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1992, **35**(12): 3485-3487.
- [5] Aldoss T K, Al-Namir M A, Jarrah M A, et al. Magneto hydrodynamic mixed convection from a vertical plate embedded in a porous medium[J]. Numerical Heat Transfer, Part A, 1995, **28**(5): 635-645.
- [6] Duwairi H M, Damseh Rebhi A. Magneto hydrodynamic natural convection heat transfer from radiate vertical porous surfaces[J]. Heat and Mass Transfer, 2004, **40**(10): 787-792.
- [7] Duwairi H M, Duwairi R M. Thermal radiation effects on MHD-Rayleigh flow with constant surface heat flux[J]. Heat and Mass Transfer, 2004, **41**(1): 51-57.
- [8] Duwairi H M, Al-Kablawi Y. MHD-conjugate mixed convection heat transfer over a vertical hollow cylinder embedded in a porous medium[J]. Int J Heat and Technology, 2006, **24**(1): 123-128.
- [9] Öztop Hakan F. Natural convection in partially cooled and inclined porous rectangular enclosures [J]. Int J of Thermal Sciences, 2007, **46**(2): 149-156.
- [10] Oosthuizen P H, Naylor D. An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis [M]. McGraw-Hill, 1991.

## MHD Natural Convection in Porous Media Filled Enclosures

F. G. Shehadeh, H. M. Duwairi

(Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering and Technology,  
The University of Jordan, 11942 Amman-Jordan)

**Abstract:** The magneto hydrodynamics natural convection heat transfer problem inside a porous media filled inclined rectangular enclosures is investigated numerically. The boundary conditions selected on the enclosure were two adiabatic and two isothermal walls. The governing equations, continuity, Forchheimer extension of Darcy law and energy, were going to be transformed into dimensionless form using a set of suitable variables then solved using a finite difference scheme. The governing parameters are magnetic influence number, Darcy-Rayleigh number, inclination angle, and the aspect ratio of the enclosure. It is found that the magnetic influence number and the inclination angle parameter have pronounced effects on the fluid flow and heat transfer in porous media filled enclosures.

**Key words:** magneto hydrodynamics (MHD); natural convection; porous media; finite difference scheme