

# 多阶梯梁系统的 3: 1 内共振\*

A·特金<sup>1</sup>, E·奥兹卡亚<sup>2</sup>, S·M·巴哥达德利<sup>2</sup>

(1. 杰拉鲁巴亚尔大学 高等职业技术教育学校, 索玛, 马尼萨, 土耳其;  
2. 杰拉鲁巴亚尔大学 机械工程系, 穆拉迪耶, 马尼萨, 土耳其)

(陈立群推荐)

**摘要:** 研究了具有三次非线性项的多阶梯梁的振动. 讨论了该系统 3: 1 内共振情况. 运用多重尺度法, 即一种摄动技术, 得到该问题的一般近似解, 并得到两种模型的振幅和相位调制方程. 这些方程组用来确定稳态解及其稳定性. 假设外加的强迫频率接近于较低的频率. 在研究的数值部分, 讨论固有频率中的 3: 1 情况. 对两端固支和一端固支另一端简支, 观测到的频率位于第一和第二固有频率之间; 对两端简支, 观测到的频率位于第二和第三固有频率之间. 最后, 利用数值算法求解 3: 1 内共振. 第一模型为两端固支和一端固支另一端简支梁的外激励模型; 第二模型为两端简支梁的外激励模型. 然后, 当外激励第一模型时, 研究第一、二模型的振幅. 当外激励第二模型时, 研究第二、三模型的振幅. 对振动的内共振模型, 画出强迫响应、阻尼响应和频率响应曲线. 同时进行这些曲线的稳定性分析.

**关键词:** 阶梯梁; 3: 1 内共振; 稳定性分析; 非线性振动; 摄动法

**中图分类号:** O322; O175. 29      **文献标识码:** A

**DOI:** 10. 3879/j. issn. 1000-0887. 2009. 09. 007

## 引 言

内共振可以发生在许多力学系统中, 包括梁、板、壳、缆、绳、拱等. 理解这种系统的非线性振动, 需要研究由于内共振引起的模型间的相互作用. 在这方面, 连续系统的振动最初采用偏微分方程模型, 得到非线性振动方程, 并采用摄动方法求解.

在此之前已经有许多关于梁的线性和非线性振动方面的研究. Ökaya 等<sup>[1]</sup>分析了不同边界条件下的梁-质量系统. 他们采用多重尺度法, 一种摄动技术, 认为其影响是延续的. Ökaya<sup>[2]</sup>分析了端点简支条件下的梁-质量系统, 对质量的位置、大小、数量的影响进行了研究. Ökaya 和 Tekin<sup>[3]</sup>研究了不同边界条件下阶梯梁的非线性振动, 得到了相位调制方程, 并用这些方程绘制了频率振幅图. 关于阶梯梁系统的研究通常都是线性研究. Ökaya 和 Tekin<sup>[4]</sup>研究了两端固支  $n$  级阶梯 Euler-Bernoulli 梁, 并分析了非线性项对固有频率的贡献. Naguleswaran<sup>[5]</sup>得到了所有边界条件下 3 种不同的 Euler-Bernoulli 阶梯梁的运动方程, 并利用运动方程计算 3 个固有频率. 其它研究中, Naguleswaran<sup>[6]</sup>考虑了 3 种不同类型的阶梯梁, 并研究

\* 收稿日期: 2009-04-20; 修订日期: 2009-06-19

基金项目: 土耳其科学技术研究委员会(TUBITAK) 资助项目(104M427)

作者简介: A. Tekin, 副教授(联系人, E-mail: ayta.tekin@bayar.edu.tr).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

了具有3个阶梯变化梁的振动. 列表给出1、2、3级变化梁的前3个频率参数.

大多数研究集中在这种系统的1:1、2:1、3:1内共振非线性振动. Abe<sup>[7]</sup>进行了带二次和三次非线性项的连续系统的非线性振动分析,并研究了两端简支 Euler-Bernoulli 梁的主共振和次谐共振,使用多重尺度法和 Galerkin 法来求解微分方程. Nayfeh 等<sup>[8]</sup>检验了两端固支梁非线性简正型弯曲. 他们考虑了两种模型之间3:1和1:1的内共振,利用摄动法求解了积分-偏微分方程及其边界条件. Chin 和 Nayfeh<sup>[9]</sup>研究了一端简支另一端固支梁的第一、二模型,他们利用多重尺度法,得到非线性偏微分方程及其3:1内共振. 还有一些研究<sup>[10-12]</sup>分析了均质梁的第一或第二模型的主共振响应. 他们使用多重尺度法,求解非线性微分方程,解释两种模型的振幅和相位,并进行稳定性分析. Chen 等<sup>[13]</sup>研究了具有二次和三次非线性动力学系统的1:2内共振,他们在4维中心流形上,分析了强内共振的分岔行为. Riedel 和 Tan<sup>[14]</sup>研究了轴向运动绳耦合着横向移动时的非线性强迫响应,并发展了前两个横向模型间的3:1内共振. Pakdemirli 和 Ökaya<sup>[15]</sup>研究了具有三次非线性连续系统的3:1内共振. 使用多重尺度法求解近似解,该算法被用来计算非线性弹性地基梁. Pakdemirli<sup>[16]</sup>在对具有二次和三次非线性连续系统振动分析中推广了算子的概念,采用多重尺度法求解运动方程. Çevik 和 Pakdemirli<sup>[17]</sup>研究了悬索桥的非线性振动和稳态解. 对偏微分方程应用多重尺度法,然后,得到频率响应方程,并解释了初始振幅和相位值的影响. Ö 等<sup>[18]</sup>采用多重尺度法,研究了梁轴向运动速度随时间变化时,梁的非线性振动和稳定性. Ö 和 Ökaya<sup>[19]</sup>讨论了简支的非线性弹性地基曲线梁的横向振动,并研究了该系统的3:1内共振.

本研究考虑多级阶梯 Euler-Bernoulli 梁的非线性振动. 研究其3:1内共振. 利用 Hamilton 原理得到运动方程式,并将其无量纲化. 利用多重尺度法,得到两个相互作用模型的振幅和相位的通用调制方程. 数值研究了3:1固有频率. 最后,利用数值算法求解3:1内共振. 第一模型为两端固支和一端固支另一端简支梁的外激励模型,第二模型为两端简支梁的外激励模型. 然后,当外激励第一模型时,调查研究第一、二模型的振幅. 当外激励第二模型时,调查研究第二、三模型的振幅. 尽管第一或第二模型为外激励模型,但是,由于3:1内共振的存在,有部分能量转移到第二或第三模型. 画出了强迫响应、阻尼响应和频率响应曲线. 对这些曲线又进行了稳定性分析.

## 1 运动方程

多阶梯梁系统的 Lagrange 方程可以写为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left[ \int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} \rho A_{m+1} w_{m+1}^{*2} dx^* - \int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} EI_{m+1} w_{m+1}^{*2} dx^* - \int_{x_m^*}^{x_{m+1}^*} EA_{m+1} \left( u_{m+1}^{*'} + \frac{1}{2} w_{m+1}^{*2} \right)^2 dx^* \right], \quad (1)$$

$$x_0^* = 0, \quad x_{n+1}^* = l, \quad (2)$$

其中,  $w$  为横向位移,  $A_{m+1}$  为多阶梯梁的横截面积,  $E$  是弹性模量,  $l$  为长度,  $\rho$  为密度,  $I_{m+1}$  为多阶梯梁关于中性轴的截面惯性矩,  $n$  为阶梯的级数,  $(\dot{\quad})$  和  $(\quad)'$  分别表示对时间变量  $t^*$  和空间变量  $x^*$  求导. 方程(1)右边各项分别为由于横向运动产生的动能,以及由于梁的弯曲和伸长产生的弹性变形能.

引用 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt^* = 0, \quad (3)$$

代入 Lagrange 方程 (1), 进行必要的代数运算, 并结合轴向位移和横向位移项的关系, 最后得到下面非线性积分-微分耦合的运动方程:

$$\begin{aligned} \rho_{m+1} \ddot{w}_{m+1} + EI_{m+1} w_{m+1}^{iv} = & \left[ EA_1 \left( 2 \sum_{r=0}^n \left[ \frac{x_{r+1}^* - x_r^*}{d_r^2} \right] \right) \right] \left[ \sum_{r=0}^n \int_{x_r^*}^{x_{r+1}^*} w_{r+1}^{\prime 2} dx^* \right] w_{m+1}'' - \\ & \mu^* \dot{w}_{m+1} + F_{m+1}^* \cos \Omega^* t^* \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

方程(4)共有  $n+1$  个方程, 其中  $x_0^* = 0, x_{n+1}^* = l, \alpha = d_{r+1}/d_1$  和  $\alpha_0 = 1$  ( $\alpha_r$  为多阶梯梁的阶梯比率). 注意到, 方程中出现了粘滞阻尼的阻尼系数  $\mu^*$ , 以及外激励的振幅  $F_{m+1}^*$  和频率  $\Omega^*$ . 方程(4)右边第一项是由轴向位移引起, 并使运动方程变为非线性. 阶梯梁截面变化处的边界条件都可以用下式表示:

$$\begin{cases} w_p^*(x_p, t^*) = w_{p+1}^*(x_p, t^*), & w_p'(x_p, t^*) = w_{p+1}'(x_p, t^*), \\ EI_p w_p''(x_p, t^*) - EI_{p+1} w_{p+1}''(x_p, t^*) = 0, \\ EI_p w_p^\ominus(x_p, t^*) - EI_{p+1} w_{p+1}^\ominus(x_p, t^*) = 0, \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5)$$

运动方程和边界条件可以采用下面的式子无量纲化:

$$\begin{cases} x = \frac{x^*}{l}, & w_{m+1} = \frac{w_{m+1}^*}{R_{m+1}}, & \eta_{m+1} = \frac{x_{m+1}^*}{l}, & t = \frac{1}{l^2} \left( \frac{EI_1}{\rho A_1} \right)^{1/2} t^*, \\ \Omega = \Omega^* l^2 / (EI_1 / (\rho A_1))^{1/2}, & F_{m+1} = F_{m+1}^* / (EI_1 / R_{m+1}), \\ 2\mu = (\mu^* l^2) / (\rho A_1 EI_1)^{1/2}, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $R_{m+1}$  为阶梯梁横截面对中性轴的回转半径. 将无量纲参数代入原方程, 得到

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{m+1} + \alpha_m^2 w_{m+1}^{iv} = & \left[ 1 \left( 2 \alpha_m^2 \sum_{r=0}^n \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{\alpha_r^2} \right) \right] \left[ \sum_{r=0}^n \alpha_r^2 \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w_{r+1}^{\prime 2} dx \right] w_{m+1}'' - \\ & 2\mu \dot{w}_{m+1} + F_{m+1} \cos \Omega t, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

阶梯梁截面变化处的边界条件变为

$$\begin{cases} w_p(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w_{p+1}(\eta_p, t) = 0, & w_p'(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w_{p+1}'(\eta_p, t), \\ w_p''(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p^5}{\alpha_{p-1}^5} w_{p+1}''(\eta_p, t), & w_p^\ominus(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p^5}{\alpha_{p-1}^5} w_{p+1}^\ominus(\eta_p, t), \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (8)$$

在方程(7)中,  $\alpha_m = d_{m+1}/d_1, \alpha_0 = 1, \eta_0 = 0$  和  $\eta_{n+1} = 1, \mu$  为无量纲粘滞阻尼系数,  $F_{m+1}$  为无量纲外激励振幅,  $\Omega$  为无量纲外激励频率. 虽然进行了无量纲变换, 但是系数  $\alpha_p$  还是出现在方程(8)中. 给出端部的边界条件, 如图 1 所示.

## 2 摄动分析

假设无二次非线性项的展开式为

$$w_{m+1}(x, t; \varepsilon) = \varepsilon w_{(m+1)1}(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_{(m+1)3}(x, T_0, T_2) + \dots, \quad (9)$$

其中  $\varepsilon$  是人为插入方程的小参数. 考虑到该参数在端部为 1, 所以, 它们的挠度很小. 因此, 得到一个弱非线性系统.  $T_0 = t$  和  $T_2 = \varepsilon^2 t$  分别为快速和慢速的时间尺度. 规定好强迫项和阻尼项, 用于计算非线性项的影响,

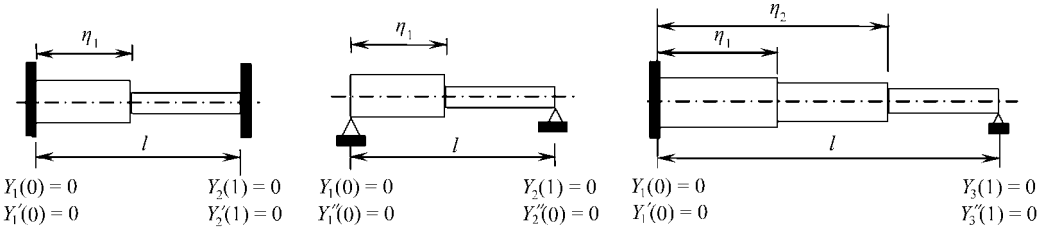


图 1(a) 两端固支的一级阶梯梁

图 1(b) 两端简支的一级阶梯梁

图 1(c) 一端固支另一端简支的两级阶梯梁

$$F_{m+1} = \varepsilon^3 F_{m+1}, \quad \mu = \varepsilon^2 \mu, \quad (10)$$

对时间的导数写为

$$(\dot{\phantom{x}}) = D_0 + \varepsilon^2 D_2, \quad (\ddot{\phantom{x}}) = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2, \quad D_n = \partial / \partial T_n. \quad (11)$$

将方程(9)代入方程(7)、(8), 整理得到下列方程:

( $\varepsilon$ ) 阶:

$$D_0^2 w_{(m+1)1} + \alpha_{m1}^2 w_{(m+1)1} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{cases} w_{p1}(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w_{(p+1)1}(\eta_p, t), & w'_{p1}(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w'_{(p+1)1}(\eta_p, t), \\ w''_{p1}(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p^5}{\alpha_{p-1}^5} w''_{(p+1)1}(\eta_p, t), & w_{p1}^\ominus(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p^5}{\alpha_{p-1}^5} w_{(p+1)1}^\ominus(\eta_p, t); \end{cases} \quad (13)$$

( $\varepsilon^3$ ) 阶:

$$D_0^2 w_{(m+1)3} + \alpha_{m3}^2 w_{(m+1)3} = -2D_0 D_2 w_{(m+1)1} - 2\mu D_0 w_{(m+1)1} + \left[ 1 \left\| \left( 2\alpha_m^2 \sum_{r=0}^n \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{\alpha_r^2} \right) \right\| \left[ \sum_{r=0}^n \alpha_r^2 \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} w'_{(r+1)1} \right] \right] w_{(m+1)1} F_{m+1} \cos \Omega T_0, \quad (14)$$

$$\begin{cases} w_{p3}(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w_{(p+1)3}(\eta_p, t), & w'_{p3}(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w'_{(p+1)3}(\eta_p, t), \\ w''_{p3}(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p^5}{\alpha_{p-1}^5} w''_{(p+1)3}(\eta_p, t), & w_{p3}^\ominus(\eta_p, t) = \frac{\alpha_p^5}{\alpha_{p-1}^5} w_{(p+1)3}^\ominus(\eta_p, t). \end{cases} \quad (15)$$

$\varepsilon$  次数包含着线性问题. 如果在边界条件(13)上, 求解该次方程(12), 可以得到生成模型结构的固有频率和线性系数. 这些系数能够利用 MATHEMATICA 方便地计算得到. 方程的求解和图形的绘制由 MATLAB 来实现. 定义下面失谐参数:

$$\Omega = \omega_k + \varepsilon^2 \sigma(T_2), \quad \omega_s = 3\omega_k + \varepsilon^2 \rho(T_2), \quad (16)$$

在 3:1 内共振的假设下, 该模型的直接激励 ( $\omega_k$ ) 和通过内共振的间接激励 ( $\omega_s$ ) 得以保存, 而所有其它模型, 由于阻尼, 都随着时间衰减了,

$$w_{(m+1)1} = (A_k(T_2) e^{i\omega_k T_0} + cc) Y_{2m+1}(x) + (A_s(T_2) e^{i\omega_s T_0} + cc) Y_{2m+2}(x), \quad (17)$$

其中  $cc$  表示前项的复共轭项,  $\omega$  为固有频率,  $Y$  为该问题的模态. 将方程(17)代入方程(14)得到

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{(m+1)3} + \alpha_{m3}^2 w_{(m+1)3} = & -2[i\omega_k (A'_k e^{i\omega_k T_0} + cc) Y_{2m+1}(x) + i\omega_s (A'_s e^{i\omega_s T_0} + cc) Y_{2m+2}(x)] - \\ & 2\mu [i\omega_k (A_k e^{i\omega_k T_0} + cc) Y_{2m+1}(x) + i\omega_s (A_s e^{i\omega_s T_0} + cc) Y_{2m+2}(x)] + \\ & \left[ 1 \left\| \left( 2\alpha_m^2 \sum_{r=0}^n \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{\alpha_r^2} \right) \right\| \right] [ (A_k^3 e^{3i\omega_k T_0} + 3A_k^2 A_k e^{i\omega_k T_0} + cc) b_1 Y_{2m+1} + \\ & 2(A_k^2 A_s e^{i(2\omega_k + \omega_s) T_0} + 2A_k A_k A_s e^{i\omega_s T_0} + A_k^2 A_s e^{i(-2\omega_k + \omega_s) T_0} + cc) b_3 Y_{2m+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A_k A_s^2 e^{i(\omega_k + 2\omega_s)T_0} + 2A_k A_s A_s e^{i\omega_k T_0} + A_k A_s^2 e^{i(2\omega_s - \omega_k)T_0} + cc) b_2 Y_{2m+1}'' + \\
& (A_k^2 A_s e^{i(2\omega_k + \omega_s)T_0} + 2A_k A_k A_s e^{i\omega_k T_0} + A_k^2 A_s e^{i(-2\omega_k + \omega_s)T_0} + cc) b_1 Y_{2m+2}'' + \\
& 2(A_k A_s^2 e^{i(\omega_k + 2\omega_s)T_0} + 2A_k A_s A_s e^{i\omega_k T_0} + A_k A_s^2 e^{i(2\omega_s - \omega_k)T_0} + cc) b_3 Y_{2m+2}'' + \\
& (A_s^3 e^{3i\omega_s T_0} + 3A_s^2 A_s e^{i\omega_s T_0} + cc) b_2 Y_{2m+2}'' + F_{m+1}(e^{i\omega_k T_0} e^{i\sigma T_2} + cc)/2, \quad (18)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}
\sum_{r=0}^n \alpha_r^2 \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{2r+1}^{\prime 2} dx = b_1, & \sum_{r=0}^n \alpha_r^2 \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{2r+2}^{\prime 2} dx = b_2, \\
\sum_{r=0}^n \alpha_r^2 \int_{\eta_r}^{\eta_{r+1}} Y_{2r+1}' Y_{2r+2}' dx = b_3, & \sum_{m=0}^n \alpha_m^4 \int_{\eta_m}^{\eta_{m+1}} Y_{2m+1}^2 dx = 1, \\
\sum_{m=0}^n \alpha_m^4 \int_{\eta_m}^{\eta_{m+1}} Y_{2m+2}^2 dx = 1, & \sum_{m=0}^n \alpha_m^4 \int_{\eta_m}^{\eta_{m+1}} F_{m+1} Y_{2m+1} dx = f,
\end{cases} \quad (19)$$

方程(19)中的系数用带一线性次的模型结构计算. 假设该阶的解有如下形式:

$$\begin{aligned}
w_{(m+1)3}(x, T_0, T_2) = \\
\phi_{2m+1}(x, T_2) e^{i\omega_k T_0} + \phi_{2m+2}(x, T_2) e^{i\omega_s T_0} + cc + W_{m+1}(x, T_0, T_2), \quad (20)
\end{aligned}$$

其中 cc 表示前项的复共轭,  $W_{m+1}(x, T_0, T_2)$  对应于非永年项的解,  $\phi_{2m+1}(x, T_2)$  和  $\phi_{2m+2}(x, T_2)$  对应于永年项的解. 数学计算后, 可解性条件可以如下计算:

$$\begin{cases}
2i \omega_k (A_k' + \mathbb{H}_k) + \left[ 1 \left\| \left( \sum_{r=0}^n \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{\alpha_r^2} \right) \right\| \right] \left[ \frac{3}{2} b_1^2 A_k^2 A_k + \right. \\
\left. \frac{3}{2} A_k^2 A_s e^{i\sigma T_2} b_1 b_3 + A_k A_s A_s (b_2 b_1 + 2b_3^2) \right] - \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_2} = 0, \\
2i \omega_s (A_s' + \mathbb{H}_s) + \left[ 1 \left\| \left( \sum_{r=0}^n \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{\alpha_r^2} \right) \right\| \right] \left[ \frac{3}{2} b_2^2 A_s^2 A_s + \right. \\
\left. A_k A_k A_s (b_2 b_1 + 2b_3^2) + \frac{1}{2} A_k^3 A_s e^{-i\sigma T_2} b_1 b_3 \right] = 0.
\end{cases} \quad (21)$$

### 3 近似解及其稳定性

当真正的振幅和相位调制方程由复数的调幅调制方程发展起来时, 便得到了近似解, 并导出振幅-相位调制方程的稳态解.

将极坐标形式

$$A_k = \frac{1}{2} a_k(T_2) e^{i\theta_k(T_2)}, \quad A_s = \frac{1}{2} a_s(T_2) e^{i\theta_s(T_2)} \quad (22)$$

代入方程(21), 分离实部和虚部, 最后得到

$$\begin{cases}
\omega_k a_k' \dot{\gamma} = \omega_k a_k \sigma - \frac{3\Lambda}{16} a_k^3 b_1^2 - \frac{3\Lambda}{16} a_k^2 a_s b_1 b_3 \cos \beta - \\
\frac{\Lambda}{8} a_k a_s^2 (b_1 b_2 + 2b_3^2) + \frac{1}{2} f \cos \gamma, \\
\omega_k a_k' = -\mu \omega_k a_k - \frac{3\Lambda}{16} a_k^2 a_s b_1 b_3 \sin \beta + \frac{1}{2} f \sin \gamma, \\
\omega_s a_s' \dot{\theta}_s = \frac{3\Lambda}{16} a_s^3 b_2^2 + \frac{\Lambda}{8} a_k^2 a_s (b_1 b_2 + 2b_3^2) + \frac{\Lambda}{16} a_k^3 b_1 b_3 \cos \beta, \\
\omega_s a_s' = \frac{\Lambda}{16} a_k^3 b_1 b_3 \sin \beta - \omega_s \mathbb{H}_s,
\end{cases} \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma = \sigma T_2 - \theta_k, \beta = \theta_s - 3\theta_k + \rho T_2, \dot{\theta}_s = \beta' + 3(\sigma - \gamma') - \rho, \\ \Lambda = \left( 1 \left| \sum_{r=0}^n \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{\alpha_r^2} \right. \right). \end{cases} \quad (24)$$

对于稳态解,  $\dot{a}_k = \dot{a}_s = \dot{\gamma}' = \dot{\beta}' = 0$ , 方程(23)变为

$$\begin{cases} \omega_k a_k \sigma - \frac{3\Lambda}{16} a_k^3 b_1^2 - \frac{3\Lambda}{16} a_k^2 a_s b_1 b_3 \cos \beta - \frac{\Lambda}{8} a_k a_s^2 (b_1 b_2 + 2b_3^2) + \frac{1}{2} f \cos \gamma = 0, \\ -\mu \omega_k a_k - \frac{3\Lambda}{16} a_k^2 a_s b_1 b_3 \sin \beta + \frac{1}{2} f \sin \gamma = 0, \\ \frac{3\Lambda}{16} a_s^3 b_2^2 + \frac{\Lambda}{8} a_k^2 a_s (b_1 b_2 + 2b_3^2) + \frac{\Lambda}{16} a_k^3 b_1 b_3 \cos \beta = \omega_s a_s (3\sigma - \rho), \\ \frac{\Lambda}{16} a_k^3 b_1 b_3 \sin \beta - \omega_s \mu a_s = 0. \end{cases} \quad (25)$$

为了确定系统的稳定性, 消去  $\dot{\theta}_k$  和  $\dot{\theta}_s$ , 方程(23)改写为

$$\begin{cases} \dot{a}_k = -\mu a_k - \frac{3\Lambda}{16\omega_k} a_k^2 a_s b_1 b_3 \sin \beta + \frac{1}{2\omega_k} f \sin \gamma = F_1(a_k, a_s, \beta, \gamma), \\ \dot{a}_s = -\mu a_s + \frac{\Lambda}{16\omega_s} a_k^3 b_1 b_3 \sin \beta = F_2(a_k, a_s, \beta, \gamma), \\ \dot{\gamma}' = \sigma - \frac{3\Lambda}{16\omega_k} a_k^2 b_1^2 - \frac{\Lambda}{8\omega_k} a_s^2 (b_1 b_2 + 2b_3^2) - \frac{3\Lambda}{16\omega_k} a_k a_s b_1 b_3 \cos \beta + \\ \frac{f}{2\omega_k a_k} \cos \gamma = F_3(a_k, a_s, \beta, \gamma), \\ \dot{\beta}' = \rho + \left[ \frac{\Lambda}{16\omega_s a_s} a_k^3 b_1 b_3 - \frac{9\Lambda}{16\omega_k} a_k a_s b_1 b_3 \right] \cos \beta + \left[ \frac{\Lambda}{8\omega_s} (b_1 b_2 + 2b_3^2) - \right. \\ \left. \frac{9\Lambda}{16\omega_k} b_1^2 \right] a_k^2 + \left[ \frac{3\Lambda}{16\omega_s} b_2^2 - \frac{3\Lambda}{8\omega_k} (b_1 b_2 + 2b_3^2) \right] a_s^2 + \frac{3f}{2\omega_k a_k} \cos \gamma = \\ F_4(a_k, a_s, \beta, \gamma). \end{cases} \quad (26)$$

构造 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_k} & \frac{\partial F_1}{\partial a_s} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_k} & \frac{\partial F_2}{\partial a_s} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a_k} & \frac{\partial F_3}{\partial a_s} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a_k} & \frac{\partial F_4}{\partial a_s} & \frac{\partial F_4}{\partial \gamma} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} \end{bmatrix}_{a_k = a_{k0}, a_s = a_{s0}, \gamma = \gamma_0, \beta = \beta_0} \quad (27)$$

用来确定不动点的稳定性. 不动点为方程(25)的根, 且它们的稳定性由方程(26)、(27)控制. 其根由 MATLAB 子程序计算得到. 通过 Jacobi 矩阵特征值的评估, 来确定稳定性. 特征值将没有正实部, 以保持稳定. 该问题的近似解为

$$\begin{aligned} w_{m+1}(x, t; \epsilon) &= a_k \cos(\Omega - \gamma) Y_{2m+1}(x) + \\ & a_s \cos(3\Omega + \beta - 3\gamma) Y_{2m+2}(x) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (28)$$

其中,  $a_k$ ,  $a_s$ ,  $\gamma$  和  $\beta$  由方程(26)确定.

## 4 数值结果

在应用中,采用一、二级阶梯梁系统来考虑 3:1 内共振情形. 首先,考虑两端固支和两端简支的一级阶梯梁系统(图 1(a),图 1(b)). 然后研究一端固支另一端简支的二级阶梯梁系统(图 1(c)). 在图 2~图 4 中,对于不同的  $\alpha$  值,绘制了两端简支和两端固支的一级阶梯梁的固有频率比与  $\eta$ (阶梯位置)关系曲线. 图 2 中,绘制了两端简支的一级阶梯梁  $\omega_2/\omega_1$  与  $\eta$  的关系曲线;图 3 中,绘制了两端简支的一级阶梯梁  $\omega_3/\omega_2$  与  $\eta$  的关系曲线. 图 4 中,绘制了两端固支的一级阶梯梁  $\omega_2/\omega_1$  与  $\eta$  的关系曲线.

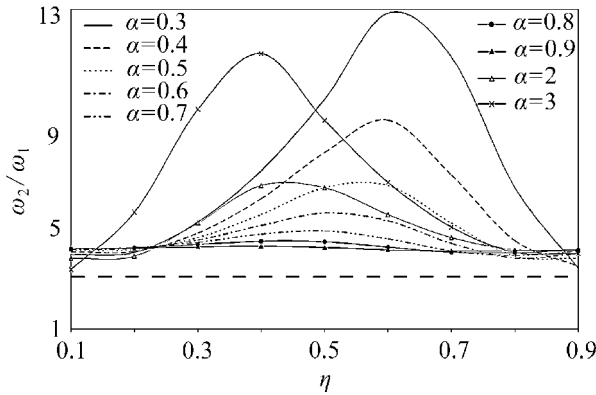


图 2 两端简支的一级阶梯梁  $\omega_2/\omega_1$  与  $\eta$  的关系曲线

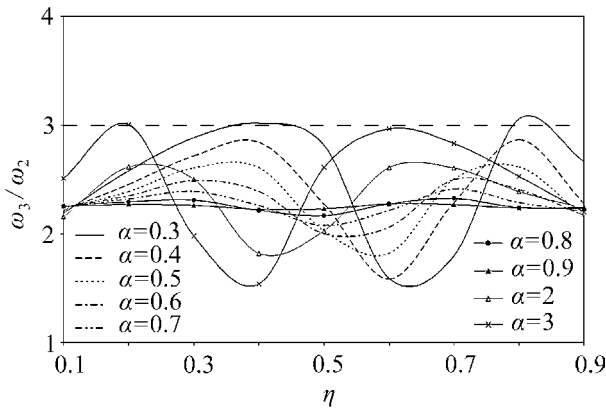


图 3 两端简支的一级阶梯梁  $\omega_3/\omega_2$  与  $\eta$  的关系曲线

如图 2 所示, 3:1 内共振并不对所有  $\alpha$  值都发生. 图 3 给出了  $\alpha=3$  的小  $\eta$  值和  $\alpha=0.3$  的 4 个不同  $\eta$  值的 3:1 内共振. 对其它的  $\alpha$  值, 没有发生 3:1 内共振. 在图 4 中, 除了  $\alpha=0.8$  和  $\alpha=0.9$  之外, 对于其他所有的  $\alpha$  值, 都能够观察到 3:1 内共振点.

3:1 内共振第 1 个应用. 取阶梯比  $\alpha_1=2$  和阶梯位置  $\eta_1=0.1$  的两端固支的一级阶梯梁(图 1(a)). 不动点为方程(25)的根, 且其稳定性由方程(26)、(27)控制. 图 5(a)和图 5(b)给出了外激励频率响应曲线. 图 5 中,  $\omega_1=34.5665$ ,  $\omega_2=103.7472$  由线性阶方程计算得到; 由方程(19) 计算得到  $b_1=2.93665$ ,  $b_2=11.4404$ ,  $b_3=0.612924$ , 由方程(16) 计算得到  $\rho=0.0477$ ,  $\mu$  和  $f$  分别取 0.02 和 1. 图 5(a)绘制了第一模型的频率响应曲线; 图 5(b)绘制了第二模型的频率响应曲线. 当  $0 < \sigma < 0.05$  时, 第二模型振幅受到激励.

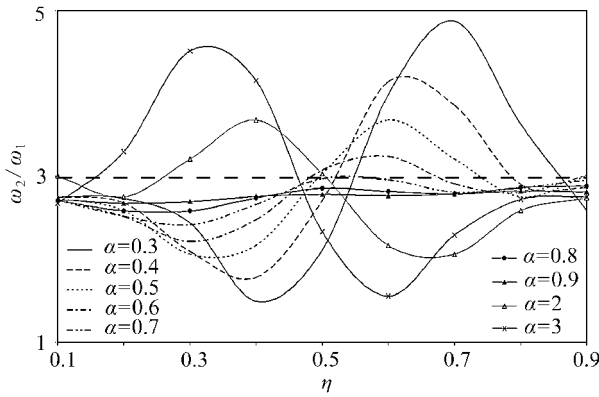
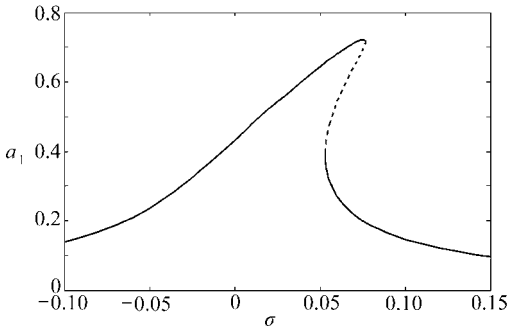
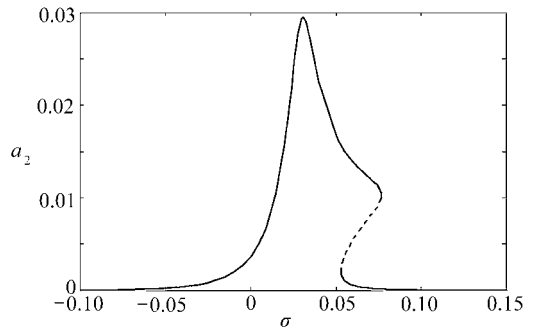


图 4 两端固支的一级阶梯梁  $\omega_2/\omega_1$  与  $\eta$  的关系曲线

当参数  $\omega_1 = 34.5665$ ,  $\omega_2 = 103.7472$ ,  $\mu = 0.02$  和  $\sigma = 0.06$  时, 图 6(a) 和图 6(b) 给出了外加的强迫响应曲线图. 对第一模型应用外激励频率, 并计算第一、第二模型的共振. 当  $f > 1$  时第二模型受到激励. 对外激励第一模型, 由于 3:1 内共振, 部分能量转移到第二模型. 在此情形中, 第二模型的最大振幅是第一模型的 4.12%. 图 7(a) 和图 7(b) 给出了参数  $\omega_1 = 34.5665$ ,  $\omega_2 = 103.7472$ ,  $f = 1$  和  $\sigma = 0.06$  时, 阻尼响应曲线图. 当  $\mu$  介于 0 和 0.023 之间时, 出现不稳定区域; 随着阻尼的增大, 振幅减小, 当  $\mu = 0.023$  时, 出现跳跃现象.

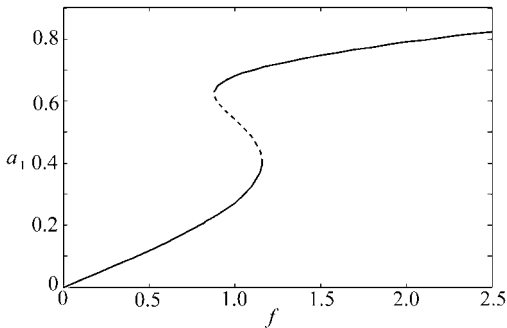


(a) 第一模型

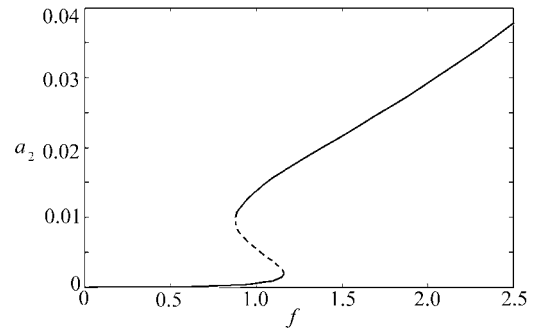


(b) 第二模型

图 5 两端固支的一级阶梯梁的频率响应曲线(——稳态解, ----非稳态解)



(a) 第一模型



(b) 第二模型

图 6 两端固支的一级阶梯梁的强迫响应曲线(——稳态解, ----非稳态解)

第 2 个应用. 采用阶梯比  $\alpha_1 = 3$ , 阶梯位置  $\eta_1 = 0.2$  的两端简支的一级阶梯梁(图 1(b)).

图 8(a) 和图 8(b) 给出了参数  $\omega_2 = 74.7985$ ,  $\omega_3 = 224.7520$ ,  $b_1 = 9.08443$ ,  $b_2 = 24.5878$ ,  $b_3$



$= 8.93287$ ,  $\rho = 0.365051$ ,  $\mu = 0.015$  和  $f = 1$  时, 外激励频率响应曲线. 计算了依赖外激励频率的第二、第三模型振幅. 图 9(a) 和图 9(b) 给出了参数  $\sigma = 0.1$  时, 外加强迫振幅响应曲线图. 如图 9 所示, 在  $0 < \sigma < 0.05$ ,  $f > 1$  区域内, 第三模型的振幅受到有效激励. 在此情形中, 第二模型的最大振幅是第一模型的 6.5%.

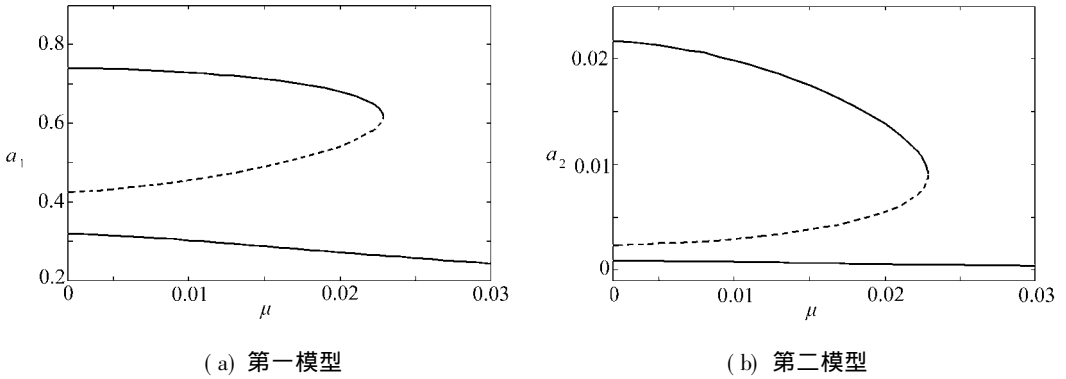


图 7 两端固支的一级阶梯梁的阻尼响应曲线(——稳态解, ----非稳态解)

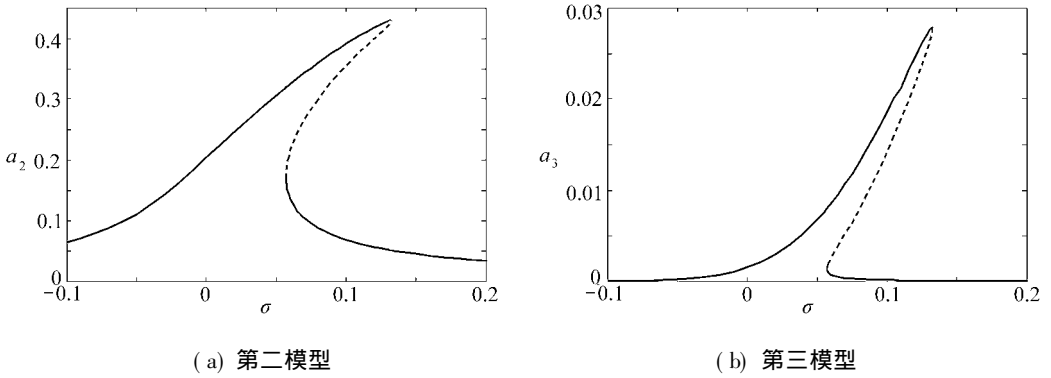


图 8 两端简支的一级阶梯梁的频率响应曲线(——稳态解, ----非稳态解)

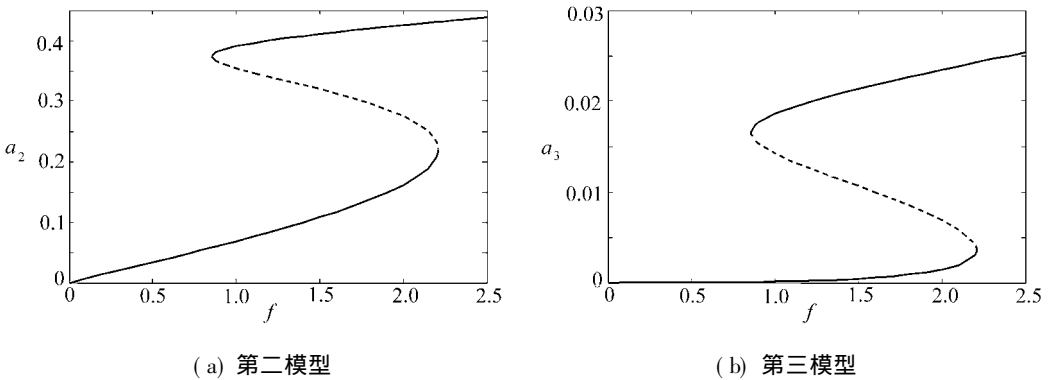
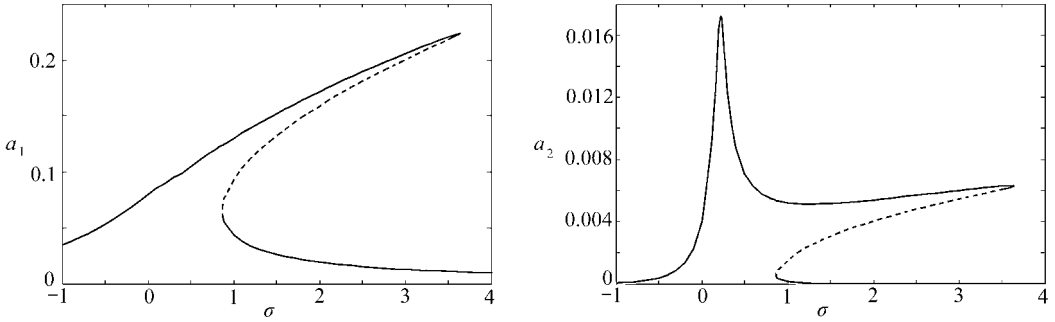


图 9 两端简支的一级阶梯梁的强迫响应曲线(——稳态解, ----非稳态解)

二级阶梯梁的应用. 采用阶梯比  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 0.8$ , 阶梯位置  $\eta_1 = 0.5$ ,  $\eta_2 = 0.5$  的一端固支另一端简支的二级阶梯梁(图 1(c)). 图 10(a) 和图 10(b) 给出了参数  $\omega_1 = 13.051274$ ,  $\omega_2 = 39.310093$ ,  $b_1 = 29.961678$ ,  $b_2 = 91.924317$ ,  $b_3 = -16.7002$ ,  $\rho = 0.156271$ ,  $\mu = 0.2$  和  $f = 1$  时, 外激励频率响应曲线图. 图 11(a) 和图 11(b) 给出了参数  $\sigma = 2$  时, 外加强迫响应曲线图. 根据这些图形, 在  $0 < \sigma < 1$ ,  $f > 1$  区域内, 第二模型的振幅受到有效的激励. 在此情

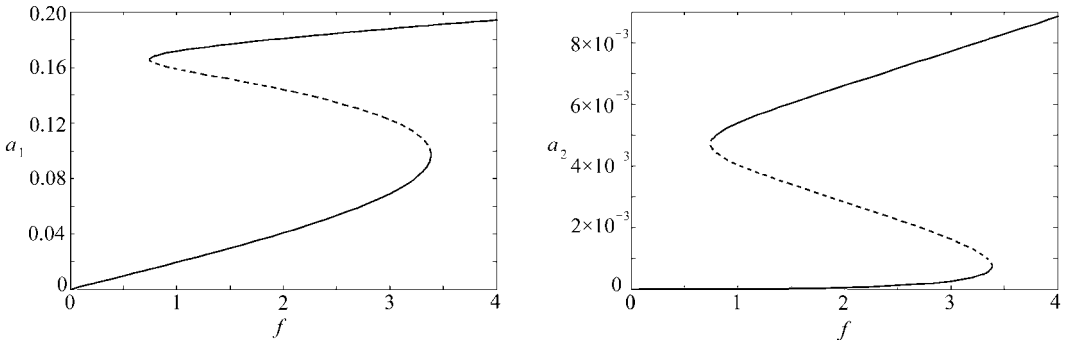
形中,第二模型的最大振幅是第一模型的7.7%.



(a) 第一模型

(b) 第二模型

图 10 一端固支另一端简支的二级阶梯梁的频率响应曲线(——稳态解,-----非稳态解)



(a) 第一模型

(b) 第二模型

图 11 一端固支另一端简支的二级阶梯梁的强迫响应曲线(——稳态解,-----非稳态解)

## 5 结束语

本文研究了在不同边界条件下,具有三次非线性项的多级阶梯梁的主共振激励.直接应用多重尺度法来求解偏微分方程.导出了振幅和相位的调制方程.

对不同的阶梯比,绘制了两端简支、两端固支的一级阶梯梁固有频率比与阶梯位置关系曲线,并得到了3:1内共振点,检验了阶梯位置和阶梯比对3:1内共振的影响.

就3种不同情况,检验阶梯梁的稳态解及其稳定性.利用相位及其调制方程构造Jacobi矩阵.根据矩阵特征值来研究系统的不动点和解的稳定性.最后,应用修正算法,分析两端简支、两端固支的一级阶梯梁和一端固支另一端简支的二级阶梯梁的振动问题.然后,得到强迫响应、阻尼响应和频率响应曲线.虽然仅对第一或第二模型是外激励的,但是由于存在3:1内共振,部分能量转移到第二或第三模型.在频率响应曲线中 $\sigma > 0$ ,强迫响应曲线中 $f > 1$ 和阻尼响应曲线中 $0 < \mu < 0.023$ 时,有着高的能量转移.

### [参 考 文 献]

- [1] Özkaya E, Pakdemirli M, Öz H R. Nonlinear vibrations of a beam-mass system under different boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, **199**(4): 679-696.
- [2] Özkaya E. Non-linear transverse vibrations of a simply supported beam carrying concentrated masses [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, **257**(3): 413-424.

- [3] Özkaya E, Tekin A. Non-linear vibrations of stepped beam system under different boundary conditions[J]. *Structural Engineering AND Mechanics*, 2007, **27**(3): 333-345.
- [4] Özkaya E, Tekin A. Non-linear transverse vibrations of a clamped supported beam with multi-stepped [A]. In: *The Fifth International Conference on Dynamics Systems and Applications* [C]. Georgia, USA: Atlanta, 2007.
- [5] Naguleswaran S. Natural frequencies, sensitivity and mode shape details of an Euler-Bernoulli beam with one-step change in cross-section and with ends on classical supports[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **252**(4): 751-767.
- [6] Naguleswaran S. Vibration of an Euler-Bernoulli beam on elastic end supports and with up to three step changes in cross section[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, **44**(12): 2541-2555.
- [7] Abe A. On non-linear vibration analyses of continuous systems with quadratic and cubic non-linearities[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(8): 873-879.
- [8] Nayfeh A H, Lacarbonara W, Chin C. Non-linear normal modes of buckled beams Three-to-one and one-to-one internal resonances[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, **18**(3): 253-273.
- [9] Chin C, Nayfeh A H. Three-to-one internal resonances in hinged-clamped beams[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1997, **12**(2): 129-154.
- [10] Nayfeh A H, Mook D T, Nayfeh J F. Some aspects of modal interactions in the response of beams [A]. In: *28th Structures, Structural Dynamics and Material Conference* [C]. Monterey: AIAA-1987-777, 1987.
- [11] Lau S L, Cheung Y K, Chen S. An alternative perturbation procedure of multiple scales for non-linear dynamics systems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1989, **56**(3): 667-675.
- [12] Chen S H, Cheung Y K, Lau S L. On the internal resonance of multi-degree-of-freedom systems with cubic non-linearity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, **128**(1): 13-24.
- [13] 陈予恕, 杨彩霞, 吴志强, 等. 具有平方、立方非线性项的耦合动力学系统 1:2 内共振分岔[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(8): 817-824.
- [14] Riedel C H, Tan C A. Coupled, forced response of an axially moving strip with internal resonance[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, **37**(1): 101-116.
- [15] Pakdemirli M, Özkaya E. Three-to-one internal resonances in a general cubic non-linear continuous system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **268**(3): 543-553.
- [16] Pakdemirli M. Vibrations of continuous systems with a general operator notation suitable for perturbative calculations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **246**(5): 841-851.
- [17] Çevik M, Pakdemirli M. Non-linear vibrations of suspension bridges with external excitation[J]. *Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, **40**(6): 901-923.
- [18] Öz H R, Pakdemirli M, Boyağlı H. Non-linear vibrations and stability of an axially moving beam with time dependent velocity[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, **36**(1): 107-115.
- [19] Öz H R, Özkaya E. Three-to-one internal resonances in a curved beam resting on an elastic foundation[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **10**(4): 667-678.

## 3 1 Internal Resonance in Multiple Stepped Beam Systems

A. Tekin<sup>1</sup>, E. Özkaya<sup>2</sup>, S. M. Bağdatlı<sup>2</sup>

( 1. Technical Vocational School of Higher Education , Celal Bayar University ,

Soma , Manisa , Turkey ;

2. Department of Mechanical Engineering , Celal Bayar University , Muradiye , Manisa , Turkey )

**Abstract:** Vibrations of multiple stepped beams with cubic nonlinearities were considered. 3:1 internal resonance case was investigated for the system. A general approximate solution of the problem was found using the method of multiple scales, a perturbation technique. The modulation equations of the amplitudes and the phases were derived for two modes. These equations were utilized to determine steady state solutions and their stabilities. It was assumed that external forcing frequency is near to the lower frequency. For numeric part of the study, 3:1 ratio in natural frequencies was investigated. These values were observed to be between first and second natural frequencies in cases of clamped-clamped, clamped-pinned support and between second and third natural frequencies in case of pinned-pinned support. Finally, a numeric algorithm was used to solve 3:1 internal resonance. The first mode is externally excited for damped-clamped, clamped-pinned support and the second mode is externally excited for pinned-pinned support. Then, amplitudes of first and second modes were investigated when the first mode is externally excited. Amplitudes of second and third modes were investigated when the second mode is externally excited. Force-response, damping-response and frequency-response curves were plotted for internal resonance modes of vibrations. Stability analysis was carried out for these plots.

**Key words:** stepped beam; 3:1 internal resonance; stability analysis; nonlinear vibration; perturbation method