

矩形薄板瞬态响应的卷积型 DQ 半解析法^{*}

彭建设^{1,2}, 杨 杰³, 袁玉全⁴, 罗光兵¹

(1. 西华师范大学 物电学院, 四川 南充 637002;

2. 成都大学, 成都 610106;

3. 皇家墨尔本理工大学 航空机械制造工程学院, 墨尔本, 澳大利亚;

4. 四川理工学院 理学院, 四川 自贡 643000)

(沈惠申推荐)

摘要: 卷积型的 Gurtin 变分原理是目前在数学上唯一能和动力学初值问题完全等价的变分原理, 它完全反映了有关初值问题的全部特征. 通过卷积将矩形薄板原始控制方程构造包含初始条件的新的具有完整初值问题特征的控制方程. 对新的控制方程在时间域取解析函数, 在空间域采用离散的 DQ(differential quadrature) 法, 从而构造了卷积型 DQ 半解析法. 该方法既可以达到和 Gurtin 变分原理相同的效果, 又避开了 Gurtin 泛函的繁复. 经对矩形薄板的动力响应问题的计算表明, 该方法是一种精度好效率高的求解动力响应问题的计算方法.

关键词: 卷积; 瞬态响应; DQ(differential quadrature) 法; 半解析法

中图分类号: O302 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.008

引 言

卷积型的 Gurtin 变分原理是目前在数学上唯一能和动力学初值问题完全等价的变分原理, 有着合理的内涵, 它完全反映了有关初值问题的全部特征, 为初值问题的变分解法奠定了可靠的基础^[1-3]. 但其泛函的形式较为复杂, 求解起来较为困难.

现行对瞬态动力响应问题的数值计算, 一般都采用在空间域作有限元离散, 在时间域差分的方法. 这种方法需把所经历的时间域分成许多步递推求解, 每一步都要对所给定的空间域解一次稳定问题, 为了解的稳定性和精度, 时间步长往往必须取得很短, 网络也必须划得较细, 使求解较为繁琐.

DQ 法(differential quadrature method) 是 70 年代初 Bellman 等^[4] 提出的一种求解偏微分方程的数值方法. 该方法以其简单易懂, 计算量少, 精度较高, 易于在计算机上实施的特点受到各国学者的广泛关注, 在很多领域中都得到了成功的应用. DQ 法是求解结构力学问题的一种非常有效的数值方法, 许多力学工作者对此进行了大量的研究, 发展了大量相关成果^[5-9], 如广义微分求积法(GDQM)、微分求积单元法(DQEM)、调和微分求积法(HDQM)、DQ 半解析法等, 为

* 收稿日期: 2009-04-05; 修订日期: 2009-06-16

作者简介: 彭建设(1957-), 男, 四川南充人, 教授, 硕士(联系人. Fax: + 86-817-2314343; E-mail: pengjianshe2005@163.com).

结构动力问题的求解提供了有效的方法.

文献[10-11]运用卷积型加权残值法,求解了圆板和矩形薄板的动力学问题,为直接运用卷积型控制方程求解动力学问题做了初步的探索.本文针对矩形薄板的瞬态动力响应问题,通过卷积将原始控制方程构造成包含初始条件的新的具有完整初值问题特征的控制方程.对新的控制方程在时间域取解析函数,在空间域采用离散的DQ法,从而得到求解矩形薄板的瞬态动力响应场的卷积型DQ半解析法计算列式.求解一次线性方程组即可求得全域的瞬态位移响应场.

本文方法直接从卷积型的控制微分方程出发,原理简单计算方便,易于在计算机上实施.它既避免了卷积型Gurtin变分原理泛函和计算的繁复,又可以取得Gurtin变分原理的计算效果,而且和Gurtin变分原理一样有着合理的数学内涵.

1 DQ法基本原理

微分求积法以全域内节点函数值的加权和来逼近函数偏导数在某点的值,并在全域内运用高阶Lagrange多项式逼近域内某一待求函数.

设 $g(x, y)$ 为 x - y 平面一待求双变量函数,它在区间 $x \in [-1, 1]$ (或 $[0, 1]$)和 $y \in [-1, 1]$ (或 $[0, 1]$)上连续可微,现沿 x 轴设置 N_x 个节点,沿 y 轴设置 N_y 个节点,并以节点函数值 $g(x_i, y_j)$ ($i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y$)作为基本未知量,其中 x_i ($x_1 = -1$ 或 $0, x_{N_x} = 1$), y_j ($y_1 = -1$ 或 $0, y_{N_y} = 1$)是节点的坐标值,在全域内采用Lagrange高阶多项式插值逼近 $g(x, y)$,则有

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} g(x_i, y_j) \cdot r_i(x) \cdot s_j(y). \quad (1)$$

$g(x, y)$ 对 x 的 n 阶偏导数 $g_x^{(n)}(x, y)$ 在节点 (x_i, y_j) 处的值, $g(x, y)$ 对 y 的 m 阶偏导数 $g_y^{(m)}(x, y)$ 在节点 (x_i, y_j) 处的值为

$$g_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(n)} \cdot g(x_k, y_j), \quad n = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad (2)$$

$$g_y^{(m)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(m)} \cdot g(x_i, y_k), \quad m = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad (3)$$

其中 $r_i(x)$ 和 $s_j(y)$ 分别是沿 x 轴和 y 轴的Lagrange插值多项式,给出如下:

$$r_i(x) = \frac{M(x)}{(x - x_i) \cdot M^{(1)}(x_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x, \quad (4)$$

$$M(x) = \prod_{j=1}^{N_x} (x - x_j), \quad M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j), \quad (5)$$

$s_j(y)$ 与 $r_i(x)$ 形式完全相同.

将式(1)、(2)、(3)带入式(4)、(5),确定出加权系数 $C_{ik}^{(n)}$, $C_{jk}^{(m)}$ 如下:

$$C_{ik}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k) \cdot M^{(1)}(x_k)}, \quad i \neq k, \quad (6)$$

$$C_{ik}^{(n)} = n \left[C_{ii}^{(n-1)} \cdot C_{ik}^{(1)} - \frac{C_{ik}^{(n-1)}}{x_i - x_k} \right], \quad i \neq k, \quad n = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad (7)$$

$$C_{ii}^{(n)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{N_x} C_{ik}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, N_x - 1. \quad (8)$$

$C_{jk}^{(m)}$ 的计算递推公式形式与 $C_{ik}^{(n)}$ 类同.

于是, 将用节点函数值表示的各节点处的高阶导数表达式代入控制方程, 即可求出各节点处的函数值, 再由式 (1) 即可求出待求函数的各非节点处的值.

2 卷积型控制方程推导

设函数 φ 和 ϕ 是定义在空间域 Ω 及时间域 T 上的连续函数, 则其卷积可定义为

$$\varphi(x, t) * \phi(x, t) = \int_0^t \varphi(x, \tau) \phi(x, t - \tau) d\tau.$$

矩形薄板的运动控制方程为

$$D \cdot^4 w + \rho h w u = f(x, y, t), \quad (9)$$

其中
$$\cdot^4 w(x, y, t) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

若取 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, a, b 分别为矩形板在 x, y 方向的长和宽.

其空间坐标无量纲化方程为

$$D \cdot^4 w + \rho h w u = f(\xi, \eta, t), \quad (10)$$

此时
$$\cdot^4 w(\xi, \eta, t) = \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4},$$

式中, D 为板的抗弯刚度, ρ 为材料密度, h 为板的厚度, $f(x, y, t)$ 为作用在板上的分布载荷, w 为板的动挠度.

设初始条件为

$$w(\xi, \eta, 0) = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, \eta, 0) = v_0. \quad (11)$$

将式 (10) 两边对时间 t 作卷积并引入初始条件 (11), 有

$$D \cdot^4 w * t + \rho h w = f * t + \rho h w_0 + \rho h t v_0. \quad (12)$$

此为将初始条件融为一体的具有完整初值问题特征的矩形薄板的卷积型动力控制方程.

3 时域函数选取

式 (10) 的动挠度 w 的分离变量解形式为^[9]

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} [A_{mn} \cos P_{mn} t + B_{mn} \sin P_{mn} t + \tau_{mn}(t)] \cdot \phi_{mn}(\xi, \eta), \quad (13)$$

其中, $\phi_{mn}(\xi, \eta)$ 为振型函数, $\tau_{mn}(t)$ 为方程 (10) 的一个特解, 如果是自由振动, $\tau_{mn}(t) = 0$, 初始速度为 0 时, B_n 为 0, 初始位移为 0 时, A_n 为 0. 对策动力下的非自由振动, 当取矩形薄板在静平衡位置时为计时起点, 则 $A_n = B_n = 0$. 若 $f(\xi, \eta, t) = Q(\xi, \eta) \cdot \sin \omega t$, 则特解 $\tau_n(t)$ 可由 Duhamal 积分得到

$$\begin{aligned} \tau_{mn}(t) &= \frac{1}{P_{mn}} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \sin P_{mn}(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \frac{1}{P_{mn}^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \frac{\omega}{P_{mn}} \sin P_{mn} t). \end{aligned} \quad (14)$$

对于恒力 ($\sin \omega t = 1$ 时) 作用下的受迫振动:

$$\tau_{mn}(t) = \frac{1}{P_{mn}^2} (1 - \cos P_{mn} t), \quad (15)$$

P_{mn} 为板的自然频率, 只与板的几何物理参数及支承情况等自身固有特性有关, 而与外来因素

无关.

$$P_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

λ_{mn}^2 为频率系数, 跟边界条件、 a/b 值有关, 有自由边界时, 还跟 Poisson 比有关, 具体数值参看文献[12-14].

对四边简支矩形板:

$$\lambda_{mn}^2 = (a\pi)^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right].$$

在板上沿 x, y 方向各取 N_x, N_y 个节点, 其节点时域函数可取为^[9]

$$w(\xi_i, \eta_j, t) = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t) \cdot \delta_{mn}^{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y), \quad (17)$$

式中, N_m, N_n 为级数项数, δ_{mn}^{ij} 为待定参数, $T_{mn}(t)$ 分别由自由振动(初始速度为 0、初始位移为 0)、恒力作用下的受迫振动、策动力下的受迫振动按下式选取:

$$T_{mn}(t) = \begin{cases} \cos P_{mnt} & (w_0 = 0), \\ \sin P_{mnt} & (v_0 = 0), \\ \frac{1}{P_{mn}^2} (1 - \cos P_{mnt}) & (f(\xi, \eta, t) = f(\xi, \eta)), \\ \frac{1}{P_{mn}^2 - \omega^2} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{P_{mn}} \sin P_{mnt} \right] & (f(\xi, \eta, t) = Q(\xi, \eta) \cdot \sin \omega t). \end{cases} \quad (18)$$

4 卷积型 DQ 半解析法

将节点时域函数(17)、(18), 代入将初始条件融为一体的具有完整初值问题特征的矩形薄板的卷积型动力控制方程(12). 在空间域上, x 方向取 N_x 个节点, y 方向取 N_y 个节点, 在时间域上取 $N_s = N_m \times N_n$ 个配点 $(t_1, t_2, \dots, t_{N_m \times N_n})$, 在全部时空域内构成 $N_x \times N_y \times N_m \times N_n$ 个配点, 对每一空间节点的每一时间配点都可由式(20)得到其卷积型的 DQ 方程:

$$D \left\{ \frac{1}{a^4} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(4)} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) * t_g \cdot \delta_{mn}^{ij} + \right. \\ \left. 2 \frac{1}{a^2 b^2} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_{ik}^{(2)} C_{jl}^{(2)} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) * t_g \cdot \delta_{mn}^{kl} + \right. \\ \left. \frac{1}{b^4} \sum_{l=1}^{N_y} C_{jl}^{(4)} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) * t_g \cdot \delta_{mn}^{il} \right\} + \rho h \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) \cdot \delta_{mn}^{ij} = \\ f(\xi_i, \eta_j, t_g) * t_g + \rho h w_0^j + \rho h v_0^{ij} \\ (i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y; g = 1, 2, \dots, N_s), \quad (19)$$

由此得到待定参数 δ_{mn}^{ij} 的可解线性 DQ 方程组.

将式(19)表达为矩阵形式

$$C \cdot \delta = F, \quad (20)$$

式中, δ 为待定参数列阵, C 为权系数矩阵, 由式(19)左端构成, F 为等效载荷列阵, 由式(19)右端构成. 式中所用到的卷积结果为

$$\begin{cases} \cos P_{mn}t * t = \frac{1}{P_{mn}^2}(1 - \cos P_{mn}t), \\ \sin P_{mn}t * t = \frac{t}{P_{mn}} - \frac{\sin P_{mn}t}{P_{mn}^2}, \\ 1 * t = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

式(19)中所涉及到的卷积计算式为

$$T_{mn}(t) * t = \begin{cases} \frac{1}{P_{mn}^2}(1 - \cos P_{mn}t) & \text{(自由振动(初速为0))}, \\ \frac{1}{P_{mn}^2} \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{P_{mn}^2}(1 - \cos P_{mn}t) \right] & \text{(恒力下受迫振动)}, \\ \frac{1}{P_{mn}^2 - \omega^2} \left[\left(\frac{t}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega^2} \right) - \frac{\omega}{P_{mn}} \left(\frac{t}{P_{mn}} - \frac{\sin P_{mn}t}{P_{mn}^2} \right) \right] & \text{(策动力下受迫振动)}; \end{cases}$$

$$f(\xi, \eta, t) * t = \begin{cases} 0 & \text{(自由振动(初速为0))}, \\ Q \frac{1}{2}t^2 & \text{(恒力下受迫振动)}, \\ Q(\xi, \eta) \left(\frac{t}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega^2} \right) & \text{(策动力下受迫振动)}. \end{cases}$$

每一种约束情况的矩形薄板都有4个边界的8个约束方程,可将式(20)中与节点 $i = 1, 2, \dots, (N_x - 1), N_x, j = 1, 2, (N_y - 1), N_y$ 相关的 $8N_m \times N_n$ 个代表边界条件的DQ方程分别用约束方程取代^[9]. 以四边简支为例,其约束方程为

$$\xi = 0, \xi = 1 \text{ 时, } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\eta = 0, \eta = 1 \text{ 时, } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0.$$

即有DQ约束方程:

$$\delta_{mn}^{lj} = \delta_{mn}^{N_x j} = 0, \sum_{k=1}^{N_x} C_{1k}^{(2)} \cdot w(\xi_k, \eta, t_g) = 0, \sum_{k=1}^{N_x} C_{N_x k}^{(2)} \cdot w(\xi_k, \eta, t_g) = 0, \quad (21a)$$

$$\delta_{mn}^{il} = \delta_{mn}^{N_y l} = 0, \sum_{k=1}^{N_y} C_{1k}^{(2)} \cdot w(\xi, \eta_k, t_g) = 0, \sum_{k=1}^{N_y} C_{N_y k}^{(2)} \cdot w(\xi, \eta_k, t_g) = 0, \quad (21b)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y; g = 1, 2, \dots, N_m \times N_n$.

取代后的方程即成为融入边界条件的可解线性方程组,由此即可求解式(20),解出 δ , 将其代入式(17)即得各节点的位移响应. 采用高阶Lagrange插值,即可得到全域内的动力响应位移场如下:

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} w(\xi_i, \eta_j, t) \cdot r_i(\xi) \cdot s_j(\eta). \quad (22)$$

5 算 例

例1 一四边简支矩形薄板,长为 $a = 40$ cm, 宽为 $b = 40$ cm, 板厚为 $t = 1$ cm, 弹性模量 $E = 15$ GN/cm², Poisson 比 $\mu = 0.3333$, 质量密度 $\rho = 0.008$ kg/cm³, 初位移为 $w_0 =$

0. $1 \sin(\pi x/a) \cdot \sin(\pi y/b)$ (cm), 初速度 $v_0 = 0$, 求板中点的动挠度.

例2 一四边简支矩形薄板, 长 $a = 50$ cm, 宽 $b = 50$ cm, 在矩形薄板上作用一均布交变载荷 $q = 0.3 \sin(800t)$ (N/cm). 初位移和初速度均为 0, 其几何物理参数同例 1, 求矩形薄板中点的动挠度.

例3 一四边简支矩形薄板, 在矩形薄板上作用一 $q = 1$ N/cm² 的突加均布载荷, 初位移和初速度均为 0, 其几何物理参数同例 2, 求矩形薄板中点的动挠度.

例4 一四边固支矩形薄板, 其载荷、初始条件及几何物理参数同例 3, 求矩形薄板中点的动挠度.

求得 4 个算例的结果表示如下: 为了更清楚看出结果的精确性, 对算例 1, 针对不同空间节点和时间配点结果, 列出具体的数值如表 1; 为了看出其结果的稳定性, 给出该结构在较长时间下的时程响应关系曲线如图 1; 为了显示本方法在板面各点各时刻上的精确性, 给出板在某具体时刻的立体振动图如图 2; 并与精确解比较, 发现均与理论解符合得很好.

对算例 2、3、4, 取空间节点数 $N_x = 11$, $N_y = 11$, 级数项 $N_m = 3$, $N_n = 1$, 作图表示出板中点挠度随时间的瞬态响应的具体情况如图 3.

说明(a) 本文解①②③分别表示 $N_x = 13$, $N_y = 13$ 时, 取 $N_m = 1$, $N_n = 1$; $N_m = 2$, $N_n = 1$, 以及 $N_m = 3$, $N_n = 2$ 等不同配点数时的解. 本文解④⑤⑥⑦分别表示 $N_m = 2$, $N_n = 1$ 时, 取 $N_x = 11$, $N_y = 11$; $N_x = 15$, $N_y = 15$; $N_x = 17$, $N_y = 17$ 以及 $N_x = 19$, $N_y = 19$ 等不同网格数目时的解.

表 1 算例 1 不同时间配点和空间节点下结果比较

解 w / cm	时间 t / s				
	0.002	0.010	0.022	0.040	0.062
精确解	$-9.915\ 948\ 081\ 0 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 936\ 7 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 305\ 1 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 102\ 8 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 481\ 9 \times 10^{-2}$
本文解①	$-9.915\ 948\ 150\ 5 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 992\ 6 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 315\ 1 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 162\ 7 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 526\ 6 \times 10^{-2}$
误差① e / (%)	$-7.02\text{E}-7$	$-7.02\text{E}-7$	$-7.02\text{E}-7$	$-7.01\text{E}-7$	$-7.02\text{E}-7$
本文解②	$-9.915\ 948\ 132\ 3 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 977\ 9 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 312\ 5 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 146\ 9 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 514\ 8 \times 10^{-2}$
误差② e / (%)	$-5.17\text{E}-7$	$-5.17\text{E}-7$	$-5.17\text{E}-7$	$-5.17\text{E}-7$	$-5.17\text{E}-7$
本文解③	$-9.915\ 948\ 129\ 4 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 990\ 1 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 396\ 2 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 041\ 6 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 657\ 9 \times 10^{-2}$
误差③ e / (%)	$-4.77\text{E}-7$	$-3.61\text{E}-7$	$-1.50\text{E}-7$	$-2.80\text{E}-7$	$3.06\text{E}-7$
本文解④	$-9.915\ 939\ 211\ 8 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 514\ 809\ 3 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 989\ 025\ 2 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 566\ 462\ 0 \times 10^{-2}$	$6.367\ 429\ 786\ 7 \times 10^{-2}$
误差④ e / (%)	$8.94\text{E}-5$	$8.94\text{E}-5$	$8.94\text{E}-5$	$8.94\text{E}-5$	$8.94\text{E}-5$
本文解⑤	$-9.915\ 948\ 080\ 7 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 936\ 5 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 305\ 0 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 102\ 5 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 481\ 7 \times 10^{-2}$
误差⑤ e / (%)	$2.10\text{E}-9$	$2.09\text{E}-9$	$2.08\text{E}-9$	$2.12\text{E}-9$	$2.12\text{E}-9$
本文解⑥	$-9.915\ 948\ 081\ 0 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 936\ 6 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 305\ 1 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 102\ 7 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 481\ 9 \times 10^{-2}$
误差⑥ e / (%)	$-2.02\text{E}-10$	$-2.43\text{E}-10$	$-3.15\text{E}-10$	$-1.38\text{E}-10$	$-1.48\text{E}-10$
本文解⑦	$-9.915\ 948\ 081\ 0 \times 10^{-2}$	$-7.968\ 521\ 936\ 6 \times 10^{-2}$	$-1.430\ 990\ 305\ 1 \times 10^{-2}$	$-8.542\ 574\ 102\ 7 \times 10^{-2}$	$6.367\ 435\ 481\ 9 \times 10^{-2}$
误差⑦ e / (%)	$-6.67\text{E}-12$	$1.65\text{E}-11$	$5.71\text{E}-11$	$-4.31\text{E}-11$	$-3.76\text{E}-11$

说明(b) 各对应误差为相对于精确解的相对误差.

说明(c) 空间网格按非均匀划分:

$$\xi_i = \frac{1 - \cos[(i-1)\pi/(N_x-1)]}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x,$$

$$\eta_j = \frac{1 - \cos[(j - 1)\pi/(N_y - 1)]}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y.$$

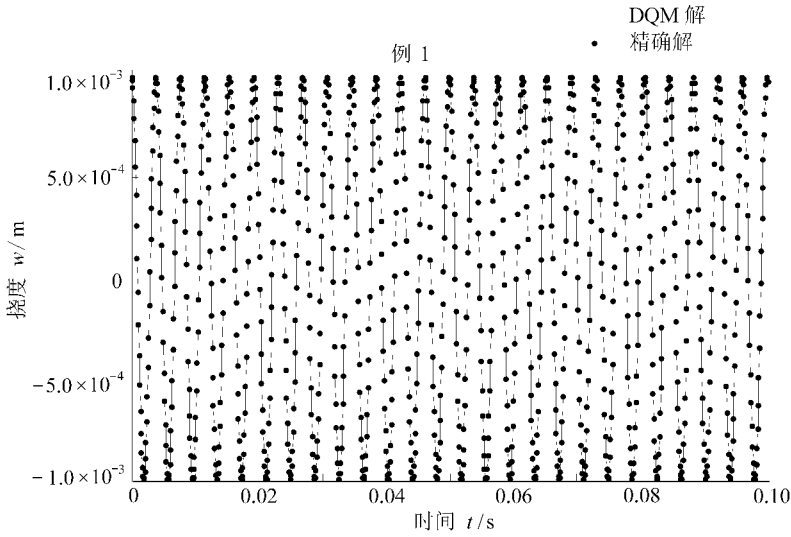


图 1 算例 1 板中点时程响应两种方法结果比较
($N_x = N_y = 17, N_m = N_n = 1$)

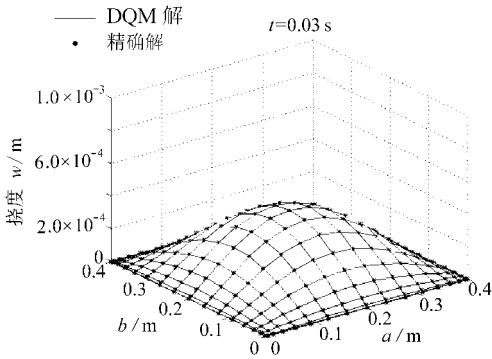


图 2 算例 1 板振动的立体形状图
($N_x = N_y = 17, N_m = N_n = 1$)

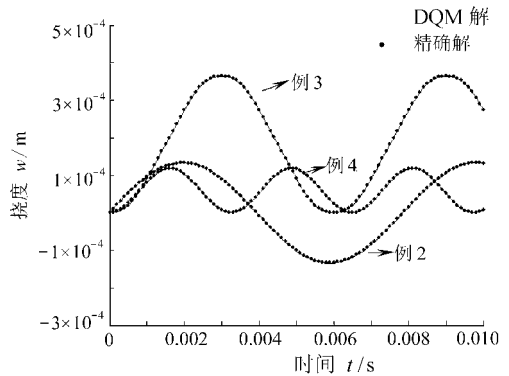


图 3 算例 2、3、4 两种方法结果比较

6 结 语

本文通过卷积将矩形薄板的瞬态动力响应问题的原始控制方程, 构造成包含初始条件的新的具有完整初值问题特征的控制方程. 其卷积型控制方程和卷积型变分原理一样, 在数学上和动力学初值问题完全等价, 有着合理的内涵, 它完全反映了有关初值问题的全部特征, 而且又避免了卷积型变分原理泛函的繁复, 可以取得 Gurtin 变分原理的计算效果. 本文直接从矩形薄板的卷积型控制微分方程出发, 在时间域上取解析函数, 在空间域上用 DQ 法离散, 成功地避免了传统时域差分方法的误差积累和解的稳定性等问题. 所以该方法既有很好的精确度和稳定性, 又有较好的空间适应性.

从表 1 中可以看出, 本方法随着空间节点数和时间配点的增加, 结果逐渐趋近于真解, 且

在划分很少的空间网格点数目和取很少的时间配点数情况下(根据大量实际计算与对比,一般空间网格点数目每维取 17 个以内,时间配点数取 3 个以内),就能得到工程应用中要求的足够精确的计算结果,从而在保证较高精度的前提下,大大节省了计算时间,在求解过程中,也只需求解一次线性方程组,这也大大提高了计算效率.该方法数学原理简单,具有很好的精度和稳定性,易于在计算机中实施,且编出的程序通用性好,在工程结构分析中有良好的应用前景,值得研究和推广.

[参 考 文 献]

- [1] Gurtin M E. Variation principles for linear initial-value problem[J]. Quarterly Journal of Applied Mechanics, 1964, **22**(3): 252-264.
- [2] 罗恩. 关于线弹性动力学中各种类型变分原理[J]. 中国科学(A 辑), 1987, **9**: 936-948.
- [3] Peng J S, Zhang J Y, Lewis R W. A semi-analytical approach for solving forced vibration problems based on convolution-type variational principle[J]. Computers and Structures, 1996, **59**(1): 167-179.
- [4] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, **34**(2): 235-238.
- [5] Cortinez V H. DQM for vibration analysis of composite thin-walled curved beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, **246**(3): 551-555.
- [6] Hsu M H. Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, **194**(1): 1-17.
- [7] Claudio F, Tomasiello S. Static analysis of a Bickford beam by means of the DQEM[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, **49**(1): 122-128.
- [8] Malekzadeha P, Karanib G. Polynomial and harmonic differential quadrature methods for free vibration of variable thickness thick skew plates[J]. Engineering Structures, 2005, **27**(8): 1563-1574.
- [9] 彭建设, 张鹰, 杨杰. 策动力下动力学初-边值问题的时域配点 DQ 空-时半解析法[J]. 计算物理, 2000, **17**(2): 54-58.
- [10] 熊铃华, 彭建设. 卷积型加权残值法解圆板的动力响应问题[J]. 西华师范大学学报, 2008, **29**(1): 72-75.
- [11] 李永莉, 赵志岗, 侯志奎. 卷积型加权残值法求解薄板的动力学问题[J]. 工程力学, 2006, **23**(1): 43-46.
- [12] 曹国雄. 弹性矩形薄板振动[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983.
- [13] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989.
- [14] Szilard R. 板的理论和分析——经典法和数值法[M]. 陈太平, 戈鹤翔, 周孝贤译. 北京: 中国铁道出版社, 1984.

Convolution-Type Semi-Analytic DQ Approach for Transient Response of Rectangular Plates

PENG Jian-she^{1,2}, YANG Jie³, YUAN Yu-quan⁴, LUO Guang-bing¹

(1. School of Physics and Electronic Information, China West Normal University, Nanchong, Sichuan 637002, P. R. China;

2. Chengdu University, Chengdu 610106, P. R. China;

3. School of Aerospace, Mechanical and Manufacturing Engineering, RMIT University, PO Box 71, Bundoora, VIC 3083, Australia;

4. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong, Sichuan 643000, P. R. China)

Abstract: The convolution-type Gurtin variational principle is known as the only variational principle, that is, from mathematical point of view, totally equivalent to the initial value problem system. The equation of motion of rectangular thin plates was first transformed to a new governing equation containing initial conditions by using convolution method. A convolution-type semi-analytical DQ approach, which involves differential quadrature (DQ) approximation in space domain and an analytical series expansion in time domain, was proposed to obtain the transient response solution. This approach offers the same advantages as Gurtin variational principle and at the same time, is much simpler in the calculation. Numerical results show that it is very accurate, yet computationally efficient for the dynamic response of plates.

Key words: convolution; transient response; differential quadrature method; semi-analytical method