

热传导率对不同传导参数下幂律非 Newton 流体流经连续伸展表面时热传导的影响*

F·A·萨拉马

(苏伊士运河大学 科学学院 数学系,埃及)

(周哲玮推荐)

摘要: 在一个具有吸入/吹出功能、幂律变化的伸展表面上,分析了二维稳定非 Newton 流体的流动。假定热传导率按温度的线性函数变化。将控制方程无量纲化后,用 Runge-Kutta 法进行数值求解。将该问题的一个特例所得到的一些结果,与以前发表的结果相比较,发现两者有着很好的一致性。考虑两种情况,一种对应着致冷的表面温度,另一种对应着均匀的表面温度。数值结果显示,对上述两种情况,可变热传导参数 β , 传质参数 d 和幂律指数 n , 对温度分布和 Nusselt 数有着重大的影响。

关键词: 非 Newton 流体; 热传导性; 幂律流体

中图分类号: O357 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.08.004

引 言

非 Newton 流体在加工工业中变得越来越重要,例如,多相混合物、聚合体的熔化和溶解、食品、生物流体、天然产物、农业和乳品废物等。幂律模型被广泛地应用于非 Newton 流体拟塑性和膨胀性的研究。Fox 等^[1]利用相似性和动量积分法,在恒定的表面速度和温度下,研究了幂律流体流经连续可移动平板时的流动。Chen 和 Char^[2]在一个初始静止又恒温的流体中,就吹出/吸入面作连续直线伸展时,研究了幂律表面温度和幂律表面热通量对热传导性能的影响。Ahmad 等^[3]就不可压缩粘性流体流经带有吸入功能的伸展平板时,研究了边界层流动中 Prandtl 数很大和很小时的热传导特性。在一个静止的 Newton 流体中,吸入/吹出伸展平面的驱动作用下,Ali^[4]获得了描述热传导及其流动的层流边界层方程的相似性解。Hassanien 等^[5]研究了幂律流体流过非恒温伸展平面时的流动及其热传导。Bourhan 等^[6]在均匀表面温度和致冷表面温度下,幂律伸展表面有吸入/吹出作用时,研究了非 Newton 流体的热传导问题。

在上述的这些研究中,都假定周围流体的物理性质是不变的。我们知道,有些物理性质是温度的函数^[7],只有温度的变化不大时,物理性质不变的假定是一个很好的近似。考虑流体的热传导率为温度的线性函数。Chiam^[8]研究了可变热传导率对直线伸展表面上的流动和热传

* 收稿日期: 2009-10-08; 修订日期: 2010-05-18

作者简介: Faiza A. Salama (E-mail: faizasalama@hotmail.com).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校。

导的影响,而 Elbashbeshy^[9], Hossain 等^[10], Datti 等^[11], Salem^[12]和 Seddeek 等^[13]的研究表明,流体的热传导率可能是温度的函数.因此,我们将拓展 Bourhan 等^[6]的研究,讨论热传导率随温度变化的问题.从而,本文用最一般的幂律速度和温度分布,在不同的传递参数下、流经连续伸展表面的非 Newton 流体中,研究可变热传导率对热传导的影响.

1 数学公式

由一个多孔表面的连续移动引起的,使一个原本静止的不可压缩的非 Newton 流体,产生二维稳定的层流流动,如图 1 所示. x 轴的原点在表面起点处,沿着移动表面方向, y 轴与其相垂直.假定连续伸展表面的速度和温度按幂律变化,即 $u_w = u_0 x^m$, $T_w = T_\infty + Cx^b$,其中 u_0 和 C 为常数, m 和 b 为指数.根据边界层假设,除 Boussinesq 近似外,考虑温度与热传导率相关,该问题的控制方程取如下形式^[6]:

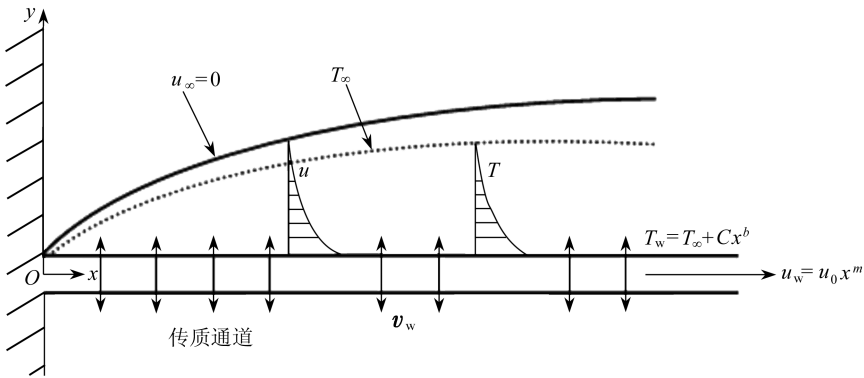


图 1 伸展表面速度和温度的幂律变化所引起的流动

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3)$$

其中, n 为流体性能指标, u 为 x 方向上的速度分量, v 为 y 方向上的速度分量, μ^* 为广义动黏度, ρ 为密度, c_p 为比定压热容, T 为温度.假定温度 - 热传导率关系 $k(T)$ 如下^[14]:

$$k(T) = k_\infty \left[1 + \beta \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \right], \quad (4)$$

其中, $\Delta T = T_w - T_\infty$, T_w 为移动表面的温度, β 为参数, k_∞ 为远离表面时流体的热传导率.

上述方程组的解必须满足以下的边界条件:

$$\begin{cases} \text{当 } y = 0 \text{ 时: } u = u_0 x^m, v = v_w(x), T = T_\infty + Cx^b; \\ \text{当 } y \rightarrow \infty \text{ 时: } u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, \end{cases} \quad (5)$$

其中常数 u_0 为远离边界层的来流速度, v_w 表示越过伸展表面的传质速度, $v_w < 0$ 为吸入速度, $v_w > 0$ 为吹出速度.另外还要考虑两种不同的热边界条件:表面温度是均匀的($b = 0$) 和表面

温度是致冷的($b = -1$)。注意到,当 m 为正时,表示从传质通道中流出的流体作加速运动,反之,当 m 为负时,流体作减速运动。

定义如下无量纲变量:

$$\begin{cases} \eta(x, y) = \frac{y}{x}, \psi = u_0 x^{2(n-1)/(n-2)} f(\eta), \\ \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \text{ 或 } \theta = \frac{T - T_\infty}{Cx^b}, \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (6)$$

其中 ψ 为满足连续性方程的流函数, η 为无量纲相似变量。

在上述定义下的速度分量变为

$$u = u_0 x^{n/(n-2)} f'(\eta), v = u_0 x^{n/(n-2)} \left[\frac{2(1-n)}{n-2} f(\eta) + \eta f'(\eta) \right]. \quad (7)$$

使用无量纲变量后,方程(1)自动满足,方程(2)和(3)变换为

$$Re \left(\frac{n}{n-2} f'^2 + \frac{2-2n}{n-2} f'' f' \right) = |f''|^{n-2} f''' (|f''| + (n-1)f''), \quad (8)$$

$$(1 + \beta\theta)\theta'' + \beta\theta'^2 = Pr \left(b\theta f' + \frac{2(1-n)}{n-2} f\theta' \right). \quad (9)$$

相应的边界条件取如下形式:

$$\begin{cases} f'(0) = 1, f(0) = d \frac{n-2}{2(1-n)}, f'(\eta_\infty) = 0, \\ \theta(\eta_\infty) = 0, \theta(0) = 1, \end{cases} \quad (10)$$

其中上标“ $'$ ”表示对 η 求导数, $Pr = (\rho c_p u_0 / k_\infty) x^{2(n-1)/(n-2)}$ 为广义 Prandtl 数, $Re = (\rho / \mu^*) u_0^{2-n}$ 为广义 Reynolds 数, $d = (v_w / u_0) x^{-n/(n-2)}$ 表示通过多孔表面传递质量的参数,吹出时为正值,吸入时为负值。

Nusselt 数是值得关注的重要物理量 Nu , 其形式为

$$Nu = -\theta'(0). \quad (11)$$

2 结果和讨论

方程(8)和(9)是三阶的 $f(\eta)$ 和二阶的 $\theta(\eta)$ 相耦合的,在边界条件(10)下的边值问题,用打靶法系统地估计 $f'(0)$ 和 $\theta'(0)$,用五阶 Runge-Kutta 法进行数值求解^[15].其数值解可以用 Matlab 计算软件求得.选取步长 $\Delta\eta = 0.001$,几乎对所有情况,都能达到 10^{-7} 的收敛标准.每次循环迭代后的 η_∞ ,由赋值表达式 $\eta_\infty = \eta_\infty + \Delta\eta$ 求出.对于每组物理参数 β, n, d 和 b ,当 $\eta = 0$ 处未知的边界条件值不变时,循环迭代成功,误差小于 10^{-7} ,用来确定 η_∞ 的最大值.对导数需要用合适的初始值序列来替换,使得区域端点的公差非常小.该初始值序列通过切线法给出,并用五阶 Runge-Kutta 法来求解该初值问题。

对不同的热传导参数 β 、传质参数 d 和幂律指数 n ,用上节讨论的数值方案进行数值计算.结果用图形表示,数值结果在图 2 ~ 图 8 中描出.分均匀的表面温度 ($b = 0$) 和致冷的表面温

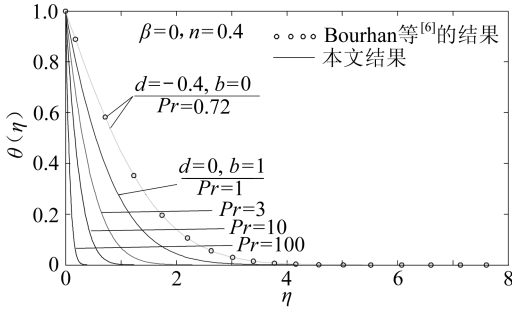


图2 当 $\beta = 0, n = 0.4, Re = 1$ 时, 在选定的 Pr 值下的温度分布

度 ($b = -1$) 两种情况, 在这些图形中, 给出了温度的分布, 阐述了 Nusselt 数的有趣特征。

为了评价数值结果的准确性, 将 $\beta = 0$ (不考虑热传导率) 和 $b = 0$ (表面温度均匀) 时的温度分布 $\theta(\eta)$ 与 Bourhan 等^[6] 的结果进行比较, 发现两者有着很好的一致性, 如图 2 所示。图 2 还给出了多个 Prandtl 数 Pr 下, 不考虑传质 ($d = 0$) 和热传导率 ($\beta = 0$) 时的温度分布。可以看到, 随着 Pr 的增加, 无量纲温度是下降的。这个结果与 Has-sanien 等^[5] 的结果相一致。这是因为 Prandtl 数的

增加, 导致热边界层厚度减少, 进一步导致流体温度的下降。

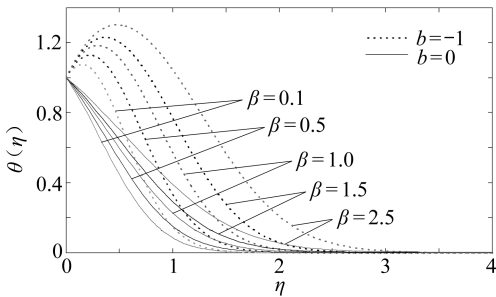


图3 当 $d = 0.2, n = 0.2, Pr = 10, Re = 1$ 时, 在选定的 β 值下的温度分布

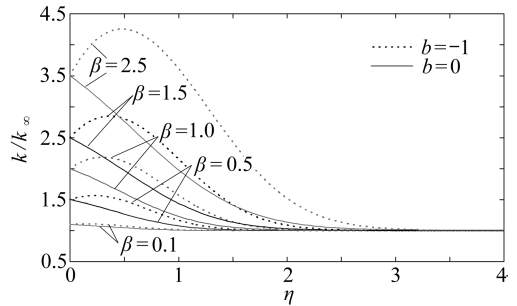


图4 当 $d = 0.2, n = 0.2, Pr = 10, Re = 1$ 时, 在选定的 β 值下热传导率的变化

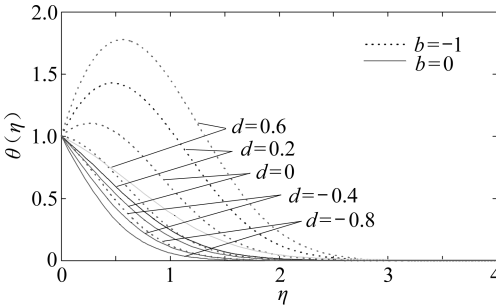


图5 当 $\beta = 1.5, n = 0.2, Pr = 10, Re = 1$ 时, 在选定的 d 值下的温度分布

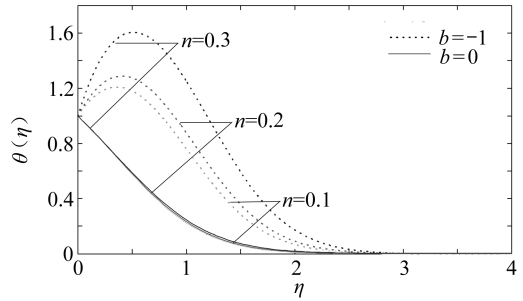


图6 当 $\beta = 1.5, d = 0.2, Pr = 10, Re = 1$ 时, 在选定的 n 值下的温度分布

当 $Pr = 10, n = 0.2$ 时, 对于均匀表面温度 ($b = 0$) 和致冷表面温度 ($b = -1$), 热传导参数 $\beta (= 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5)$ 的变化, 对无量纲温度 $\theta(\eta)$ 和热传导函数 k/k_∞ 的影响, 分别如图 3、图 4 所示。从图 3 可以看出, 热传导参数 β 的增加会引起温度的增加, 对致冷表面温度更为显著。另一方面, 从图 4 可以看出, 随着热传导参数 β 的增加, 热传导率 k/k_∞ 也增加。从图 4 还可以看出, 当 β 很小 ($\beta \rightarrow 0$) 时, 边界层里的热传导率趋于常数, 且在边界层的外边缘处接近单位 1。还可以看到热传导参数 β 的变化对温度分布的影响, 致冷的表面温度比均匀的表面温度更为显著。因此, 可以得出结论: 将温度与热传导关系列入能量方程中, 可以显著地改变流量和热

传递的物理特征。

对于 $b = -1$ (致冷的表面温度) 和 $b = 0$ (均匀的表面温度), $Pr = 10, \beta = 1.5$ 时, 图 5 给出了不同的 $d (= 0.6, 0.2, 0, -0.4, -0.8)$ 值时的温度分布. 可以看出, 对于 $b = 0$, 随着温度的单调降低, 表面冷却下来, 而对于 $b = -1$, 表面附近的温度出现细微的升高. 还可以看出, 当 $d > 0$ 时, 热量向可移动的表面传递, 并使热边界层的厚度增加; 当 $d < 0$ 时, 热量从可移动表面上传递出去, 并使热边界层的厚度减小。

对于 $b = -1$ (致冷的表面温度) 和 $b = 0$ (均匀的表面温度), $Pr = 10$ 时, 图 6 给出了幂律指数 $n (= 0.1, 0.2, 0.3)$ 对温度分布 $\theta(\eta)$ 的影响. 幂律指数 n 的增加, 将使温度升高, 导致热边界层变厚. 同时注意到, 最高温度出现在表面上, 对于所有的 n 值来说, $b = -1$ 要比 $b = 0$ 时, 表面上的最高温度要高. 这意味着致冷的表面温度, 其无量纲的温度分布更容易受到幂律指数 n 的影响。

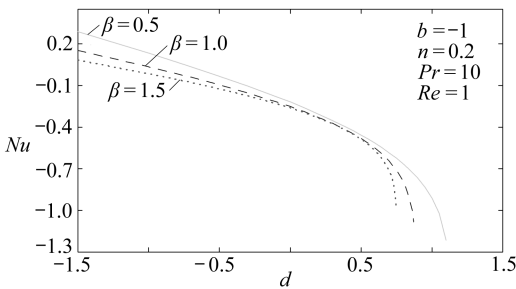


图 7 在致冷的表面温度下, Nusselt 数 Nu 随传质参数 d 的变化

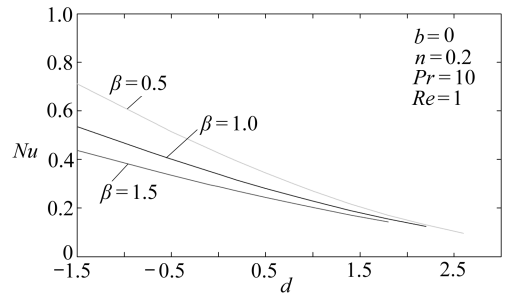


图 8 在均匀的表面温度下, Nusselt 数 Nu 随传质参数 d 的变化

图 7 和图 8 分别给出了 $b = -1$ (致冷的表面温度) 和 $b = 0$ (均匀的表面温度) 这两种情况下, 局部的 Nusselt 数 Nu 随传质参数 d 的变化. 可以看出, 热传导参数 β 的增大, 会导致 Nusselt 数的减小. 进一步可以清楚地看出, 吸入 ($d < 0$) 比吹出 ($d > 0$) 更能增强传热系数, 同时减小了热边界层的厚度. 因此, 吸入与吹出相比, 可以使表面更快地冷却. Nu 值为负, 表示热量注入表面, 使表面温度持续高于自由流温度; Nu 值为正, 表示热量从表面传递到介质, 使得热传递系数为正。

3 结 论

本文就非 Newton 流体, 当幂律伸展表面具有吸入/吹出功能, 温度与热传导率有依赖关系时, 分析了流体的流动及其热传递. 对于两种类型的热边界条件, 即均匀的表面温度 ($b = 0$) 和致冷的表面温度 ($b = -1$), 得到了不同物理参数下的温度分布. 主要结论如下:

- 1) Prandtl 数 Pr 的增加, 会使温度降低, 并使热传导的效率下降;
- 2) 提高热传导参数, 将增强边界层里的温度; 热传导参数的线性变化, 引起温度分布的线性变化;
- 3) 流动指数 n 的增大, 使温度和热传导效率升高, 且均匀表面温度下的传热系数比致冷表面温度时要高;
- 4) 对于致冷的表面温度 ($b = -1$), 热流注入或流出表面, 依赖于 β 和 d 的值. 同时发现, 对

于所有的 $d > 0$, 出现负传热; 另一方面, 对于均匀的表面温度 ($b = 0$), 减小 β , 将提高传热系数 ($d < 0$), 或者只有细微的提高 ($d > 0$, 吹出情况)。

参考文献:

- [1] Fox V G, Erickson L E, Fan L T. The laminar boundary layer on a moving continuous flat sheet immersed in a non-Newtonian fluid[J]. *A I Ch E J*, 1969, **15**(3): 327-333.
- [2] Chen C K, Char M. Heat transfer of a continuous stretching surface with suction or blowing [J]. *J Math Anal*, 1988, **135**(2): 568-580.
- [3] Ahmad N, Mubeen A. Boundary layer flow and heat transfer for the stretching plate with suction[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 1995, **22**(6): 895-906.
- [4] Ali M E. On thermal boundary layer on a power-law stretched surface with suction or injection[J]. *Int J Heat and Fluid Flow*, 1995, **16**(4): 280-290.
- [5] Hassanien A I, Abdullah A A, Gorla R S R. Flow and heat transfer in a power-law fluid over a nonisothermal stretching sheet[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 1998, **28**(9): 105-116.
- [6] Bourhan Tashtoush, Kodah Z, Al-Gasem A. Heat transfer analysis of a non-Newtonian fluid on a power-law stretched surface with suction or injection for uniform and cooled surface temperature[J]. *Int J Numerical Method for Heat & Fluid Flow*, 2000, **10**(4): 385-396.
- [7] Herwig H, Wicken G. The effect of variable properties on laminar boundary layer flow[J]. *War Stoffubertr*, 1986, **20**(1): 47-57.
- [8] Chiam T C. Heat transfer in a fluid with variable thermal conductivity over a linearly stretching sheet[J]. *Acta Mechanica*, 1998, **129**(1/2): 63-72.
- [9] Elbashbeshy E M A. Free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate in the presence of the magnetic field[J]. *Int J Eng Sci*, 2000, **38**(2): 207-213.
- [10] Hossain Md Anwar, Munir Md Sazzad, Rees David Andrew S. Flow of viscous incompressible fluid with temperature dependent viscosity and thermal conductivity past a permeable wedge with uniform surface heat flux[J]. *Int J Therm Sci*, 2000, **39**(6): 635-644.
- [11] Datti P S, Prasad K V, Subhas Abel M, Ambuja Joshi. MHD visco-elastic fluid flow over a non-isothermal stretching sheet[J]. *Int J Eng Sci*, 2004, **42**(8/9): 935-946.
- [12] Salem A M. The influence of thermal conductivity and variable viscosity on the flow of a micropolar fluid past a continuously semi-infinite moving plate with suction or injection[J]. *Il Nuovo Cimentio, B*, 2006, **121**(1): 35-42.
- [13] Seddeek M A, Salama F A. Effects of temperature dependent viscosity and thermal conductivity on unsteady MHD convective heat transfer past a semi-infinite vertical porous moving plate with variable suction[J]. *Computational Material Science*, 2007, **40**(2): 186-192.
- [14] Chiam T C. Heat transfer with variable thermal conductivity in a stagnation-point flow towards stretching sheet[J]. *Int Commun Heat Mass Transfer*, 1996, **23**(2): 239-248.
- [15] Adams J K, Rogers D F. *Computer-Aided Heat Transfer Analysis*[M]. New York: McGraw-Hill, 1973.

Effect of Thermal Conductivity on Heat Transfer for a Power-Law Non-Newtonian Fluid Over a Continuous Stretched Surface With Various Injection Parameter

Faiza A. Salama

(Department of Mathematics, Faculty of Science, Suez Canal University, Egypt)

Abstract: An analysis of the steady two-dimensional non-Newtonian flow on a power-law stretched surface with suction or injection was considered. The thermal conductivity was assumed to vary as a linear function of temperature. The transformed governing equations in the present study were solved numerically by using the Runge-Kutta method. Some of the results obtained for a special case of the problem were compared to the results published in a previous work and were found to be in excellent agreement. Two cases were considered, one corresponding to a cooled surface temperature and the other, to a uniform surface temperature. The numerical results show that variable thermal conductivity parameter β , injection parameter d and the power-law index n have significant influences on the temperature profiles and the Nusselt number in the above two cases.

Key words: non-Newtonian fluid; thermal conductivity; power-law fluid