

# 流经有热源多孔平板并伴有化学反应的 传热传质混合对流 MHD 流动\*

J·祖额科<sup>1</sup>, S·阿么德<sup>2</sup>

(1. 卡塔赫纳综合技术大学 流体工程技术系 工业工程 ETS, 卡塔赫纳(木尔西亚), 西班牙;  
2. 戈阿尔帕拉学院 数学系 流体动力学研究所, 阿萨姆邦-783101 戈阿尔帕拉, 印度)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 对流经无限竖直多孔平板的不可压缩粘性导电流体, 稳定的传热传质混合对流 MHD 流动问题, 给出了精确解和数值解. 假定均匀磁场横向作用于流动方向, 考虑了感应磁场及其能量的粘性和磁性损耗. 多孔平板有恒定的吸入速度并均匀地混入流动速度. 用摄动技术和数值方法求解控制方程. 得到了平板上速度场、温度场、感应磁场、表面摩擦力和传热率的分析表达式. 相关参数取不同数值时, 用图形表示出问题的数值结果. 讨论了从平板到流体的 Hartmann 数、化学反应参数、磁场的 Prandtl 数, 以及包括速度场、温度场、浓度场和感应磁场等其它参数的影响. 可以发现, 热源/汇或 Eckert 数的增大, 极大地提高了流体的速度值.  $x$ -方向的感应磁场随着 Hartmann 数、磁场的 Prandtl 数、热源/汇和粘性耗散的增大而增大. 但是, 研究表明, 随着破坏性化学反应 ( $K > 0$ ) 的增大, 流动速度、流体温度和感应磁场将减小. 对色谱分析系统和材料加工的磁场控制, 该研究在热离子反应堆模型、电磁感应、磁流体动力学传输现象中得到了应用.

**关键词:** MHD; 摄动技术; 网络模拟法; 混合对流; Eckert 数; 感应磁场; 粘性耗散; 热源/汇

中图分类号: O361 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.003

## 符号说明

$B_0$	均匀磁场	$b_x$	沿 $x$ -方向的感应磁场
$\bar{C}$	组分浓度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$C_f$	表面摩擦因数
$c_p$	比定压热容 ( $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ )	$\bar{C}_\infty$	自由流中组分的浓度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$\bar{C}_w$	壁面处组分的浓度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$D$	化学分子扩散系数 ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
$Ec$	Eckert 数/耗散的热	$g$	重力加速度 ( $\text{m}/\text{s}^2$ )
$Gr$	热 Grashof 数	$Gr_m$	质量的 Grashof 数
$J$	电流密度	$K$	化学反应参数

\* 收稿日期: 2010-02-24; 修订日期: 2010-07-28

作者简介: Joaquín Zueco (联系人. E-mail: joaquin.zueco@upct.es);  
Sahin Ahmed (E-mail: heat\_mass@yahoo.in).

本文原文为英文, 黄锋 译, 张禄坤 校.

$M$	Hartmann 数/磁场参数	$N$	单元数
$Nu$	Nusselt 数	$\bar{p}$	压力 (Pa)
$Pr_M$	磁场的 Prandtl 数	$Pr$	Prandtl 数
$Q$	热源/汇	$Sc$	Schmidt 数
$Sh$	Sherwood 数	$\bar{T}$	温度 (K)
$\bar{T}_w$	壁面处流体的温度 (K)	$\bar{T}_\infty$	自由流处流体的温度 (K)
$u$	$x$ -方向无量纲速度分量 (m/s)	$U$	无量纲自由流速度 (m/s)
$v_0$	无量纲吸入速度 (m/s)		
<b>希腊字母</b>			
$\alpha$	热量产出/吸收参数	$\beta$	传热体积膨胀系数 (K <sup>-1</sup> )
$\bar{\beta}$	传质体积膨胀系数 (K <sup>-1</sup> )	$\eta$	磁扩散
$\theta$	无量纲的流体温度 (K)	$\lambda$	热传导系数 (W/(m·K))
$\mu$	磁导率 (H/m)	$\nu$	动粘度 (m <sup>2</sup> /s)
$\rho$	密度 (kg/m <sup>3</sup> )	$\sigma$	导电率 (S/m)
$\tau$	剪应力 (N/m <sup>2</sup> )	$\phi$	无量纲的组分浓度 (kg/m <sup>3</sup> )
<b>下 标</b>			
$w$	壁面条件	$\infty$	自由流动条件

## 引 言

由于在地球物理学和工程中的应用,许多研究者提出了混合对流问题的解析解。混合对流问题是指:流体中由于重力和密度的差异出现的交互作用,造成了热能和化学类物体的同时扩散。混合对流问题稳定与否,是否计及传热传质,流经的竖直平板是无限的还是半无限的,有无化学反应等诸多问题受到了不同学者的广泛研究。鉴于此,Ganesan 和 Loganathan<sup>[1]</sup>就不可压缩粘性流体,通过一个脉冲设置的半无限等温平板,考虑有均匀的一级化学反应时,给出了有质量扩散的瞬时自然对流数值解。Ghaly 和 Seddeek<sup>[2]</sup>分析了不同粘度、化学反应、传质传热对半无限水平板上层流的影响。Muthucumaraswamy 和 Ganesan<sup>[3]</sup>在自然对流条件下,数值研究了不可压缩粘性流体,瞬时通过半无限等温平板的流动方式。Hossain 等<sup>[4]</sup>研究表面温度和浓度的变化,对流经竖直平板自然对流的影响。

Khair 和 Bejan<sup>[5]</sup>在传热传质流动的研究中,做出了重大的贡献。Lin 和 Wu<sup>[6]</sup>在稀释液和水溶液中,就大多数实际化学类物体的浮力比,在整个区域内同时发生传热传质问题进行了分析。Muthucumaraswamy 等<sup>[7]</sup>研究了传热传质对流经一个脉冲设置无限竖直平板时流动的影响。Chamkha<sup>[8]</sup>在有热量产出/吸收时,研究了化学反应对传热传质层状边界流动的影响。Chen<sup>[9]</sup>在靠近垂直表面的 MHD 自然对流中,分析了导电流体的传热传质问题。Aldoss 等<sup>[10]</sup>研究了局部加速度项,对流经垂直平板的 MHD 瞬时自由对流的影响。Ahmed<sup>[11]</sup>在有横向磁场作用时,研究了化学反应和粘性耗散,对流经无限垂直多孔平板的不稳定传热传质的影响。

最近,Ahmed<sup>[12]</sup>就流经的无限垂直多孔平板作加速运动时,研究了传热传质对三维稳定自由对流的影响。还有,Ahmed<sup>[13]</sup>就不可压缩粘性流体,流经以无限多孔平板为边界的高孔隙度介质时,研究了随时间震荡的周期性横向渗透,对传热流动的影响。Ahmed<sup>[14]</sup>就自由流速度在一个非零平均常数附近震荡,流经带有恒定吸入速度和热汇的垂直多孔平板时,研究了周期性传热对不稳定混合对流 MHD 流动的影响。

Zueco<sup>[15]</sup>就耗散流体流经承受常热通量的垂直平板时,对不稳定自由对流 MHD 流动进行了数值分析。Ahmed 和 Liu<sup>[16]</sup>就不可压缩粘性流体流经无限垂直多孔平板,平板横向有随时间

作正弦震荡的吸入速度和常自由流速度时,分析了混合对流和传质对三维震荡流动的影响。

据作者所知,到目前为止,还没有人尝试下述问题的研究:不可压缩粘性导电流体承受横向磁场作用,流经无限竖直等温多孔平板,平板伴有恒定的吸入速度,有一级化学反应发生,计及感应磁场以及能量的粘性和磁性耗散时,作稳定的传热传质混合对流流动问题。因为该研究的应用包括,层状磁-气动力学,材料加工,以及 MHD 推进的热-流体动力学,作者的工作就是进行这种尝试。

## 1 数学分析

具有一级均匀化学反应的,不可压缩粘性导电流体,流经多孔竖直无限等温平板时,考虑稳定的传热传质混合的 MHD 流动(见图 1)。问题满足下列假定:

- 除浮力项中的密度外,所有的流体特性均为常数;
- Eckert 数  $Ec$  很小;
- 平板受有恒定的吸入速度;
- 强度为  $B_0$  的均匀磁场,横向作用于流体主要的流动方向,并考虑感应磁场的影响;
- 磁场的 Prandtl 数比 Hartmann 数大得多;
- 在散体和流体之间存在均匀的一级化学反应,反应速率为常数  $\bar{k}$ ;
- 在散体和流体的混合物中,本文假定散体的浓度,比其他化学组分的浓度小得多,从而忽略了 Soret 和 Dufour 的影响。

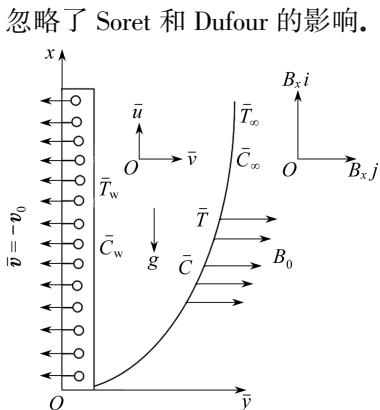


图 1 物理示意图

考虑导电流体承受一个外加磁场作用时的流动及其传热。流体流经横向磁场时,产生一个感应磁场。在电流和磁场的联合作用下,产生一个抵抗流体运动的力。原磁场受到感应磁场的扰动,流体速度也受到影响。假定强度为  $B_0$  的恒定磁场作用在  $y$  方向,所产生的感应磁场为  $\mathbf{B}$ 、感应电场为  $\mathbf{E}$ 。

引入坐标系  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ,  $\bar{x}$ -轴沿平板竖直向上,  $\bar{y}$ -轴垂直平板并指向流体内部,  $\bar{z}$ -轴沿平板宽度方向。设平板在  $\bar{x}$ -方向上足够长,流动平行于  $\bar{x}$ -轴。流体中任意一点  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  上,流体速度为  $(\bar{u}, \bar{v}, 0)$ , 磁感应矢量为  $(\bar{b}_x, 0, 0)$ 。由于平板在  $\bar{x}$ -方向的长度是无限的,因此除了压力外,我们假定所有的物理量与  $\bar{x}$  无关。壁面维持恒定的温度  $\bar{T}_w$  和浓度  $\bar{C}_w$ , 它们都分别高

于周围环境的温度  $\bar{T}_\infty$  和浓度  $\bar{C}_\infty$ 。

当忽略位移电流和自由电荷时,电磁量满足 Maxwell 方程<sup>[17]</sup>:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1d)$$

其中,  $\mathbf{J}$  为电流密度。矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{J}$  仅在  $\bar{z}$  方向上有非零的分量, 即  $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$  和  $\mathbf{J} = (0, 0, J_z)$ , 由方程(1d)有

$$J_z = \sigma [E_z + \mu B_0 \bar{u} - \mu \bar{v} \bar{b}_x], \quad (2)$$

矢量方程(1a)和(1b)被简化为下面的标量方程:

$$\frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}} = -J_z, \quad (3a)$$

$$\frac{dE_z}{d\bar{y}} = 0, \quad (3b)$$

在方程(2)和方程(3a)中消去  $J_z$ , 得到

$$\frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}} = -\sigma [E_z + \mu B_0 \bar{u} - \mu \bar{v} \bar{b}_x], \quad (4)$$

在方程(3b)和方程(4)中消去  $E_z$ , 得到

$$\frac{d^2 \bar{b}_x}{d\bar{y}^2} = \sigma \mu \left[ -B_0 \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} + \bar{v} \frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}} \right], \quad (5)$$

其中,  $\sigma$  为电导率,  $\mu$  为磁导率. 在前面的假定, 以及 Boussinesq 近似和边界层理论的范围, 本问题的控制方程为:

$x$ -方向的动量方程

$$\rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}}. \quad (6)$$

由于远离流动中心处的速度梯度不是很大, 对于小  $\mu$  数, 可取方程(6)中的粘性项为 0. 此外, 沿  $x$ -方向的感应磁场没有梯度变化, 故有

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} - \rho_\infty g. \quad (7)$$

在方程(6)和方程(7)中消去压力项, 得到

$$\rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = (\rho_\infty - \rho) g + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}}. \quad (8)$$

由 Boussinesq 近似

$$\rho_\infty - \rho = \rho_\infty \beta (\bar{T} - \bar{T}_\infty) + \rho_\infty \bar{\beta} (\bar{C} - \bar{C}_\infty). \quad (9)$$

将方程(9)代入方程(8), 注意到  $\rho_\infty$  接近等于 1, 因此动量方程简化为

$$-v_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = g\beta (\bar{T} - \bar{T}_\infty) + g\bar{\beta} (\bar{C} - \bar{C}_\infty) + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{B_0}{\mu \rho} \frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}}. \quad (10)$$

连续方程

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} = 0, \quad (11)$$

满足  $v = -v_0 = a(\text{const})$ .

根据磁场 Gauss 定理:

$$\frac{d\bar{b}_y}{d\bar{y}} = 0, \quad (12)$$

满足  $\bar{b}_y = B_0 = a(\text{const}) =$  外加的磁场强度.

能量方程

$$-v_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{y}^2} + \frac{v}{c_p} \left( \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma \mu^2 \rho c_p} \left( \frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}} \right)^2 + \frac{Q}{\rho c_p} (\bar{T} - \bar{T}_\infty). \quad (13)$$

磁感应方程(即方程(5)),  $\eta = 1/(\sigma \mu)$  为磁扩散率

$$-v_0 \frac{d\bar{b}_x}{d\bar{y}} = \eta \frac{d^2 \bar{b}_x}{d\bar{y}^2} + B_0 \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}. \quad (14)$$

扩散方程

$$-v_0 \frac{d\bar{C}}{d\bar{y}} = D \frac{d^2\bar{C}}{d\bar{y}^2} - \bar{K}(\bar{C} - \bar{C}_\infty). \quad (15)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \bar{y} = 0: \bar{u} = 0, \bar{T} = \bar{T}_w, \bar{b}_x = 0, \bar{C} = \bar{C}_w, \\ \bar{y} \rightarrow \infty: \bar{u} \rightarrow \bar{U}, \bar{T} \rightarrow \bar{T}_\infty, \bar{b}_x \rightarrow 0, \bar{C} \rightarrow \bar{C}_\infty. \end{cases} \quad (16)$$

引入无量纲量:

$$\begin{cases} y = \frac{v_0\bar{y}}{v}, u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}}, \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_\infty}{\bar{T}_w - \bar{T}_\infty}, \phi = \frac{\bar{C} - \bar{C}_\infty}{\bar{C}_w - \bar{C}_\infty}, Sc = \frac{v}{D}, \\ Gr = \frac{g\beta v(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)}{\bar{U}v_0^2}, Gr_m = \frac{g\beta v(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)}{\bar{U}v_0^2}, Ec = \frac{\bar{U}^2}{c_p(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)}, a = \frac{Qv^2}{\lambda v_0^2}, \\ M = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2} \frac{B_0}{\bar{U}}, Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, b_x = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\bar{b}_x}{\bar{U}}, Pr_M = \frac{v}{\eta}, K = \frac{v\bar{K}}{v_0^2}. \end{cases} \quad (17)$$

方程(10)和方程(13) ~ (15) 的无量纲形式为

$$-\frac{du}{dy} = Gr\theta + Gr_m\phi + \frac{d^2u}{dy^2} + M \frac{db_x}{dy}, \quad (18)$$

$$-\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{Pr} \frac{d^2\theta}{dy^2} + Ec \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{Ec}{Pr_M} \left(\frac{db_x}{dy}\right)^2 + \frac{\alpha\theta}{Pr}, \quad (19)$$

$$-\frac{db_x}{dy} = \frac{1}{Pr_M} \frac{d^2b_x}{dy^2} + M \frac{du}{dy}, \quad (20)$$

$$-\frac{d\phi}{dy} = \frac{1}{Sc} \frac{d^2\phi}{dy^2} - K\phi, \quad (21)$$

其中,  $Pr_M$  为磁场的 Prandtl 数,  $Pr$  为 Prandtl 数,  $K$  为化学反应参数,  $M$  为磁场参数,  $Ec$  为 Eckert 数,  $Gr$  为热量的 Grashof 数,  $Gr_m$  为质量的 Grashof 数,  $\alpha$  为热量的产出 / 吸收参数,  $Sc$  为 Schmidt 数.

相应的无量纲边界条件为

$$\begin{cases} y = 0: u = 0, \theta = 1, b_x = 0, \phi = 1, \\ y \rightarrow \infty: u \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0, b_x \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0. \end{cases} \quad (22)$$

质量扩散方程(21)是可以变化的,当  $K > 0$  时,是破坏性化学反应(表示吸热,即热量被吸收);若  $K < 0$  时,是生成性化学反应(表示放热,即产生热量). 能量方程(19)也是可以变化的,  $\alpha > 0$  表示产出热量,  $\alpha < 0$  表示吸收热量.

系统由方程(18) ~ (21) 得到完美的表达,并求得半解析解,或数值解(NSM). 本文尝试用这两种方法求解之.

## 2 求解方法

### 2.1 摄动法

摄动法是以某些“小”参数——度量与精确解之间的偏差——的幂级数项表达式来表达所期望的解. 幂级数的主要项是该精确求解问题的解, 幂级数的后续项描述了该解(由于偏离原问题)的偏差. 精确求解问题的数学描述: 如果该问题能够通过增加一个“小”参数项(本研

究中为 Eckert 数),加以公式化表示的话,那么摄动理论适用.

方程(21)满足边界条件(22)的解为

$$\phi = e^{-\xi y}. \quad (23)$$

现在,为了在边界条件(22)下,求解方程(18)~(20),注意到,对所有的不可压缩流体,  $Ec < 1$ , 因而,假定该方程组有如下形式的解:

$$\mathfrak{R}(y) = \mathfrak{R}_0(y) + Ec\mathfrak{R}_1(y) + O(Ec^2), \quad (24)$$

其中,  $\mathfrak{R}$  表示  $u, \theta$  或  $b_x$ .

将方程(24)代入方程(18)~(20),根据同阶次项的系数相等,并不计  $O(Ec^2)$  项,得到下面微分方程:

$$u_0'' + u_0' = -Gr\theta_0 - Gr_m\phi - Mb_{x_0}', \quad (25)$$

$$u_1'' + u_1' = -Gr\theta_1 - Mb_{x_1}', \quad (26)$$

$$\theta_0'' + Pr\theta_0' + \alpha\theta_0 = 0, \quad (27)$$

$$\theta_1'' + Pr\theta_1' + \alpha\theta_1 = -Pr(u_0')^2 - \frac{Pr}{Pr_M}(b_{x_0}')^2, \quad (28)$$

$$b_{x_0}'' + Pr_M b_{x_0}' = -MPr_M u_0', \quad (29)$$

$$b_{x_1}'' + Pr_M b_{x_1}' = -MPr_M u_1'. \quad (30)$$

边界条件(22)简化为

$$\begin{cases} y=0: u_0=0, u_1=0, \theta_0=1, \theta_1=1, b_{x_0}=0, b_{x_1}=0, \\ y \rightarrow \infty: u_0 \rightarrow 1, u_1 \rightarrow 1, \theta_0 \rightarrow 0, \theta_1 \rightarrow 0, b_{x_0}=0, b_{x_1}=0. \end{cases} \quad (31)$$

方程(25)~(30)满足边界条件(31)的解为

$$\theta_0(y) = e^{-ay}, \quad (32)$$

$$u_0(y) = 1 + A_1 e^{-ay} + A_2 e^{-\xi y} + A_3 e^{-by}, \quad (33)$$

$$b_{x_0}(y) = A_4 e^{-ay} + A_5 e^{-\xi y} + A_6 e^{-by} + A_7 e^{-Pr_M y}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(y) = & D_1 e^{-2ay} + D_2 e^{-2\xi y} + D_3 e^{-2by} + D_4 e^{-2Pr_M y} + D_5 e^{-(a+\xi)y} + D_6 e^{-(a+b)y} + \\ & D_7 e^{-(b+\xi)y} + D_8 e^{-(a+Pr_M)y} + D_9 e^{-(\xi+Pr_M)y} + D_{10} e^{-(b+Pr_M)y} + D_{11} e^{-ay}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} b_{x_1}(y) = & E_1 e^{-2ay} + E_2 e^{-2\xi y} + E_3 e^{-2by} + E_4 e^{-2Pr_M y} + E_5 e^{-(a+\xi)y} + E_6 e^{-(a+b)y} + \\ & E_7 e^{-(b+\xi)y} + E_8 e^{-(a+Pr_M)y} + E_9 e^{-(\xi+Pr_M)y} + E_{10} e^{-(b+Pr_M)y} + E_{11} e^{-ay} + E_{12} e^{-by}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} u_1(y) = & F_1 e^{-2ay} + F_2 e^{-2\xi y} + F_3 e^{-2by} + F_4 e^{-2Pr_M y} + F_5 e^{-(a+\xi)y} + E_6 e^{-(a+b)y} + \\ & F_7 e^{-(b+\xi)y} + F_8 e^{-(a+Pr_M)y} + F_9 e^{-(\xi+Pr_M)y} + F_{10} e^{-(b+Pr_M)y} + F_{11} e^{-ay} + \\ & F_{12} e^{-by} + F_{13} e^{-y}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中,  $A_1 \sim A_7, D_1 \sim D_{11}, E_1 \sim E_{12}, F_1 \sim F_{13}$  为参数,由于篇幅所限,这里没有具体给出.

## 2.2 数值法(网络模拟法 NSM)

本文应用网络模拟法(NSM),在边界条件(22)下求解常微分方程(18)~(21).在大范围热流动性模拟中,这种计算技术取得了极好的效果. Zueco-Jordán<sup>[15]</sup>应用 NSM 研究了不稳定磁流体的对流问题. Zueco<sup>[18]</sup>在二维通道中,分析了受热粘性瞬时热对流问题.最近, Zueco 和 Hernández-González<sup>[19]</sup>应用该方法,得到细胞组织中有限扩散气泡动力学的数值解,而 Zueco 和 Bég 是作为旋转圆盘间挤压薄膜磁流体润滑来进行研究的(见文献[20]). NSM 是基于热学量和电学量之间经典的热-电类比性.这里有必要将这种类比性加以推广,推广到速度、感应磁场和浓度等其它变量.

NSM 的第一阶段:将每一控制体的点,通过空间离散化(应用二阶中心差分格式,将边界

层方程离散化),得到一组公式化的有限差分方程。在这些方程的基础上,按方程形式等价,设计一个电路网络。所谓等价者,可变的电压( $u$ )、感应磁场( $b_x$ )、温度( $\theta$ )和浓度( $\phi$ )等价于可变的电压,而可变的电压梯度( $\partial u/\partial y$ )、感应磁场梯度( $\partial b_x/\partial y$ )、温度梯度( $\partial \theta/\partial y$ )和浓度梯度( $\partial \phi/\partial y$ )等价于可变的电流。由无量纲的动量平衡方程、磁感应方程、能量方程和质量方程,最终得到有限差分方程为

$$(u_{i+1} - u_{i-1})/2 + \Delta y Gr \theta_i + \Delta y Gr_m \phi_i + [(u_{i-1} - u_i)/(\Delta y) - (u_i - u_{i+1})/(\Delta y)] + M(b_{x,i+1} - b_{x,i-1})/2 = 0, \quad (38)$$

$$Pr(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})/2 + [(\theta_{i-1} - \theta_i)/(\Delta y) - (\theta_i - \theta_{i+1})/(\Delta y)] + PrEc(u_{i+1} - u_{i-1})^2/(4\Delta y) + PrEc(b_{x,i+1} - b_{x,i-1})^2/(4\Delta y Pr_M) + \Delta y \alpha \theta_i = 0, \quad (39)$$

$$Pr_M(b_{x,i+1} - b_{x,i-1})/2 + [(b_{x,i-1} - b_{x,i})/(\Delta y) - (b_{x,i} - b_{x,i+1})/(\Delta y)] + MPr_M(u_{i+1} - u_{i-1})/2 = 0, \quad (40)$$

$$Sc(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})/2 + [(\phi_{i-1} - \phi_i)/(\Delta y) - (\phi_i - \phi_{i+1})/(\Delta y)] - \Delta y K \phi_i = 0. \quad (41)$$

离散化方程(38)~(41)的每一项都看作是一个电流,同时根据电相似及其电流的 Kirchhoff 原理,得到各个方程的网络模型。许多网络串联连接成了整个介质(实验确定几套网格尺寸后,选择  $N = 500$  个单元的积分区域),边界条件需要添加特定的电力设备(电流或电压的控制源)。一旦完成了网络模型的设计,因为组成该网络的设备不是很多,只需不多的设计标准<sup>[21]</sup>,利用 PC 计算机代码进行模拟计算,得到数值解。

### 3 表面摩擦力

由于在壁面上形成粘滞应力,边界层在平板上产生阻力。平板表面上粘滞应力为

$$\tau = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \tau_0 + Ec\tau_1, \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_0 &= u_0'(0) - aA_1 - \xi A_2 = -bA_3, \\ \tau_1 &= u_1'(0) = -2aF_1 - 2\xi F_2 - 2bF_3 - 2Pr_M F_4 - (a + \xi)F_5 - (a + b)F_6 - \\ &\quad (b + \xi)F_7 - (a + Pr_M)F_8 - (\xi + Pr_M)F_9 - \\ &\quad (b + Pr_M)F_{10} - aF_{11} - bF_{12} - F_{13}. \end{aligned}$$

### 4 传热比率

经常用 Nusselt 数来测定传热效率。平板上(即  $y = 0$ )的无量纲热通量可以用 Nusselt 数  $Nu$  给出如下:

$$Nu = \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = Nu_0 + EcNu_1, \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} Nu_0 &= \theta_0'(0) = -1, \\ Nu_1 &= \theta_1'(0) = -2aD_1 - 2\xi D_2 - 2bD_3 - 2Pr_M D_4 - (a + \xi)D_5 - (a + b)D_6 - \\ &\quad (b + \xi)D_7 - (a + Pr_M)D_8 - (\xi + Pr_M)D_9 - (b + Pr_M)D_{10} - aD_{11}. \end{aligned}$$

### 5 结果及讨论

不可压缩粘性导电液体,流经无限竖直平板,在流动横方向上有横向磁场作用时,研究伴

有传热传质的稳定的混合对流问题,在有一级化学反应时,考虑了感应磁场,粘性和磁场的能量损耗.应用摄动技术,得到了速度场、温度、组分浓度、感应磁场、摩擦阻力和 Nusselt 数的解析表达式.数值研究了(NMS)诸多流动参数:磁场参数  $M$ 、化学反应参数  $K$ 、磁场的 Prandtl 数  $Pr_M$ 、Prandtl 数  $Pr$ 、Eckert 数  $Ec$  等,对速度场、沿  $x$ -方向的感应磁场、温度场及浓度场的影响,其结果用图 2 ~ 图 9 给出.

为了弄清楚问题的物理本质,我们对速度场、温度场、感应磁场和组分浓度进行了数值计算,并以图形形式给出了其数值结果.取 Prandtl 数  $Pr$  等于 0.71,相当于在一个大气压、20℃ 下的空气中.  $M, K, Pr_M, Sc$  和  $\gamma$  的值任意选取.热 Grashof 数  $Gr$  和 Eckert 数  $Ec$  取正值,相当于混合对流流过冷却的平板.实际中, Schmidt 数 ( $Sc$ ) 的值,表现为不同组分的存在:氢 ( $Sc = 0.30$ , 在导电空气中扩散)、氧 ( $Sc = 0.60$ )、氨 ( $Sc = 0.78$ )、二氧化碳 ( $Sc = 0.94$ ),在这些案例中,组分的扩散超过了动量的扩散.

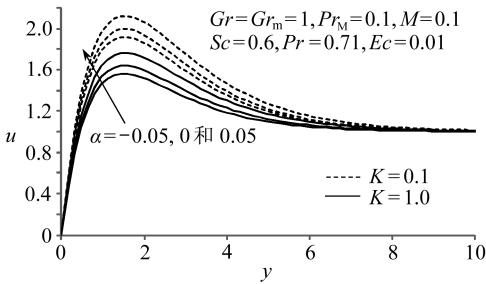


图 2  $\alpha$  和  $K$  对速度场的影响

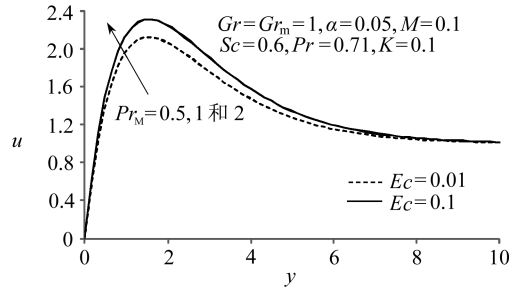


图 3  $Pr_M$  和  $Ec$  对速度场的影响

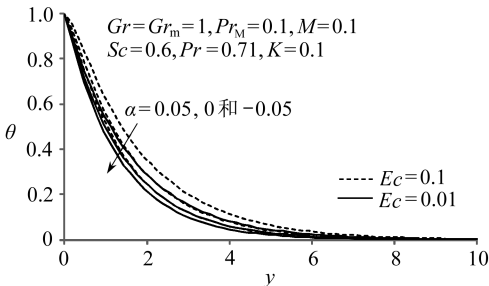


图 4  $\alpha$  和  $Ec$  对温度场的影响

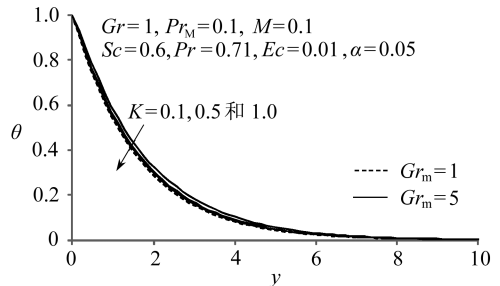


图 5  $Gr_m$  和  $K$  对温度场的影响

图 2 就致冷平板 ( $Gr > 0$ ),即自然对流的流体使热量离开平板向边界层传送,对导电空气 ( $Pr = 0.71$ ),给出了的热源/汇参数 ( $\alpha$ ) 和吸热性化学反应参数 ( $K$ ) 的综合影响.随着  $\alpha$  由  $-0.05$  (热汇),经过 0 增大至 0.05 (热源),速度明显增大,即呈加速流动.吸热时,浮力减小,流速减慢,因此引起速度曲线的下降.伴随着参数  $K$  由 0.1 上升至 1.0,壁面处的速度值也明显减小,即流动变缓.不论  $\alpha$  或  $K$  为何值,边界层区域没有出现回流,即流动方向的改变,强调这一点十分重要.在整个区域内,速度  $u$  保持正值.

图 3 就磁场的 Prandtl 数 ( $Pr_M$ ) 和 Eckert 数 ( $Ec$ ) 变化时,图示了弱横向磁场 ( $M = 0.1$ ) 的速度响应.观察发现,当 Eckert 数取固定值 0.01 或 0.1,  $Pr_M$  从 0.5 经 1.0,增大至 2.0 时,速度场没有变化,即速度曲线在边界层里为常数.但是,保持  $Pr_M$  的值不变, Eckert 数从 0.01 增大至 0.1 时,得到一条递增的速度曲线.无论  $Pr_M$  和  $Ec$  如何组合,边界层里没有出现回流.

对不同数值的热源/汇参数 ( $\alpha$ ) 和 Eckert 数 ( $Ec$ ),温度曲线 ( $\theta$ ) 如图 4 所示.流体温度在平板表面达到最大值,然后逐渐减小至远离平板自由流动时的 0 值.可以发现,流体温度随着  $Ec$  的增大而增大.在本研究中,我们仅关注正的  $Ec$  值,对应于致冷平板,即热量从平板向流体



流失。我们还注意到,  $Ec$  的增大引起 Joule 传热的增大, 正是磁场向流体边界层增能, 由于在拽拉流体中做的功, 在本研究中已考虑了其影响。所以, 流体温度随着  $\alpha$  由  $-0.05$  经  $0$  增大至  $0.05$ , 而显著提高。温度曲线的上升, 伴随着热边界层厚度的增大。

由图 5 发现, 随着化学反应参数  $K$  的增大, 温度曲线是下降的。  $Gr_m = 1.0$  时,  $K$  的影响并不有效, 而当  $Gr_m = 5.0$  时, 得到的温度梯度更加重要。 因此, 图 5 表明, 化学反应参数  $K$  的增大, 对于小值质量的 Grashof 数  $Gr_m$  (不可能在图中加以区分) 温度场是逐渐减小的。 另外, 在图中还可以发现, 当  $Gr_m$  从  $1.0$  增大到  $5.0$  时, 温度场是增大的。

在有热汇 ( $\alpha = -0.8$ ) 和氧气 ( $Sc = 0.60$ , 在空气中扩散) 存在时, 图 6 给出 Hartmann 数 ( $M$ ) 和磁场的 Prandtl 数 ( $Pr_M$ ) 对感应磁场  $b_x$  的影响。 对于  $M$  和  $Pr_M$  的所有组合,  $b_x$  值始终为负, 即深入边界层之中横切平面的所有距离上的感应磁通量都呈负方向。 对于所有各种情形,  $b_x$  的峰值出现在平板附近, 此后曲线衰减至自由流动时的  $0$  值。 图 6 中磁场的 Prandtl 数  $Pr_M$  是一对小于  $1$  的值, 意味着磁场的扩散率超过了粘性的扩散率。 随着这样的  $Pr_M$  增大 (但始终小于  $1$ ), 动力扩散是增大的。 磁场在介质中的扩散, 导致感应磁场大小相应地增大。 此外,  $M$  从  $0.1$  经  $0.25$  增大至  $0.5$  (都是弱磁流体动力学流动), 足以在整个区域内提升感应磁场的大小。 可以发现, 在壁面附近  $M$  和  $Pr_M$  的影响很大, 在远离壁面处就不明显了。

图 7 给出了不同的热源/汇参数 ( $\alpha$ ) 和吸热化学反应参数 ( $K$ ) 时, 感应磁场 ( $b_x$ ) 随横向距离 ( $y$ ) 的变化。 当参数  $\alpha$  从  $-0.1$  经  $0$  增大至  $0.05$ , 对于  $K = 0.1$  和  $K = 1.0$  两种情形, 越过边界层后的  $b_x$  都有一个显著的提升。 相反地,  $K$  从  $0.1$  增大至  $1.0$  时,  $b_x$  出现明显的缩减。 当  $K > 0$  时, 组分浓度方程 (21) 中的反应项  $-K\phi$ , 模拟一个破坏性反应 (即吸热性反应, 热量被吸收的)。 但是, 对指定的  $\alpha$  和  $K$  值,  $b_x$  的值变得越来越小。 因此, 边界层中存在反向的感应磁通量。

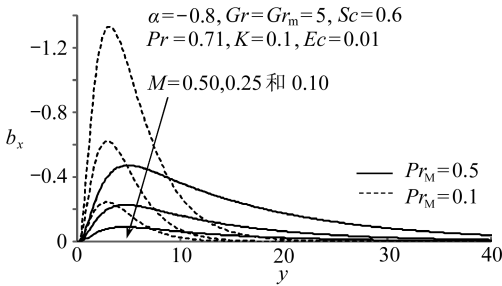


图 6  $M$  和  $Pr_M$  对感应磁场的影响

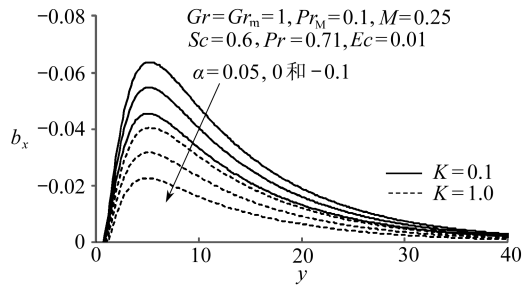


图 7  $\alpha$  和  $K$  对感应磁场的影响

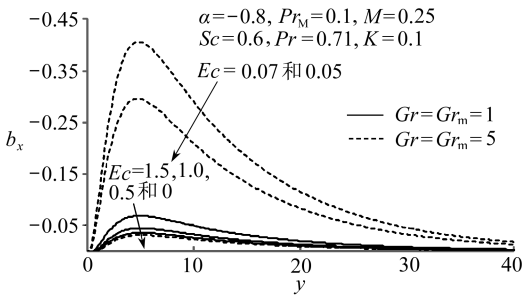


图 8  $Ec$ ,  $Gr_m$  和  $Gr$  对感应磁场的影响

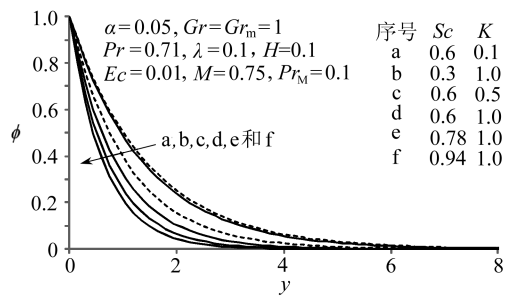


图 9  $Sc$  和  $K$  对浓度场的影响

图 8 中就热汇 ( $\alpha = -0.8$ ), 显示了不同的 Eckert 数 ( $Ec$ )、热 Grashof 数 ( $Gr$ ) 和质量的 Grashof 数 ( $Gr_m$ ) 时的感应磁场 ( $b_x$ ), 对大数值  $Ec$  情形, 利用 NSM 计算。 可以发现, 当  $Gr = Gr_m = 5.0$ ,  $Ec$  从  $0$ ,  $0.05$  增大至  $0.07$  (小耗散影响),  $b_x$  呈负增长, 即在边界层中出现较大的反向感

应磁通量。但是,当  $Gr = Gr_m = 1.0$ ,  $Ec$  从 0.5 经 1.0 增大至 1.5 (大耗散影响), 感应磁场呈较小的负数。因此, 可以得出以下结论:  $b_x$  的绝对值随着  $Ec$  的增大而急剧增大。当  $Gr = Gr_m = 5 (> 1)$ , 浮力控制了流动, 即在边界层中浮力大于流体动力学力。当  $Gr = Gr_m = 1$ , 这些力大致相等, 意味着这是混合对流区域。可以发现, 当  $Gr$  和  $Gr_m$  增大时,  $b_x$  的绝对值是增大的。

图 9 表示了不同 Schmidt 数 ( $Sc$ ) 和吸热化学反应参数 ( $K$ ) 时的成分浓度曲线。  $Sc$  量化了由扩散引起的动量和质量输送的相对效率。高  $Sc$  值在化学分子扩散中总量的下降, 扩散较小, 因此出现成分的转移。  $Sc$  或  $K$  的增大, 将抑制边界层区域中成分的浓度。较高的  $Sc$  值, 意味着分子扩散的减小, 引起浓度边界层厚度的减小。较低的  $Sc$  值将导致更高的浓度, 即较大的分子 (成分) 扩散, 造成浓度边界层厚度的增大。随着 Schmidt 数和反应参数的增大, 流场各点浓度分布减小。这表明, 越大的扩散成分, 对流场的浓度分布的阻碍效应越明显。

表 1 显示粘性耗散、化学反应率参数、热量产出/吸收参数、Schmidt 数和 Prandtl 数对表面摩擦因数  $C_f = u'(0)$ 、Nusselt 数  $Nu = \theta'(0)$  和 Sherwood 数  $Sh = \phi'(0)$  的影响。为了确保我们解析解的有效性, 分热源 / 汇两种情况, 通过表 1 列出了  $u'(0)$ ,  $\theta'(0)$  和  $\phi'(0)$  的解析解和用到的数值解。从表 1 可以清楚地看到, 结果是高度吻合的。数值解的精度非常好,  $u'(0)$ ,  $\theta'(0)$  和  $\phi'(0)$  相应于解析解或数值解的一个值, 与另一个值非常接近。还可以发现, Eckert 数  $Ec$  增大,  $C_f$  和  $Nu$  数增大。化学反应率参数  $K$  和 Sherwood 数  $Sh$  的影响, 表面摩擦因数、Nusselt 数 (弱变化) 和 Sherwood 数下降。分析表明, 当参数  $\alpha$  为正值 (放热) 时, 壁面处 ( $y = 0$ ) 的  $Nu$  随着 Prandtl 数  $Pr$  的增大而减小, 而当  $\alpha$  为负值 (吸热) 时,  $Nu$  随着  $Pr$  的增大而增大。进一步发现,  $Ec$  和  $Pr$  对 Sherwood 数  $Sh$  没有影响。

表 1  $Pr_M = 1, M = 0.1, Gr = Gr_m = 1$  时本文数值解和解析解的比较

	$\alpha$	网络模拟法			摄动法		
		$u'(0)$	$\theta'(0)$	$\phi'(0)$	$u'(0)$	$\theta'(0)$	$\phi'(0)$
$(Ec = 0.1, K = 0.1, Sc = 0.6, Pr = 0.71)$	-0.05	3.904 7	-0.449 5	-0.687 0	3.903 1	-0.448 8	-0.687 4
	0.05	4.371 0	-0.178 3	-0.687 0	4.369 9	-0.176 6	-0.687 4
$(Ec = 0.01, K = 0.1, Sc = 0.6, Pr = 0.71)$	-0.05	3.752 5	-0.744 5	-0.687 0	3.751 1	-0.742 9	-0.687 4
	0.05	4.058 9	-0.592 7	-0.687 0	4.057 2	-0.591 1	-0.687 4
$(Ec = 0.01, K = 1.0, Sc = 0.6, Pr = 0.71)$	-0.05	3.174 6	-0.754 3	-1.127 7	3.173 7	-0.752 8	-1.126 8
	0.05	3.476 3	-0.604 6	-1.127 7	3.475 2	-0.603 1	-1.126 8
$(Ec = 0.01, K = 1.0, Sc = 0.94, Pr = 0.71)$	-0.05	2.932 4	-0.575 5	-1.540 8	2.930 3	-0.574 7	-1.541 1
	0.05	3.232 9	-0.608 5	-1.540 8	3.231 4	-0.608 1	-1.541 1
$(Ec = 0.01, K = 1.0, Sc = 0.94, Pr = 0.6)$	-0.05	3.126 8	-0.657 4	-1.540 8	3.124 7	-0.655 5	-1.541 0
	0.05	3.657 5	-0.474 2	-1.540 8	3.656 1	-0.473 1	-1.541 0

## 6 结 论

本文在有一级化学反应, 传热又传质, 考虑感应磁场以及能量的粘性和磁性耗散, 对不可压缩粘性导电流体, 流经多孔无限垂直平板时稳定的混合 MHD 流动, 同时进行了详细的解析研究 (摄动技术) 和数值研究 (网络模拟法)。借助于数值技术 (NSM), 用图形表示了无量纲热物理参数和磁物理参数, 对无量纲感应磁场 ( $b_x$ )、流动速度 ( $u$ )、温度 ( $\theta$ ) 和组分浓度 ( $\phi$ ) 的影响。我们发现, Hartmann 数或磁场的 Prandtl 数为任意值, 感应磁场的  $x$ -分量  $b_x$  在  $Pr_M$  最高值时有最大值, 在  $Pr_M$  最低值时有最小值, 虽然得到的磁通量是反向的。相反,  $b_x$  中强反向通量, 导致更低值的 Eckert 数, 虽然对更高值的 Eckert 数, 这种影响是相反的。还可以发现, 热源/汇参数 ( $\alpha$ ) 的增大, 又造成  $b_x$  更大的负值。热源 / 汇参数的增大, 大大地提高了  $b_x$  值, 然而随着

吸热化学反应的增大,  $b_x$  值快速减小. 热源/汇参数或 Eckert 数的增大, 流动急剧加速, 即提高速度, 而吸热化学反应的增大, 引起相反的效应. Eckert 数、热源/汇参数或质量的 Grashof 数的增大, 会提高流体的温度, 而吸热化学反应的增大, 会降低流体的温度. 本研究仅考虑 Newton 流体并进行稳态传送.

**致谢** 作者衷心感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

### 参考文献:

- [1] Ganesan P, Loganathan P. Heat and mass flux effects on a moving vertical plate with chemically reactive species diffusion[J]. *Diffusion J Engineering Phys and Thermophys*, 2002, **75**(4): 899-909.
- [2] Ghaly A Y, Seddeek M A. Chebyshev finite difference method for the effects of chemical reaction, heat and mass transfer on laminar flow along a semi-infinite horizontal plate with temperature dependent viscosity[J]. *Chaos Solutions & Fractals*, 2004, **19**(1): 61-70.
- [3] Muthucumaraswamy R, Ganesan P. Natural convection on a moving isothermal vertical plate with chemical reaction[J]. *J Engineering Phys Thermophys*, 2002, **75**(1): 113-119.
- [4] Hossain M A, Hussain S, Rees D A S. Influence of fluctuating surface temperature and concentration on natural convection flow from a vertical flat plate[J]. *ZAMM*, 2001, **81**(10): 699-709.
- [5] Khair K R, Bejan A. Mass transfer to natural convection to boundary layer flow driven by heat transfer[J]. *J Heat Transfer*, 1985, **107**:979-981.
- [6] Lin H T, Wu C M. Combined heat and mass transfer by laminar natural convection from a vertical plate[J]. *Heat and Mass Transfer*, 1995, **30**(6): 369-376.
- [7] Muthucumaraswamy R, Ganesan P, Soundalgekar V M. Heat and mass transfer effects on flow past an impulsively started vertical plate[J]. *Acta Mechanica*, 2001, **146**(1/2): 1-8.
- [8] Chamkha A J. MHD flow of a uniformly stretched vertical permeable surface in the presence of heat generation/absorption and a chemical reaction[J]. *Int Communication in Heat and Mass Transfer*, 2003, **30**(3): 413-422.
- [9] Chen C H. Combined heat and mass transfer in MHD free convection from a vertical plate Ohmic heating and viscous dissipation[J]. *Int J Eng Sci*, 2004, **42**(7): 699-713.
- [10] Aldoss T K, Al-Nimir M A. Effect of the local acceleration term on the MHD transient free convection flow over a vertical plate[J]. *Int J for Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, 2005, **15**(3): 296-305.
- [11] Ahmed S. Effects of viscous dissipation and chemical reaction on transient free convective MHD flow over a vertical porous plate[J]. *J of Energy, Heat and Mass Transfer*, 2010, **32**: 311-332.
- [12] Ahmed S. Free and forced convective three-dimensional flow with heat and mass transfer [J]. *Int J Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **5**(1): 26-38.
- [13] Ahmed S. Transient three-dimensional flows through a porous medium with transverse permeability oscillating with time[J]. *Emirates Journal for Engineering Research*, 2008, **13**(3): 11-17.
- [14] Ahmed S. Free and forced convective MHD oscillatory flows over an infinite porous surface in an oscillating free stream[J]. *Latin American Applied Research*, 2010, **10**: 167-173.
- [15] Zueco-Jordán J. Numerical study of an unsteady free convective MHD flow of a dissipative fluid along a vertical plate subject to a constant heat flux[J]. *Int J Engineering Science*, 2006, **44**(18/19): 1380-1393.
- [16] Ahmed S, Liu I-Chung. Mixed convective three-dimensional heat and mass transfer flow with

- transversely periodic suction velocity[J]. *Int J Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **6** (1): 58-73.
- [17] Nayfeh A, Namat-Nasser S. Electromagneto-thermoelastic plane waves in solids with thermal relaxation[J]. *J Appl Mech Ser E*, 1972, **39**: 108.
- [18] Zueco J. Network method to study the transient heat transfer problem in a vertical channel with viscous dissipation[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 2006, **33**(9): 1079-1087.
- [19] Zueco J, Hernández-González A. Network simulation method applied to models of diffusion-limited gas bubble dynamics in tissue[J]. *Acta Astronautica*, 2010, **67**(3/4): 344-352.
- [20] Zueco J, Bég O A. Network numerical analysis of hydromagnetic squeeze film between rotating disks over a wide range of Batchelor numbers[J]. *Tribology International*, 2010, **43** (3): 532-543.
- [21] Pspice 6.0. Irvine, California 92718. Microsim Corporation, 20 Fairbanks, 1994.

## Combined Heat and Mass Transfer by Mixed Convection MHD Flow Along a Porous Plate With Chemical Reaction in Presence of Heat Source

Joaquín Zueco<sup>1</sup>, Sahin Ahmed<sup>2</sup>

(1. *ETS Ingeniería Industrial, Departamento de Ingeniería Térmica y Fluidos, Universidad Politécnica de Cartagena, 30202, Cartagena (Murcia), Spain;*

2. *Fluid Dynamics Research, Department of Mathematics, Goalpara College, Goalpara, Assam-783101, India*)

**Abstract:** An exact and numerical solution to the problem of a steady mixed convective MHD flow of an incompressible viscous electrically conducting fluid past an infinite vertical porous plate with combined heat and mass transfer was presented. A uniform magnetic field was assumed to be applied transversely to the direction of the flow, taking into account the induced magnetic field with viscous and magnetic dissipations of energy. The porous plate was subjected to a constant suction velocity as well as uniform mixed stream velocity. The governing equations were solved by perturbations technique and numerical method. The analytical expressions for the velocity field, temperature field, induced magnetic field, skin-friction and the rate of heat transfer at the plate were obtained. The numerical results were demonstrated graphically for the various values of the parameters involved in the problem. The effects of the Hartmann number, the chemical reaction parameter, the magnetic Prandtl number, and the other parameters involved on the velocity field, temperature field, concentration field and induced magnetic field from the plate to the fluid were discussed. An increase in heat source/sink or Eckert number was found to strongly enhance fluid velocity values. The induced magnetic field along  $x$ -direction increases with the increase in Hartmann number, magnetic Prandtl number, heat source/sink and the viscous dissipation. However, it is found that the flow velocity, fluid temperature, and induced magnetic field decrease with the increase in destructive chemical reaction ( $K > 0$ ). Applications of the study arise in thermal plasma reactor modelling, electromagnetic induction, magnetohydrodynamic transport phenomena in chromatographic systems and magnetic field control of materials processing.

**Key words:** MHD; perturbation technique; network simulation method; mixed convection; Eckert number; induced magnetic field; viscous dissipation; heat source/sink