

非线性最优控制问题的保辛多层次求解方法*

彭海军¹, 高强¹, 吴志刚², 钟万勰¹

(1. 大连理工大学 工程力学系,工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 航空航天学院,工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 将非线性系统的最优控制问题导向 Hamilton 系统,提出了求解非线性最优控制问题的保辛多层次方法.首先,以时间区段两端状态为独立变量并在区段内采用 Lagrange 插值近似状态和协态变量,通过对偶变量变分原理将非线性最优控制问题转化为非线性方程组的求解.然后,在保辛算法的具体实施过程中提出了多层次求解思想,以 2^N 类算法为基础由低层次到高层次加密离散时间区段,利用 Lagrange 插值得到网格加密后的初始状态与协态变量作为求解非线性方程组的初值,可提高计算效率.数值算例验证了算法在求解效率与求解精度上的有效性.

关键词: 非线性最优控制; 对偶变量; 变分原理; 多层次迭代; 保辛

中图分类号: O231.2;O241.81 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.006

引言

线性系统的最优控制问题在理论分析以及实际应用中都取得了显著成果^[1-3],尤其在航空航天领域得到比较广泛的实际应用.随着实际工程问题越来越复杂,对最优控制提出了更高的要求,进而非线性系统的最优控制方法成为解决这些问题的一个颇受关注的研究课题^[4-6].在经典文献^[1-2]中都讲述了非线性最优控制问题的一些解决方案,包括梯度法、共轭梯度法、边界迭代法、拟线性化法以及邻域最优控制等等.近年来,文献[4]采用迭代的的思想将非线性最优控制问题转化为非线性两点边值问题并采用 Newton 法求解.文献[5]提出保辛摄动方法求解非线性最优控制问题.文献[6]综合比较了级数展开近似、状态相关 Riccati 方程方法、序列 Galerkin 近似以及两点边值插值解等 4 种方法在求解非线性最优控制问题方面的优缺点.文献[7]基于迭代的的思想将非线性最优控制问题转化为在每一个时间步内求解线性二次最优控制问题并求解 Riccati 微分方程.文献[8-9]将非线性最优控制问题转化为参数优化问题求解.

* 收稿日期: 2010-03-04; 修订日期: 2010-08-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10632030; 10902020; 10721062); 高等学校博士点基金资助项目(20070141067); 辽宁省博士启动基金资助项目(20081091); 辽宁省重点实验室资助项目(2009S018)

作者简介: 彭海军(1982—),男,河北邯郸人,博士生(Tel: +86-411-84706574; E-mail: hjpeng@dlut.edu.cn);

高强(1978—),男,内蒙古赤峰人,讲师,博士(联系人. Tel: +86-411-84707608; E-mail: qgao@dlut.edu.cn).

非线性最优控制系统从数学结构上来讲可以导向 Hamilton 体系,即可以采用 Hamilton 正则方程描述. Hamilton 系统的一个主要性质是其相流保持辛几何结构^[3,10-11]. 近年来,从动力学积分角度发展起来的变分时间积分方法^[12]逐渐在最优控制领域得到发展. 该方法在一类变量 Lagrange 体系内对连续的动力学方程离散,并且由于采用离散形式的 Euler-Lagrange 方程而达到离散方程过程保辛的目的^[13],因而保持了原有最优控制系统的辛几何结构. 有鉴于此,不仅是动力学数值积分方面,在非线性最优控制的数值求解方面也应当设法保持 Hamilton 系统的辛几何结构^[5,14].

本文基于两类变量体系,采用两端状态变量表示的对偶变量变分原理^[11]来达到整个 Hamilton 系统保辛的目的. 在连续时间离散成一系列区段的过程中,时间区段内部的状态和协态变量采用 Lagrange 插值函数近似,并采用时间区段两端状态为独立变量. 然后,根据对偶变量变分原理导致的必要条件将非线性最优控制问题转化为非线性方程组的求解,也就是说采用保辛的数值算法求解非线性系统的最优控制问题. 进一步,在保持 Hamilton 系统的辛几何结构基础上提出了多层次求解方法用以提高数值求解效率. 先将连续时间离散成稀疏时间区段采用对偶变量保辛方法求解,然后采用将时间网格加密一倍,并将稀疏时间区段的数值结果采用 Lagrange 插值的方法分配到新的时间节点上,以此作为初值再次求解非线性最优控制问题. 将时间网格再加密一倍以此类推直到得到满意精度的数值结果. 这种多层次求解非线性迭代问题的思想可以较大幅度地提高收敛速度,减少迭代次数.

1 非线性最优控制与对偶变量变分原理

考虑非线性系统的最优控制问题,其状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (1)$$

性能指标为

$$J_c = \int_0^{t_f} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (2)$$

其中, \mathbf{x} 是 d 维状态向量, \mathbf{u} 是 p 维控制向量.

通过引入 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 将状态方程(1)作为约束条件引入到性能指标(2)中,采用变分法得到关于最优控制输入的必要条件,进一步将控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 表示成状态变量 \mathbf{x} 与协态变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的函数,即 $\mathbf{u}(t) = g(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$. 此时 Hamilton 函数只是关于状态变量 \mathbf{x} 与协态变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 两类变量的函数

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) = \Phi(\mathbf{x}(t), g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), t) + \boldsymbol{\lambda}^T f(\mathbf{x}(t), g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), t). \quad (3)$$

那么 Hamilton 函数(3)对应的变分原理为

$$S = \int_0^{\eta} [\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})] dt, \quad \delta S = 0. \quad (4)$$

作用量 S 取驻值,即对式(4)进行变分:

$$\delta S = \int_0^{\eta} (\delta \mathbf{x})^T \left[-\dot{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right] dt + \int_0^{\eta} (\delta \boldsymbol{\lambda})^T \left[\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right] dt + \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x} \Big|_0^{\eta} = 0. \quad (5)$$

若认为在两端边界状态给定,则可以在域内得到 Hamilton 正则方程,求解此 Hamilton 正则方程即可得到状态和协态变量,进而求出控制输入.

在数值求解 Hamilton 正则方程时,可从另一个角度利用变分原理(5),即若认为在域内已经满足 Hamilton 正则方程,则可以得到作用量与两端状态的关系:

$$dS = \boldsymbol{\lambda}_{\eta}^T d\mathbf{x}_{\eta} - \boldsymbol{\lambda}_0^T d\mathbf{x}_0. \quad (6)$$

下面考虑以式(6)为出发点,研究两端状态作为独立变量情况的多层次保辛算法求解非线性最优控制问题.

2 以初始状态变量 \mathbf{x}_0 和终端状态变量 \mathbf{x}_η 为独立状态变量的保辛算法

将整个非线性最优控制问题的求解时间 $(0, t_f)$ 等分成 J 个子区段,子区段的长度为 η ,其中第 j 个子区段内的状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 与协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 分别采用等间距 $m-1$ 和 $n-1$ 次 Lagrange 插值:

$$\mathbf{x}(t) = (M_1 \otimes \mathbf{I}) \mathbf{x}_{j-1} + (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}) \bar{\mathbf{x}}_j + (M_m \otimes \mathbf{I}) \mathbf{x}_j, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = (\mathbf{N} \otimes \mathbf{I}) \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j, \quad (8)$$

其中, \mathbf{x}_{j-1} 和 \mathbf{x}_j 表示第 j 个子区段最左端和最右端的状态变量,而 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 由第 j 个子区段中间插值点的状态向量组成, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j$ 由第 j 个子区段所有插值点的协态向量组成. 由于将区段最左端和最右端的状态变量作为独立变量,因此它们用普通的 \mathbf{x}_{j-1} 和 \mathbf{x}_j 表示,而其他不独立的状态向量和协态向量用 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 和 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j$ 表示. 方程(7)和(8)中的 \mathbf{I} 表示单位矩阵,其他符号的含义如下:

$$\mathbf{M} = [M_2, M_3, \dots, M_{m-1}], \quad (9)$$

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_n], \quad (10)$$

并且

$$M_i = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{t - (j-1)\eta / (m-1)}{(i-j)\eta / (m-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

$$N_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{t - (j-1)\eta / (n-1)}{(i-j)\eta / (n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积,其意义为: $k \times l$ 维矩阵 \mathbf{A} 和 $s \times t$ 维矩阵 \mathbf{B} 的 Kronecker 积为 $ks \times lt$ 维矩阵 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 可以采用如下式子表示:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1l}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}\mathbf{B} & \cdots & a_{kl}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将方程(7)和(8)的近似状态和协态向量代入方程(4)表示的作用量,可得到

$$V_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j) = \int_0^\eta (\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}))_j dt. \quad (14)$$

方程(6)表明,若认为在域内已经满足微分方程,则作用量应该仅是两端状态的函数,因此第 j 个子区段内的近似作用量为

$$S_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) = \operatorname{stat}_{\bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j} V_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j). \quad (15)$$

因为方程(15)的驻值条件,有

$$\frac{\partial V_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (16)$$

$$\frac{\partial V_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j)}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (17)$$

将所有子区段的近似作用量 $S_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j)$ 相加,并对中间的状态取驻值,可得到整个区域的近似作用量,即

$$(\mathbf{F}_2^{j+1})^T \quad (\mathbf{F}_3^{j+1})^T \quad \dots]^T. \tag{27}$$

至此,完成了 Newton 法求解非线性方程组的所需的 Jacobi 矩阵式(26)以及右端向量式(27).从方程(26)可以看出 Jacobi 矩阵为稀疏带状对称矩阵,采用稀疏带状对称的线性代数方程组求解算法可获得良好的计算效率.这里需要注意的是 Jacobi 矩阵的对称性正是算法保辛性质的体现.

在计算中,还应该结合非线性最优控制的终端边界条件(终端状态固定、自由)对 Jacobi 矩阵式(26)与右端向量式(27)做相应的修改.对于初始状态 \mathbf{x}_0 给定,而终端时间固定和终端状态自由的边界条件,未知变量为 $\{\bar{\mathbf{x}}_1^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1^T, \mathbf{x}_1^T; \bar{\mathbf{x}}_2^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2^T, \mathbf{x}_2^T; \dots; \bar{\mathbf{x}}_J^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_J^T, \mathbf{x}_J^T\}^T$,需要删除 Jacobi 矩阵 \mathbf{K} 的前 d 行和前 d 列(d 是状态向量 \mathbf{x} 的维数),删除右端向量 \mathbf{F} 的前 d 行.然后,求解得到未知变量后,进一步再利用以下方程求解协态变量,即

$$\boldsymbol{\lambda}_{j-1} = - \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_{j-1}} = - \int_0^\eta (\dot{\mathbf{M}}_1 \otimes \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}_1 \otimes \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}})_j dt, \quad j = 1, 2, \dots, J. \tag{28}$$

对于初始状态 \mathbf{x}_0 给定,而终端时间固定和终端状态固定的边界条件,未知变量为 $\{\bar{\mathbf{x}}_1^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1^T, \mathbf{x}_1^T; \bar{\mathbf{x}}_2^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2^T, \mathbf{x}_2^T; \dots; \bar{\mathbf{x}}_J^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_J^T\}^T$,需要删除 Jacobi 矩阵的前 d 行和最后 d 行以及前 d 列和最后 d 列,并删除右端向量的前 d 行和最后 d 行.通过求解得到未知变量,进一步再利用以下两个方程求解协态变量,即

$$\boldsymbol{\lambda}_{j-1} = - \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_{j-1}} = - \int_0^\eta (\dot{\mathbf{M}}_1 \otimes \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}_1 \otimes \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}})_j dt, \quad j = 1, 2, \dots, J, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_J = \frac{\partial V_J}{\partial \mathbf{x}_J} = \int_0^\eta (\dot{\mathbf{M}}_m \otimes \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}_m \otimes \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}})_j dt. \tag{30}$$

以上对边界条件处理的说明是为了容易理解,具体实现过程中为提高效率,对不同边界条件可直接形成 Jacobi 矩阵和右端向量.

3 保辛多层次算法

以上部分给出了以区段两端状态为独立变量的保辛算法,用以求解非线性最优控制问题.而这种保辛算法归结为非线性方程组的求解,那么非线性方程组迭代速度的快慢便成为非线性最优控制在线实施的主要决定因素.因此,本文进一步提出一种多层次求解算法,以提高非线性最优控制问题的求解速度,其主要思想是先比较粗的网格划分上求解,然后将粗网格上的解插值到密网格上作为初值,再迭代求解.具体实现过程如下:

- 1) 对给定求解时间区域长度为 L 的非线性最优控制问题,最终希望得到将求解区域等分为 2^N 份时的解;
- 2) 首先将求解区域等分为 2^{N_0} ($N_0 < N$) 份,并选取迭代初值,记 $k = N_0$;
- 3) 按照本文的保辛算法求解非线性最优控制问题,求得各个离散时间点的状态变量和协态变量;
- 4) 如果达到 1) 的划分要求,则结束;否则将时间网格划分加密一倍,并记 $k = k + 1$,然后将状态变量和协态变量通过 Lagrange 插值分配到新增的时间点上,即通过插值式(7)和式(8)实现状态变量与协态变量的分配,示意图如图 1 所示;

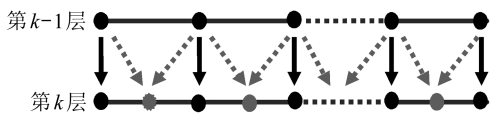


图 1 多层次递推实现

5) 返回第3)步.

多层次求解算法开始时,时间网格离散的区段数较少,因此非线性代数方程组的维数小,并且收敛精度控制得较低,故迭代的计算量不大.当逐步加密网格划分时,计算已经继承上一次计算的结果,虽然不理想但状态变量与协态变量对真解的近似已经好多了,故迭代的收敛会加快,迭代次数会降低.

4 数值算例

算例 1 为了说明算法在不同参数下的计算精度与效率问题,首先考虑一个终端状态固定的非线性最优控制问题^[8],极小化性能指标如下:

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^5 (x + u^2) dt,$$

系统的微分方程及初始与终端状态为

$$\dot{x} = 2x + 2u\sqrt{x}, x(0) = 2, x(5) = 1.$$

此问题具有解析解,最优状态 $x^*(t)$, 协态 $\lambda^*(t)$ 与控制输入 $u^*(t)$ 分别为

$$x^*(t) = (8.483\ 061\ 678\ 223\ 284\ 884\ 5 \times 10^{-4} \cdot e^{\sqrt{2}t} +$$

$$1.413\ 365\ 256\ 205\ 272\ 720\ 3 \cdot e^{-\sqrt{2}t})^2,$$

$$\lambda^*(t) = (-1.490\ 388\ 765\ 892\ 852 \times 10^{-7} \cdot e^{2\sqrt{2}t} + 0.001\ 198\ 966\ 464\ 225 +$$

$$2.411\ 318\ 132\ 612\ 103 \cdot e^{-2\sqrt{2}t}) / (x^*(t)),$$

$$u^*(t) = -2\sqrt{x^*(t)}\lambda^*(t).$$

通过大量数值实验表明,状态变量的插值参数 m 与协态变量的插值参数 n 的最佳匹配情况是 $m = n + 1$,这种搭配计算精度与效率能够达到最佳.因此,在这里将状态变量与协态变量分别采用 $m = 2, n = 1; m = 3, n = 2$ 和 $m = 4, n = 3$ 这 3 种插值方法求解此问题.将求解区域等分为 16 份,状态变量、协态变量与控制输入的数值精度如图 2 所示,其中虚线、点画线和实线分别表示 $m = 2, n = 1; m = 3, n = 2$ 和 $m = 4, n = 3$ 计算的结果,可以看到随着插值次数的增加,计算精度也随之提高.图 3 给出了性能指标随步长减小的变化情况,可以看到随着步长的减小,性能指标趋于收敛.状态变量、协态变量与控制输入的数值精度随步长减小的变化如图 4 所示,从图 4 可以计算得到本文算法的精度,即参数为 $m = 2, n = 1; m = 3, n = 2$ 和 $m = 4, n = 3$ 这 3 种情况下,算法分别为 2 阶、4 阶和 6 阶精度. Hamilton 函数的相对误差如图 5 所示.

对于此问题,假如将求解区域划分为 2^N 份,即可直接求解,也可按照第 3 节的多层次算法求解.在多层次求解过程中,我们首先将求解区域划分为 2^{N_0} ($N_0 < N$) 份,然后按照第 3 节的多层次算法求解.表 1 给出了多层次求解与直接求解的计算效率比较,可以看到多层次求解比直接求解的效率显著提高.

表 1 多层次求解与直接求解 CPU 时间的比较 ($N_0 = 4$)

	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
多层次求解 ($m = 2, n = 1$)	0.193 871	0.280 816	0.585 800	0.956 465	1.383 591	2.781 027
直接求解 ($m = 2, n = 1$)	0.238 746	0.527 595	1.251 414	2.326 252	4.656 220	8.859 753
多层次求解 ($m = 3, n = 2$)	0.272 081	0.431 158	0.754 852	1.291 698	2.276 872	4.493 142
直接求解 ($m = 3, n = 2$)	0.349 519	0.905 591	1.690 473	3.731 406	7.779 692	20.006 846
多层次求解 ($m = 4, n = 3$)	0.362 073	0.710 131	1.178 131	1.887 348	3.676 104	7.495 801
直接求解 ($m = 4, n = 3$)	0.706 364	1.558 577	3.116 071	5.791 411	10.856 355	29.247 088

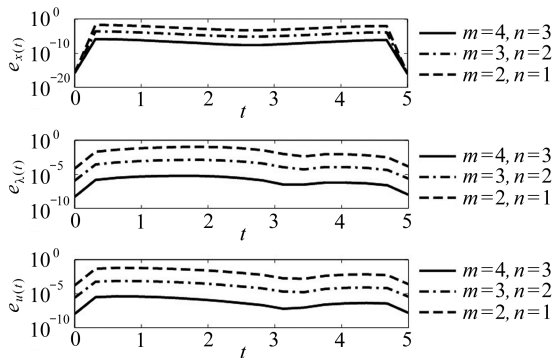


图2 状态、协态与控制输入的相对误差
($m = 2, n = 1; m = 3, n = 2;$
 $m = 4, n = 3$)

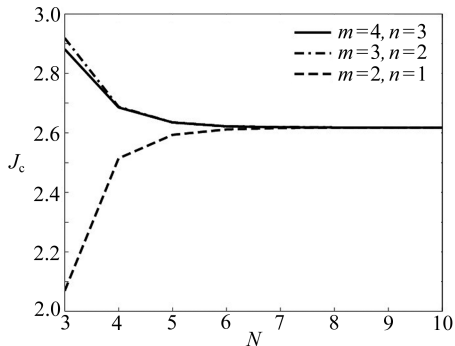


图3 性能指标随不同时间步长的变化
($\tau = 5/2^N; N = 2, 3, \dots, 10$)

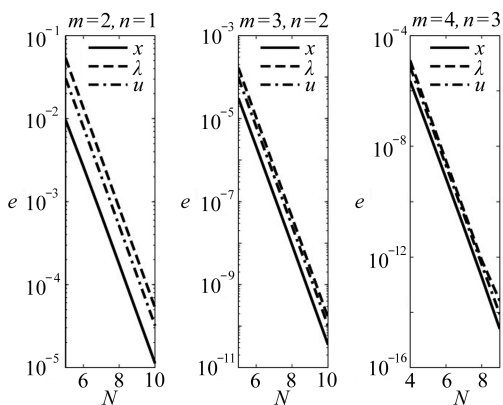


图4 状态、协态与控制输入随不同时间步长变化的相对误差

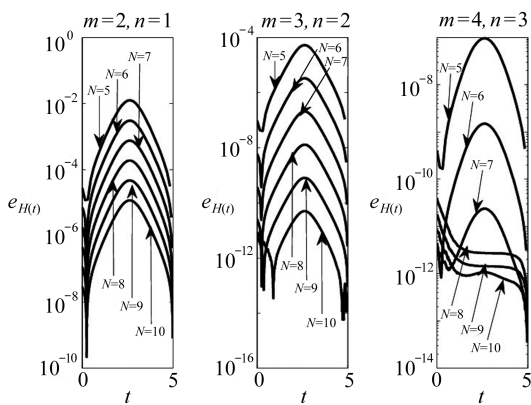


图5 Hamilton 函数相对误差随不同时间步长变化情况

算例 2 本算例考虑另一种边界条件,即考虑一个终端状态自由的强非线性最优控制问题^[4-5],其性能指标为

$$J_c = 2x_1^2(t_f) + 2x_2^2(t_f) + \int_0^{t_f} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt,$$

系统的微分方程及初始状态为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - x_1^2 - x_2^2)x_1 - x_2 + u, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(0) = 3. \end{cases}$$

由于这个强非线性最优控制问题没有分析解,因此采用 Matlab 提供的 bvp4c 函数求解 Hamilton 两端边值问题,得到的系统状态 $x^*(t)$, 协态 $\lambda^*(t)$ 与控制输入 $u^*(t)$ 作为参考解(其中 bvp4c 函数的绝对误差和相对误差选项分别设定为 10^{-12} 和 10^{-10})。

同样,根据大量的数值计算,状态变量的插值参数 m 与协态变量的插值参数 n 的最佳匹配情况是 $m = n + 1$. 因此,在这里仍然将状态变量与协态变量分别采用 $m = 2, n = 1; m = 3, n = 2$ 和 $m = 4, n = 3$ 这三种插值方法求解此问题. 将求解区域等分为 16 份时状态变量、协态变量与控制输入的相对误差如图 6 所示,其中虚线、点画线和实线分别表示 $m = 2, n = 1; m = 3, n = 2$ 和 $m = 4, n = 3$ 计算的结果,同样随着插值次数的增加,计算精度也随之提高. 图 7 给出了性能指标随步长减小的变化情况,可以看到随着步长的减小,性能指标趋于收敛. 状态变量、协态变

量与控制输入数值计算精度随步长减小的变化以及 Hamilton 函数的相对误差如图 8 和图 9 所示。从图 8 中可以计算得到本文算法的精度，从左到右在参数为 $m = 2, n = 1$; $m = 3, n = 2$ 和 $m = 4, n = 3$ 的情况下算法分别为是 2 阶、4 阶和 6 阶精度。

表 2 给出了多层次求解与直接求解的计算效率比较,同样可以看到多层次求解比直接求解的效率显著提高。

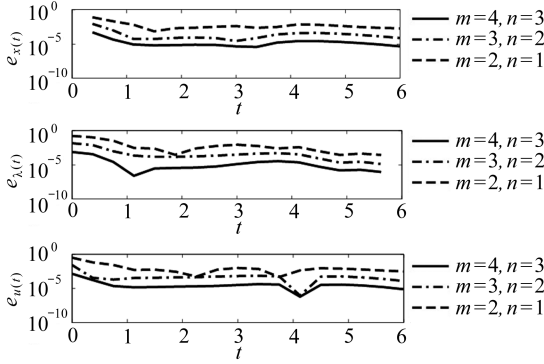


图 6 状态、协态与控制输入的相对误差
($m = 2, n = 1; m = 3, n = 2;$
 $m = 4, n = 3$)

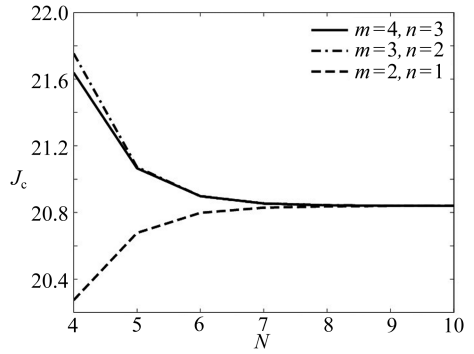


图 7 性能指标随不同时间步长的变化
($\tau = 6/2^N; N = 4, 5, \dots, 10$)

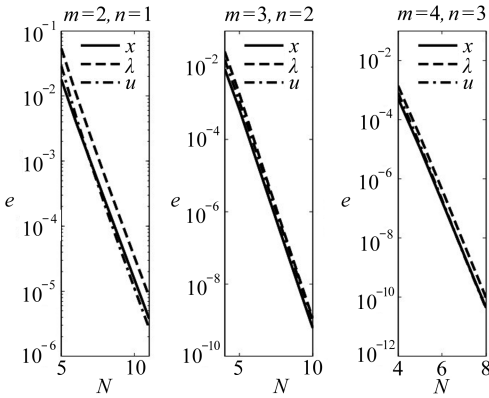


图 8 状态、协态与控制输入随不同时间步长变化的相对误差

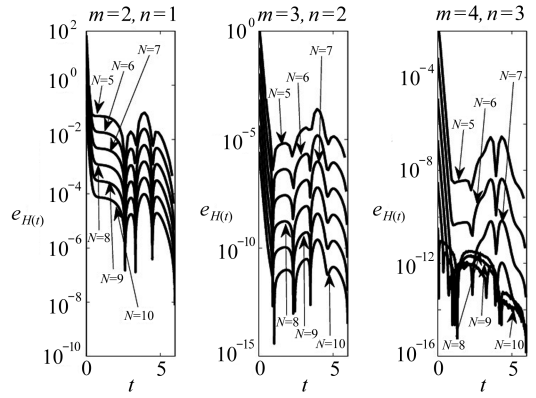


图 9 Hamilton 函数相对误差随不同时间步长变化情况

表 2 多层次求解与直接求解 CPU 时间的比较 ($N_0 = 4$)

	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
多层次求解 ($m = 2, n = 1$)	0.149 132	0.282 306	0.522 666	0.972 041	1.741 215	3.868 730
直接求解 ($m = 2, n = 1$)	0.172 433	0.334 983	0.765 028	1.438 175	2.713 392	5.360 466
多层次求解 ($m = 3, n = 2$)	0.238 597	0.365 285	0.690 689	1.457 358	2.953 155	6.655 046
直接求解 ($m = 3, n = 2$)	0.280 500	0.549 477	1.262 298	2.230 430	4.413 372	8.810 797
多层次求解 ($m = 4, n = 3$)	0.384 643	0.598 130	1.130 918	2.299 752	4.856 772	9.128 909
直接求解 ($m = 4, n = 3$)	0.443 885	0.923 604	1.961 141	3.685 039	7.394 523	15.161 434

5 结 论

采用对偶变量变分原理并以时间区段两端状态为独立变量,将非线性最优控制问题转化

为非线性方程组的求解,此方法可保持原 Hamilton 系统的辛几何结构.多层次的求解思想进一步提高了非线性最优控制问题的求解效率,使得在线实时计算成为可能.通过数值算例得到如下结论:

- 1) 大量数值实验表明,状态变量的插值参数 m 与协态变量的插值参数 n 的最佳匹配情况是 $m = n + 1$,这种参数搭配计算精度与效率能够达到最佳,此时的算法精度为 $2n$ 阶;
- 2) 非线性最优控制的性能指标随网格加密而趋于收敛,而 Hamilton 函数的相对误差随网格加密也越来越小;
- 3) 在采用本文保辛算法的基础上,通过实施多层次求解算法,可显著提高求解效率.

附 录

每个子区段内子矩阵 K^j 的具体表达式:

$$K_{11}^j = - \int_0^{\eta} \left(M_1 M_1 \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_j dt,$$

$$K_{12}^j = - \int_0^{\eta} \left(M_1 M \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_j dt = (K_{21}^j)^T,$$

$$K_{13}^j = \int_0^{\eta} \left(\dot{M}_1 N \otimes I - M_1 N \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_j dt = (K_{31}^j)^T,$$

$$K_{14}^j = - \int_0^{\eta} \left(M_1 M_m \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_j dt = (K_{41}^j)^T,$$

$$K_{22}^j = - \int_0^{\eta} \left(M^T M \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_j dt,$$

$$K_{23}^j = \int_0^{\eta} \left(\dot{M}^T N \otimes I - M^T N \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_j dt = (K_{32}^j)^T,$$

$$K_{24}^j = - \int_0^{\eta} \left(M^T M_m \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_j dt = (K_{42}^j)^T,$$

$$K_{33}^j = - \int_0^{\eta} \left(N^T N \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{\lambda}^2} \right)_j dt,$$

$$K_{34}^j = \int_0^{\eta} \left(N^T \dot{M}_m \otimes I - N^T M_m \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \mathbf{x}} \right)_j dt = (K_{43}^j)^T,$$

$$K_{44}^j = - \int_0^{\eta} \left(M_m M_m \otimes \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right)_j dt.$$

致谢 感谢大连理工大学青年教师培养基金和大连理工大学理学基金(SFDUT07002)对本文的资助。

参考文献:

- [1] Sage A P, White C C. *Optimum Systems Control*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1977.
- [2] Bryson A E, Ho Y C. *Applied Optimal Control*[M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [3] 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [4] Schley C H, Lee I. Optimal control computation by the Newton-Raphson method and the Riccati transformation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, **12**(2): 139-144.
- [5] 谭述君, 钟万勰. 非线性最优控制系统的保辛摄动近似求解[J]. *自动化学报*, 2007, **33**(9): 1004-1008.
- [6] Beeler S C, Tran H T, Banks H T. Feedback control methodologies for nonlinear systems

- [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2000, **107**(1):1-33.
- [7] Nedeljkovic N. New algorithms for unconstrained nonlinear optimal control problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(4): 868-884.
- [8] Benson D A, Huntington G T, Thorvaldsen T P, Rao A V. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, **29**(6): 1435-1439.
- [9] Badakhshan K P, Kamyad A V. Numerical solution of nonlinear optimal control problems using nonlinear programming[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **187**(2): 1511-1519.
- [10] Arnold V I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [11] 高强, 谭述君, 张洪武, 钟万勰. 基于对偶变量变分原理和两端动量独立变量的保辛方法[J]. *动力学与控制学报*, 2009, **7**(2): 97-103.
- [12] Lew A, Marsden J E, Ortiz M, West M. Variational time integrators[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **60**: 153-212.
- [13] de Leon M, de Diego D Martin, Santamaria-Merino A. Discrete variational integrators and optimal control theory[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2007, **26**(1/3): 251-268.
- [14] Srinivas R, Vadali R S. Optimal finite-time feedback controllers for nonlinear systems with terminal constraints[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, **29**(4): 921-928.

Symplectic Multi-Level Method for Solving Nonlinear Optimal Control Problem

PENG Hai-jun¹, GAO Qiang¹, WU Zhi-gang², ZHONG Wan-xie¹

(1. *Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;*

2. *School of Aeronautics and Astronautics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China)*

Abstract: The optimal control problem for nonlinear system was transformed into Hamiltonian system and a symplectic-preserving method was proposed. The state and costate variables were approximated by Lagrange polynomial and state variables at two ends of the time interval were taken as the independent variables, and then based on the dual variable principle, nonlinear optimal control problems were replaced by nonlinear equations. In the implement of symplectic algorithm, based on the 2^N algorithm, a multi-level method was proposed. When the time grid was refined from the low level to the high level, the initial state variables and costate variables of nonlinear equations could be obtained from Lagrange interpolation at the low level grid, which could improve the efficiency. Numerical simulations show the precision and efficiency of the proposed algorithm.

Key words: nonlinear optimal control; dual variable; variational principle; multi-level iteration; symplectic algorithm