

形状记忆合金相变过程三维 大变形有限元模拟*

夏开明¹, 潘同燕², 刘山洪³

- (1. 克罗拉多矿业学院 工程系, 克罗拉多 80401, 美国;
2. 佛吉尼亚理工学院 土木工程系, 佛吉尼亚 24061, 美国;
3. 重庆交通大学 土木建筑学院 桥梁工程系, 重庆 400074)

(郭兴明推荐)

摘要: 形状记忆合金(SMA)一直被作为智能材料开发,并被用于阻尼器、促动器和智能传感器元件。形状记忆合金(SMA)的一项重要特性,是它具有恢复在机械加卸载周期下产生的大变形而不表现出永久变形的能力。该文旨在介绍一种由应力产生的相变且可以描述马氏体和奥氏体之间的超弹性滞回环现象本构方程。形状记忆合金的马氏体系数假设为应力偏张量的函数,因此形状记忆合金在相变过程中锁定体积。本构模型是在大变形有限元的基础上执行的,采用了现时构型 Lagrange 大变形算法。为了方便地使用 Cauchy 应力和线性应变本构关系,使用了与旋转无关的 Jaumann 应力增率计算应力。数值分析结果表明,相变引起的超弹性滞回环可以有效地通过该文提出的本构方程和大变形有限元模拟。

关键词: 形状记忆合金; 相变; 超弹性; 大变形; 有限元

中图分类号: TG113.26; O343.5 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.007

引 言

形状记忆合金(SMA)因其两个工程特性已成为一种理想工程材料:形状记忆效应和超弹性。当受到机械循环加卸载时,形状记忆合金(SMA)能够恢复所有大变形而不显示永久变形;或者在热循环中恢复残余应变。关于形状记忆合金在 Birman 的一篇文章中有详细的介绍^[1]。对于大多数形状记忆材料,最高残余应变可达到 8~15%^[2]。在这种大变形下,大型刚体运动就可能发生,从而使小应变方法无法精确应用,有限应变方法可以有效地利用。因此有必要认识到形状记忆合金(SMA)的变形在一个加卸载周期中会有比较大的变形,相应地必须明确区分初始构型(无变形构型)和当前或者加载后变形形状。

作为智能材料,形状记忆合金(SMA)由于其晶体结构可以进行可逆的相变,并能恢复大的应变而不产生永久的非弹性变形。这种可逆的变形过程可以解释为在奥氏体和马氏体之间的马氏体相变。在过去 20 多年的研究中,一些形状记忆合金本构模型已经在文献[3-9]提出。

* 收稿日期: 2010-05-17; 修订日期: 2010-07-30

作者简介: 夏开明(1969—),男,博士,助理研究教授,任美国土木工程师学会计算力学技术委员会委员(联系人, E-mail: kaiming.xia@gmail.com)。

几乎所有这些材料模型都是在实验资料的基础上提出的一维现象模型.有限元方法作为一个强有力的数值模拟工具也可以有效用来模拟形状记忆合金(SMA)的超弹性行为,但至今文献并不多见.迄今为数不多的数值模拟包括小变形分析^[5-8,10]和大变形分析^[11-13].相比之下,没有太多关于三维有限变形研究的公开文献.在相变中,超弹性本构模型的形状记忆合金(SMA)可仿照 J_2 -型广义塑性模型^[3],这样可维持一个体积不变的相变过程.本文重点是应用现时构型 Lagrange 大变形方法表述形状记忆合金的超弹性力学行为.

本文组织如下:第1节简要介绍一种形状记忆合金超弹性本构方程;第2节介绍了修正的 Lagrange 大变形方程及线性化弱式方程;第3节给出了离散的有限元方程;第4节讨论了本构方程的数值积分;第5节通过一些数值算例验证大变形超弹性算法的性能;第6节为结束语.

1 形状记忆合金相变引起的超弹性

在现有的模型中,其中的一种就是 Lubliner 和 Auricchio^[3]开发的广义塑性理论,该模型最具数值导向,且很容易用非线性有限元方法求解.图1用于描述形状记忆合金材料的完全相变过程中的超弹性行为.相应的参数有:马氏体启动应力 S_{MS} , 马氏体完成应力 S_{MF} , 奥氏体启动应力 S_{AS} 和奥氏体完成应力 S_{AF} .

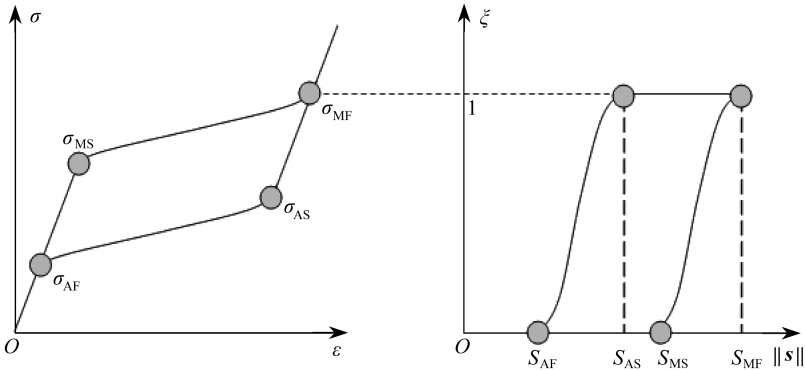


图1 形状记忆合金材料的超弹性行为

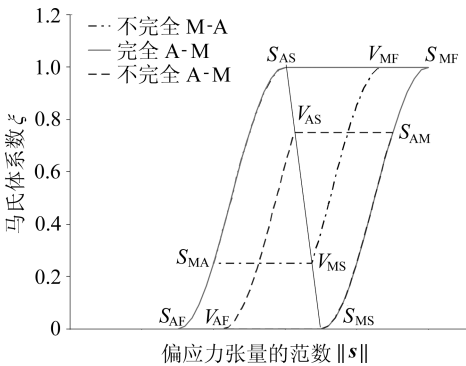


图2 形状记忆合金的完全和不完全相变过程图

当形状记忆合金(SMA)材料在高于 A_F 温度点加载,它将经历弹性变形直到应力状态激活马氏体相变的临界状态.逐步增加荷载将推动材料从奥氏体向马氏体一个完整的相变转变.相变可以用一个内部参数马氏体系数 $\xi \in [0,1]$ 来表达,这个参数在形状记忆合金中代表马氏体系数.如果马氏体系数为0,材料全部为奥氏体,如果参数是1,材料将变为马氏体.一旦 SMA 全部成为马氏体,它的变形将服从弹性规律就象在其初始奥氏体状态.进一步卸载将导致材料相变从马氏体到奥氏体逆向转变.

图2是用来描述形状记忆合金的超弹性本构方程.该本构方程具有一种广义应力偏张量塑性理论和体积不变特性.这一本构模型在文献[10]中已简要说明.该本构模型继承了广义塑性理论的优点,有效地用独立于时间非弹性模型的内部变量描述无扩散材料相变.对于非完整相变,相应的部分相变参数有:马氏体启动应力 V_{MS} , 马氏体完成应力 V_{MF} , 奥氏体启动应力

V_{AS} 和奥氏体完成应力 V_{AF} . 本文仅讨论恒温过程状态下的形状记忆合金超弹性力学行为.

相变函数 $F(S, \xi)$ 假定依赖于应力偏张量. 本文提出了一个非线性余弦本构模型, 相变函数和应力偏张量 s_{ij} 的内积服从余弦函数变化规律. 参数 S 的定义如方程(1):

$$S = \|s\| = \sqrt{s_{ij}:s_{ij}} = \sqrt{2J_2}. \quad (1)$$

完整和不完整的相变函数的 $F_{AM}(\xi, S)$ ($A \rightarrow M$) 和 $F_{MA}(\xi, S)$ ($M \rightarrow A$) 表达如下:

$$\begin{cases} F_{AM}(\xi, S) = \xi - \frac{1}{2} [\cos a_M (S - V_{MF}) + 1] & (V_{MS} \leq S \leq V_{MF}), \\ F_{MA}(\xi, S) = \xi + \frac{1}{2} [\cos a_A (S - V_{AF}) - 1] & (V_{AF} \leq S \leq V_{AS}), \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$a_M = \pi / (S_{MS} - S_{MF}), \quad (3)$$

$$a_A = \pi / (S_{AS} - S_{AF}). \quad (4)$$

相应的不完全相变开始和结束应力方程是

$$\begin{cases} V_{MS} = (1 - \xi_p) S_{MS} + \xi_p S_{AS}, \\ V_{MF} = (1 + \xi_p) S_{AS} + (1 - \xi_p) S_{MS} - S_{AF} - \frac{\arccos(1 - 2\xi_p)}{a_A}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} V_{AS} = (1 - \xi_p) S_{MS} + \xi_p S_{AS}, \\ V_{AF} = S_{MS} - S_{MF} + (1 - \xi_p) S_{MS} + \xi_p S_{AS} - \frac{\arccos(2\xi_p - 1)}{a_M}, \end{cases} \quad (6)$$

在这里, ξ_p 是从 $M \rightarrow A$ 或 $A \rightarrow M$ 相变过程最后的马氏体系数. 启动相变的条件定义如下:

$$\begin{cases} V_{MS} \leq S \leq V_{MF}, \dot{S} > 0, \Rightarrow A \rightarrow M, \\ V_{AF} \leq S \leq V_{AS}, \dot{S} < 0, \Rightarrow M \rightarrow A. \end{cases} \quad (7)$$

对于三维分析, 4 个材料模型参数分别是: S_{MS}, S_{MF}, S_{AS} 和 S_{AF} , 它们与单轴应力界限相关; 相应的 Kuhn-Tucker 前进/逆向相变条件是

$$\begin{cases} \dot{\xi} \geq 0, F_{AM}(S, \xi) \leq 0, \dot{\xi} F_{AM}(S, \xi) = 0, \\ \dot{\xi} \leq 0, F_{MA}(S, \xi) \leq 0, \dot{\xi} F_{MA}(S, \xi) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

提出的余弦本构相变模型也包含以下假设: 相变只由偏应力张量引起, 非弹性应变与相变马氏体系数改变量 λ 关系如下:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{e}_L^T \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{e}_L^T \lambda \mathbf{n}, \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\xi} \mathbf{n}. \quad (10)$$

其中最大残余应变 \mathbf{e}_L^T 的定义是 $\mathbf{e}_L^T = \sqrt{3/2} \boldsymbol{\Psi}_L$, \mathbf{n} 是相变函数面上 (相当于塑性屈服面) 的单位法向量, 且由下式确定:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\|s\|}. \quad (11)$$

2 现时构型 Lagrange 法大变形弱式方程线性化

基于连续介质大变形分析方程可以用初始材料构型或现时构型来描述. 用初始材料构型描述命名为总 Lagrange 法, 用现时构型描述命名为现时构型 Lagrange 法. 在初始时刻 t_0 , 根据虚功原理, 能量泛函相对于初始材料构型可表示为内部和外部功的总和:

$$\delta W(\delta \mathbf{u}, V_0) = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV - \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_0 dV - \int_{\Gamma_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 d\Gamma, \quad (12)$$

其中, \mathbf{S} 是 Piola-Kirchoff 第二应力张量, 和 Cauchy 应力张量的关系是 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T/J$; \mathbf{E} 为 Green-Lagrange 应变张量, $E_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})/2$; \mathbf{b}_0 和 \mathbf{t}_0 分别是在初始构型的体积力向量和表面应力. 方程 (12) 可利用 Newton 法进一步线性化以便求解.

$$\delta W(\delta \mathbf{u}, \Omega_0) + D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W(\delta \mathbf{u}, \Omega_0) \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

由于方程 (12) 对外部的工作表现是线性的, 外部虚功的线性化项目消失. 然而, 方程 (13) 内部能量项是非线性的, 对其线性后导出的方程如下:

$$D_{\text{int}} \delta W(\delta \mathbf{u}, V_0) \Delta \mathbf{u} = \int_{V_0} (\delta \mathbf{E} : \mathbf{D}\mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbf{D}(\delta \mathbf{E})) dV = \int_{V_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{D}\mathbf{E} dV + \int_{V_0} \mathbf{S} : \mathbf{D}(\delta \mathbf{E}) dV, \quad (14)$$

以增率形式重新描述方程 (14) 并且转换到现时构型, 从而推导出现时构型 Lagrange 法大变形线性化后的弱式方程:

$$\int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : \Delta \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : (\boldsymbol{\sigma}_n \otimes \mathbf{1}) : \nabla(\Delta \mathbf{u}) dV = \int_{V_{n+1}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_{n+1}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma - \int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}_n dV. \quad (15)$$

为了使用 Cauchy 应力和线性应变本构关系, 与构型无关的客观应力增率应该使用于方程 (15). 对于大变形, 本构方程通常写成增率的形式. 在大变形分析中, 这种类型的方程应该能够客观地反应由于构型的旋转引起的应力变化. 增率本构关系可以用初始构型或现时构型任何之一来表达. 前一种情况涉及的张量增率总是客观的. 然而, 在现时构型中, 目标张量的增率不一定总是客观的, 通常客观应力增率应该被使用, 如 Jaumann 应力增率. 在现时构型 Lagrange 法大变形法中, 这些方程表达着客观应力增率和变形增率的关系. 与大变形相比, 小变形的应变增率将被变形增率取代. 将 Cauchy 应力张量的 Jaumann 应力增率用于本研究, 见如下方程:

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^J + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}^T = \mathbf{C}_{\text{El}}^J : \mathbf{D} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}^T, \quad (16)$$

Cauchy 应力张量增率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 是根据旋转不变 Jaumann 应力增率确定的, 上角标“J”表示 Jaumann 应力增率. Cauchy 应力的物质导数由两部分组成: 材料反应引起的增率和有限旋转导致的应力变化 (相当于后面的两项). \mathbf{D} 是变形梯度增率, 它等于速度梯度 \mathbf{L} 的对称部分,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (18)$$

相对于现时构型的旋转张量 $\boldsymbol{\Omega}$, 可表示成

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \Delta t = \frac{1}{2}(\nabla \Delta \mathbf{u} - \nabla^T \Delta \mathbf{u}). \quad (19)$$

对于现时构型的增量应变, 可表示为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \Delta t. \quad (20)$$

因此, 应力增量张量可表示为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \Delta t = \mathbf{C}_{\text{El}}^J : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\Omega}^T). \quad (21)$$

将方程 (21) 代入方程 (15), 基于 Jaumann 应力增率获得现时 Lagrange 法弱式方程可表示为

$$\int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : (\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\Omega}^T) dV +$$

$$\int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : (\boldsymbol{\sigma}_n \otimes \mathbf{1}) : \nabla(\Delta \mathbf{u}) dV = \int_{V_{n+1}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_{n+1}^c} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Omega - \int_{V_{n+1}} \nabla(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}_n dV. \quad (22)$$

使用 Jaumann 应力增率可以简化应力计算,而且类似于小变形应力更新计算方法.基于方程(22),我们可以看到,大变形的切线刚度包括两个部分:标准的材料刚度和初始应力刚度.

3 离散的有限元方程

通过有限元插值和离散线性化的弱式方程(22),增量位移 $\Delta \mathbf{u}$ 和其它变量在空间任何一点可以表示为

$$\delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{N})^T, \Delta \mathbf{u}^h = \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}^e, \quad (23)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^e, \Delta \boldsymbol{\Omega}^h = \mathbf{B}^w \Delta \mathbf{u}^e. \quad (24)$$

上标 T 代表转置, e 代表单元, w 表示与旋转有关的位移导数.将方程(23)和(24)代入式(22),我们会得到现时构型的 Lagrange 法大变形矩阵方程:

$$(\mathbf{K}_M^e + \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_\Omega^e) \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e, \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{K}_M^e = \int_{V_{n+1}^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_G^e = \int_{V_{n+1}^e} \mathbf{G}^T (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{G} dV, \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_\Omega^e = \int_{V_{n+1}^e} (\mathbf{B}_u^w)^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\Omega}^T dV + \int_{V_{n+1}^e} (\mathbf{B}_u^w)^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (28)$$

$$\mathbf{R}^e = \int_{V_{n+1}^e} \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_{n+1}^c} \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} d\Gamma - \int_{V_{n+1}^e} \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}_n dV, \quad (29)$$

$$\mathbf{G} = [\nabla N_1 \quad \cdots \quad \nabla N_i \quad \cdots \quad \nabla N_{ne}]. \quad (30)$$

方程(26)至(28)分别是标准材料、几何和有限旋转引起的刚度矩阵.总体有限方程可通过组集有限单元的刚度矩阵和残余向量,如下式:

$$\sum_{e=1}^{NEL} (\mathbf{K}_M^e + \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_\Omega^e) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{nodal} + \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{A} (\mathbf{R}^e), \quad (31)$$

NEL 表示总有限单元数.

4 超弹性本构方程的数值积分

在此数值研究中,应力分量定义于固定的坐标系统,从 t_n 到 t_{n+1} 的初始应力增量还必须考虑到变形体的旋转引起的应力增量^[14-16].在超弹性模型中, Cauchy 应力用 Jaumann 应力增率表示.通过分解将变形增率张量 \mathbf{D} 分解成弹性和非弹性两部分:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^i. \quad (32)$$

弹性响应可将弹性部分的变形增率代入亚弹性方程去计算:

$$\boldsymbol{\sigma}^J = \mathbf{C}_E^J : \mathbf{D}^e \Delta t = \mathbf{C}_E^J : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^i) \Delta t = \mathbf{C}_E^J : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i). \quad (33)$$

这就客观地要求弹性矩阵 \mathbf{C}_E^J 应是各向同性,否则弹性矩阵相对于固定坐标系会由于构型的旋转发生变化.如果变形增率被用来计算由于大变形引起的应力增量,其应力更新和有限元非弹性的小应变返回映射法相同.向后 Euler 积分算法无条件稳定,因此被用于处理形状记忆合金相变引起的超弹性力学行为.基于在 $t = t_n$ 的收敛解,我们可以计算 $t = t_{n+1}$ 的解.算子分离、弹

性预测、非弹性的校正方法^[15-16]被用来积分形状记忆合金相变-超弹性本构方程。二步算法可以总结如下:

弹性预测 我们假定在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 没有相变发生,其应力张量可以计算如下:

$$\lambda^{\text{tr}} = 0, \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\Omega}_n \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\Omega}_n^{\text{T}} + \mathbf{C}_{\text{El}}^{\text{J}} : \mathbf{D}\Delta t, \quad (35)$$

上标 tr 表示试算值, J 表示与此同时 Jaumann 有关的张量。如果弹性尝试状态允许,它并不符合相变变换条件,那么它代表的就是 t_{n+1} 的解,第二部分的算法就可以跳过。如果弹性尝试状态是不允许的,真正的解就必须通过非弹性修正来确定。

非弹性校正 强行满足相变的本构方程,把相变函数离散成两个方向如下:

$$\begin{cases} F_{\text{AM}} = \xi_n + \lambda - \frac{1}{2} [\cos a_{\text{M}} (S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda - V_{\text{MF}})] - \frac{1}{2} = 0, \\ F_{\text{MA}} = \xi_n + \lambda - \frac{1}{2} [\cos a_{\text{A}} (S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda - V_{\text{AS}}^0)] - \frac{1}{2} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

参数 λ 是指马氏体系数的改变并可通过局部 Newton-Raphson 迭代方法计算所得。当 λ 取非 0 值时,非弹性应变增量和 Cauchy 应力张量更新为

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{i}} = \mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda \mathbf{n}, \quad (37)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \frac{\mathbf{s}^{\text{tr}}}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|}, \quad (38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\Omega}_n \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\Omega}_n^{\text{T}} + \mathbf{C}_{\text{E}}^{\text{J}} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda \mathbf{n}). \quad (39)$$

同样基于文献[14],有以下等效关系:

$$\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\Omega}_n \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\Omega}_n^{\text{T}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{R}^{\text{T}}, \quad (40)$$

式中 \mathbf{R} 代表旋转矩阵。偏应力张量的内积可计算如下:

$$S = \|\mathbf{s}\| = S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda. \quad (41)$$

4 阶连续切线非弹性矩阵可用类似于传统的弹-塑性切线模量的方式推导。切线非弹性矩阵可由应力张量和应变张量的微分导出,

$$\mathbf{C}_{\text{El}}^{\text{J}} = \frac{\partial \Delta\boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{K}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \left(1 - \frac{2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|} \right) \mathbf{I}_{\text{dev}} + 2G \left(\frac{2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|} - \mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\chi \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (42)$$

参数 χ 依赖于相变的方向从 A→M 或 M→A,分别计算如下:

$$\chi = \begin{cases} \frac{-a_{\text{M}} G \sin[a_{\text{M}} (S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda - V_{\text{MF}})]}{1 - a_{\text{M}} \mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}} \sin[a_{\text{M}} (S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda - V_{\text{MF}})]} & (\text{当 A} \rightarrow \text{M}), \\ \frac{-a_{\text{A}} G \sin[a_{\text{A}} (S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda - V_{\text{AS}}^0)]}{1 - a_{\text{A}} \mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}} \sin[a_{\text{A}} (S^{\text{tr}} - 2\mathbf{G}\mathbf{e}_{\text{L}}^{\text{T}}\lambda - V_{\text{AS}}^0)]} & (\text{当 A} \leftarrow \text{M}). \end{cases} \quad (43)$$

当形状记忆合金完全处于的奥氏体状态或马氏体状态,马氏体系数变化 λ 为 0 并且材料恢复为弹性变形。

5 数值算例分析

5.1 单轴试验

这个例子主要是为了验证形状记忆合金的超弹性本构方程及其大变形有限元分析法的有效性。试件的加载过程是通过位移控制的。试件的几何形状和边界约束如图 3 所示, SMA 模型的材料参数有: $S_{\text{MS}} = 75 \text{ MPa}$, $S_{\text{MF}} = 90 \text{ MPa}$, $S_{\text{AS}} = 70 \text{ MPa}$, $S_{\text{AF}} = 55 \text{ MPa}$, $E = 7\,500 \text{ MPa}$, $\nu = 0.499\,9$, 最大残余应变为 0.06。在这个算例中,模拟的是 A→M 部分的和完全的确相变过程,

也证实了前面提出的压力会引起 SMA 的相位变化。

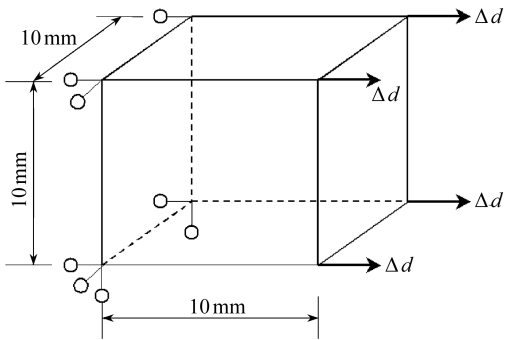


图3 形状记忆合金单轴试验

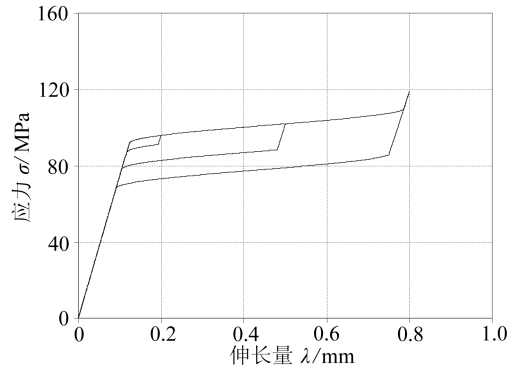


图4 部分和完全马氏体相变引起的单轴应力与伸长量的关系

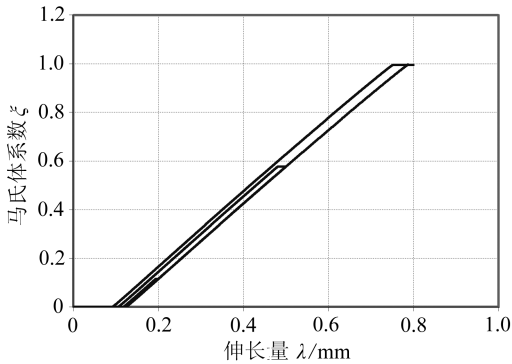


图5 部分和完全马氏体相变变形的马氏体百分比与伸长量的关系

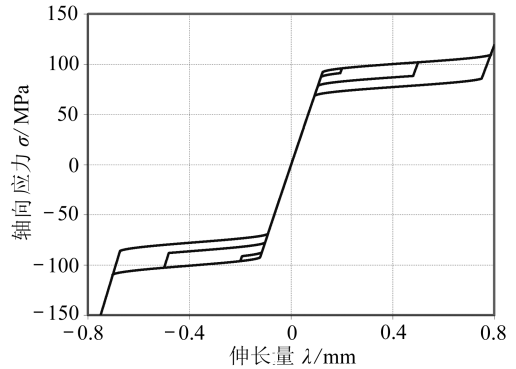


图6 部分或完全从奥氏体到马氏体相变化过程引起的应力与伸长量的关系

形状记忆合金的最重要的力学行为是在卸载后可以恢复变形,同时会形成一个力和位移的滞回环.它伴随部分和完整的马氏体相变过程。

图4显示了从奥氏体到马氏体的部分和完全相变过程中的力和构件伸长量的超弹性滞回环.图5是马氏体系数与伸长量的关系.总的来说,这些结果证实了前面提到的大变形超弹性分析方法可以准确地预测部分和完全相变过程及其伴随的超弹性滞回环.图6表示的是在压力和拉力作用下从奥氏体到马氏体相变过程的轴向力和伸长量的关系.因为相位变化是应力的偏张量的函数,所以前面提到的模型在压力和拉力的作用下有相似的滞回环.而且,它在压力和拉力的作用下产生的相变也是一样的.这些结果证明了该改进模型的实用性。

5.2 三维悬臂梁

如图7所示的是左端固定和右端承受剪力的三维悬臂梁有限元模型.其几何尺寸是长40 mm,宽4 mm,高10 mm.SMA模型的材料参数有:

$$S_{MS} = 110 \text{ MPa}, S_{MF} = 140 \text{ MPa}, S_{AS} = 100 \text{ MPa},$$

$$S_{AF} = 70 \text{ MPa}, E = 7\,500 \text{ MPa}, \nu = 0.35,$$

最大残余应变为0.06.在该实例中,从小变形和大变形两方面证实本文提出的本构模型及算法适用于三维悬臂梁弯曲。

图8表示的是在初始坐标系中的位置点(40,0,0)(见图7),由于外荷载产生的竖直方向

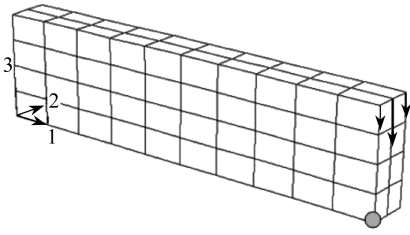


图7 悬臂梁体的有限元模型

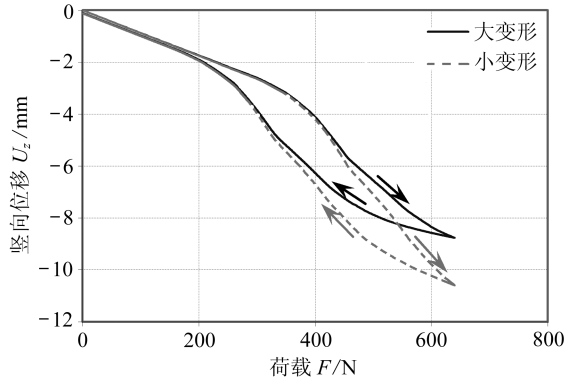
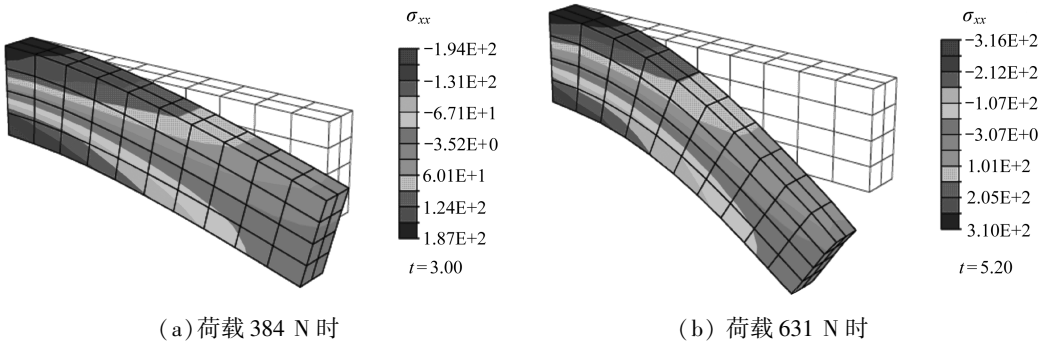
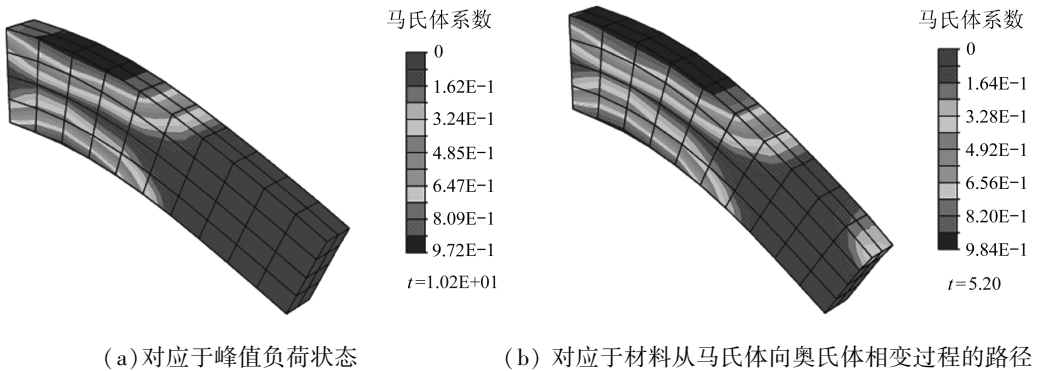
图8 大变形与小变形分析方法中
挠度-力的关系图9 荷载分别为 384 N 和 631 N 时引起的应力 σ_{xx} 等值线图

图10 荷载分别为 384 N 和 631 N 时引起的马氏体系数等值线图

的位移。从图8中可以看出,前面提出的大变形方法和应力引起的本构模型构成可以有效地模拟形状记忆合金材料的三维悬臂梁模型的超弹性特性。可以得到图7中标示节点的位移和荷载关系的滞回环。卸载后材料的变形可以完全恢复。在图8中还提供了大变形和小变形得到的挠度结果比较。相对于大变形,小变形产生的位移要大,这可以从图8中得到证实。这是因为相对于小变形方法,大变形的刚度矩阵多出了初应力刚度矩阵,它会使得大变形分析得出的位移相对较小。滞回环说明 SMA 有消耗能量的作用,这在结构减震方面是至关重要的。图9显示的是结构变形后的应力 σ_{11} 的等值线,对应的荷载分别是 384 N 和 631 N。

对于形状记忆合金的超弹性行为,马氏体系数是一个衡量相变过程的重要指标。在数值模拟中,我们计算了积分点的马氏体系数后处理实用。图10显示了在不同应力状态下的马氏体系

数等值线图。图 10(a) 对应于峰值负荷状态, 它相当于形状记忆合金的相变的最大值。图 10(b) 对应于材料从马氏体向奥氏体相变过程的路径中。所有的这些图清楚地表明, 外部荷载仅导致悬臂梁局部发生相变。大多数其他部位梁体仅发生弹性变形, 没有相变发生。基于相变函数方程, 这表明在这些相变发生的部位的偏应力张量的内积要高于 S_{MS} 。图 10 同时也清楚地显示超弹性模型预测的相变过程是可逆的, 变形在卸载后可完全恢复。

6 结束语

本文提出了一种材料和几何非线性的三维有限元算法来模拟形状记忆合金的超弹性力学行为。使用了现时构型 Lagrange 法大变形理论, 因此弱式及其积分都建立于现时构型的空间坐标。变形增率作为现时构型 Lagrange 法大变形理论应变增率的度量。为了维持客观性的准则, Jaumann 应力增率被用来计算由于变形体旋转引起的应力变化。该方法允许使用 Cauchy 应力和线性应变的本构关系。相对于小变形, 大变形增加了与初始应力有关的刚度矩阵项。代表性的数值模拟包括形状记忆合金单轴拉伸和悬臂弯曲梁。8 节点六面体单元用于离散弯曲梁。数值模拟结果表明提出的材料本构模型和大变形有限元方程可以有效地预测形状记忆合金超弹性变形滞回环。

参考文献:

- [1] Birman V. Review of mechanics of shape memory alloy structures[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, **50**(11): 629-645.
- [2] Duerig T W, Melton K N, Stockel D, Wayman C M. *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*[M]. London: Butterworth-Heinemann, 1990, 137-148.
- [3] Lubliner J, Auricchio F. Generalized plasticity and shape memory alloys[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(7): 991-1003.
- [4] Auricchio F, Taylor R L, Lubliner J. Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior[J]. *Comp Meths Appl Mech Eng*, 1997, **146**(3/4): 281-312.
- [5] Barret D J, Sullivan B J. A three-dimensional phase transformation model for shape memory alloys[J]. *J Intelligent Mater Syst Struct*, 1995, **6**(6): 831-839.
- [6] Brinson L C, Lammerning R. Finite-element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, **30**(23): 3261-3280.
- [7] Qidwai M A, Lagoudas D C. Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms[J]. *Int J Numer Meths Eng*, 2000, **47**(6): 1123-1168.
- [8] Rengarajan G, Kumar R K, Reddy J N. Numerical modeling of stress induced martensitic phase transformations in shape memory alloys[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**(14): 1489-1513.
- [9] Tanaka K, Nishimura F, Hayashi T, Tobushi H, LExcellent C. Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads [J]. *Mechnica of Materials*, 1995, **19**(4): 281-292.
- [10] Masud A, Xia K. A variational multiscale method for computational inelasticity: application to superelasticity in shape memory alloys[J]. *Comp Meths Appl Mech Engrg*, 2006, **195**(33/36): 4512-4531.

- [11] Masud A, Panahandeh M, Auricchio F. A finite-strain finite element model for the pseudo-elastic behavior of shape memory alloys[J]. *Comp Meths Appl Mech Engrg*, 1997, **148**(1/2): 23-37.
- [12] Auricchio F. A robust integration-algorithm for a finite-strain shape memory alloy superelastic model[J]. *Int J Plasticity*, 2001, **17**(7): 971-990.
- [13] Stein E, Sagar G. Theory and finite element computation of cyclic martensitic phase transformation at finite strain[J]. *Int J Numer Meth Engrg*, 2008, **74**(1): 1-31.
- [14] Hughes T J R, Winget J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis[J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1980, **15**(12): 1862-1876.
- [15] Simo J C, Hughes T J R. *Computational Inelasticity*[M]. New York:Springer-Verlag, 1998.
- [16] Belytschko T, Liu W K, Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures* [M]. John Wiley & Sons Ltd, 2000.

Three Dimensional Large Deformation Analysis of Phase Transformation in Shape Memory Alloys

XIA Kai-ming¹, PAN Tong-yan², LIU Shan-hong³

(1. *Division of Engineering, Colorado School of Mines, Golden, CO 80401, USA;*

2. *Department of Civil and Environmental Engineering, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, 24061, USA;*

3. *Department of Bridge Engineering, School of Civil Engineering and Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)*

Abstract: Shape memory alloys (SMAs) have been explored as smart materials and used as dampers, actuator elements and smart sensors. An important character of SMAs is its ability to recover all of its large deformations in mechanical loading-unloading cycles, without showing permanent deformation. A stress-induced phenomenological constitutive equation for SMAs, which can be used to describe the superelastic hysteresis loops and phase transformation between martensite and austenite was presented. The martensite fraction of SMAs was assumed to be dependent on deviatoric stress tensor. Therefore phase transformation of shape memory alloys was volume preserving during the phase transformation. The model was implemented in large deformation finite element code and cast in the updated Lagrangian scheme. In order to use Cauchy stress and the linear strain in constitutive laws, a frame indifferent stress objective rate has to be used and the Jaumann stress rate was used. The results of the numerical experiments conducted show that the superelastic hysteresis loops arising with the phase transformation can be effectively captured.

Key words: shape memory alloys; phase transformation; superelasticity; large deformation; finite element