文章编号:1000-0887(2010)10-1211-09

不动点问题平衡问题及变分不等式问题的具弱压缩的粘性逼近*

张石生[1], 李向荣[2], 陈志坚[2], 柳京爱[3]

(1. 宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007;
2. 香港理工大学 应用数学系,香港 九龙;
3. 北京石油化工学院 数理系,北京 102617)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 借助具弱压缩的粘性逼近,提出一种新的修正的迭代算法,用以寻求一公共元,它既是一无穷族非扩张映像的公共不动点集中的点,也是一有限族的平衡问题的解集中的点,而且它还是一变分不等式的解. 在适当的条件下,一些强收敛定理在 Hilbert 空间的框架下被建立. 所得结果推广和改进了 Colao 等[Nonlinear Anal, 2009, 71:2708-2715], Plubtieng 等[J Math Anal Appl, 2007, 336:455-469], Colao 等[J Math Anal Appl, 2008, 344:340-352], Yao 等[Fixed Point Theory Appl, 2007, Art ID 64363]及其他人的一些最新的结果.

关 键 词: 具弱压缩映像的粘性逼近; 平衡问题; 非扩张映像; 隐迭代; 极小化问题

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.008

引 言

本文处处假定 H 是一 实 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空的闭凸子集, P_C 是由 H 到 C 上的度量投影. 下面我们用“$\to$”表示强收敛,而用“$\rightharpoonup$”表示弱收敛.

一映像 $T:C\to C$ 称为非扩张的, 如果 $\|Tx - Ty\| \leqslant \|x - y\|, \forall x,y \in C$. 我们用 $F(T)$ 表 T 在 C 中的不动点的集合.

一映像 $f:C\to C$ 称为压缩的,如果存在一常数 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha \|x - y\|, \qquad \forall x,y \in C. \tag{1}$$

下面的具粘性的变分不等式问题: 求 $x^* \in C$ 使得

$$\langle (I - \gamma f)x^*, x - x^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in C \tag{2}$$

是非常有兴趣的. 上面的式子是下面的优化问题的最优化条件:

$$\min_{x\in C} \frac{1}{2}\langle x,x\rangle + h(x), \tag{3}$$

---

* **收稿日期:** 2010-05-06; **修订日期:** 2010-09-08

作者简介: 张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(联系人. E-mail:changss@yahoo.cn);
陈志坚(E-mail:machanck@polyu.edu.hk);
李向荣(E-mail: majlee@polyu.edu.hk);
柳京爱(E-mail: liujingai@bipt.edu.cn).

其中，h 是 γf 的势函数，而 γ 是一适当的正常数。

设 $G: C \times C \to R$ 是一平衡函数，即 $G(u,u)=0$, $\forall u \in C$。所谓的平衡问题是求一 $x^* \in C$，使得

$$G(x^*, y) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{4}$$

问题(4)的解 $x^* \in C$ 称为平衡点。问题(4)的平衡点的集合以 SEP(G) 记之。

为了求解平衡问题(4)，我们假定平衡函数 $G: C \times C \to \mathscr{R}$ 满足下面的条件：

(A1) $G(x,x)=0$, $\forall x \in C$;

(A2) G 是单调的，即 $G(x,y)+G(y,x) \leqslant 0$, $\forall x,y \in C$;

(A3) $\lim_{t\to 0} G(x+t(z-x),y) \leqslant G(x,y)$，对所有的 $x,y,z \in C$;

(A4) 函数 $y \mapsto G(x,y)$ 是凸的、下半连续的。

另一方面，对给定的非扩张映像 $T: C \to C$，在 $F(T)$ 中求最优化问题(3)之一最优点，对科学的许多分支来说是非常有意义的(见文献[1-2])。

不久前，在文献[3]中，为了在 SEP(G) $\cap$ $F(T)$ 中求得一元，满足变分不等式(2)，他们借助粘性逼近迭代方法，对下面的隐迭代序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases} G(y_n,u)+\dfrac{1}{r_n}\langle u-y_n, y_n-x_n\rangle \geqslant 0, & \forall u \in C, \\ x_n=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Ty_n, & \forall n \geqslant 1, \end{cases} \tag{5}$$

证明了一个强收敛定理。

设 E 是一实 Banach 空间，C 是 E 之一非空的闭凸子集。设 $\{T_i\}$ 是 C 上之一无限族的非扩张映像，而 $\{\lambda_i\}$ 是一实序列，使得 $0<\lambda_i \leqslant b<1$, $\forall i \geqslant 1$。按照 Shimoji 等的文献[4]，对任意 $n \geqslant 1$，我们定义一映像 $W_n: C \to C$ 如下：

$$\begin{cases} U_{n,n+1}=I, \\ U_{n,n}=\lambda_n T_n U_{n,n+1}+(1-\lambda_n)I, \\ \vdots \\ U_{n,k}=\lambda_k T_k U_{n,k+1}+(1-\lambda_k)I, \\ \vdots \\ U_{n,2}=\lambda_2 T_2 U_{n,3}+(1-\lambda_2)I, \\ W_n=U_{n,1}=\lambda_1 T_1 U_{n,2}+(1-\lambda_1)I. \end{cases} \tag{6}$$

最近，Colao 等[5]研究了下面的由 $x_0 \in C$ 定义的隐迭代序列 $\{x_n\}$：

$$x_n=\alpha_n \gamma f(x_n)+(1-\alpha_n A)W_n S^1_{r_1,n} S^2_{r_2,n} \cdots S^K_{r_K,n} x_n, \qquad \forall n \geqslant 1, \tag{7}$$

并证明了序列 $\{x_n\}$ 强收敛 $x^* \in \mathscr{F} := \cap_{k=1}^K \mathrm{SEP}(G_k) \cap \cap_{n=1}^\infty F(T_n)$，而且该点也是下面的变分不等式的解：

$$\langle (A-\gamma f)x^*, x-x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in \mathscr{F}. \tag{8}$$

受 Plubtieng 和 Punpaeng[3]，与 Colao 等[5]的启发，本文的目的是借助具弱压缩的粘性逼近，提出一种新的修正的迭代算法，用以寻求一公共元，它既是一无穷族非扩张映像的公共不动点集中的点，也是一有限族的平衡问题的解集中的点，而且它还是一变分不等式的解。在适当的条件下，一些强收敛定理在 Hilbert 空间的框架下被建立。本文结果改进和推广了 Colao 等[5]、Plubtieng 等[3]、Colao 等[6]、Yao 等[7]及其他人的相应的结果。

1 预备知识

一映像 $\Phi: C\to C$ 称为 ψ-弱压缩的(简称为弱压缩映像)[8],如果存在一连续的、严格增的函数 $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得 ψ 在 $(0,\infty)$ 上是正的,$\psi(0)=0$ 而且

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\leqslant\|x-y\|-\psi(\|x-y\|),\qquad\forall x,y\in C.$$

作为特例,如果 $\psi(t)=(1-\alpha)t,t\in[0,\infty),\alpha\in(0,1)$,则弱压缩映像 Φ 就是 C 上的一具压缩常数 α 的压缩映像.

引理 1.1[9] 设 E 是一 Banach 空间,C 是 E 之一凸子集.设 $T: C\to C$ 是一非扩张映像,而 $\Phi: C\to C$ 是一弱压缩映像.则下面的结论成立:

(i) $T\circ\Phi$ 是弱压缩的;

(ii) 对每一 $t\in(0,1)$,映像 $x\mapsto t\,\Phi(x)+(1-t)Tx$ 是弱压缩的,而且由下式定义的网 $\{x_t\}$:

$$x_t=t\,\Phi(x_t)+(1-t)Tx_t$$

是适定的.

引理 1.2[10] 设 (X,d) 是一完备的度量空间,而 $T: X\to X$ 是一弱压缩映像.则 T 在 X 中有唯一的不动点.

引理 1.3[4] 设 $\{T_i\}: C\to C$ 是一无限族的非扩张映像,且 $\cap_{n=1}^{\infty}F(T_i)\neq\emptyset$,设 $\{W_n\}: C\to C$ 是由式(6)定义的映像序列.则

(i) 对每一 $n\geqslant1$,W_n 是非扩张的,而且 $F(W_n)=\cap_{i=1}^{n}F(T_i)$;

(ii) 对每一 $x\in C$ 及对每一正整数 k,极限 $\lim_{n\to\infty}U_{n,k}x$ 存在;

(iii) 由下式定义的映像 $W: C\to C$:

$$Wx=\lim_{n\to\infty}W_n x=\lim_{n\to\infty}U_{n,1}x,\qquad\forall x\in C$$

是一满足 $F(W)=\cap_{n=1}^{\infty}F(T_i)$ 的非扩张映像,并称之为由 $T_1,T_2,\cdots$ 及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 生成的 W-映像.

引理 1.4[11] 设 $\{T_i\}: C\to C$ 是一无限族的非扩张映像,且 $\cap_{n=1}^{\infty}F(T_i)\neq\emptyset$,设 $\{W_n\}: C\to C$ 是由式(6)定义的系列.如果 K 是 C 的任意的有界子集,则

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in K}\|Wx-W_n x\|=0.\tag{9}$$

引理 1.5[12] 设 $G: C\times C\to\mathscr{R}$ 是一函数满足条件(A1)~(A4).对每一 $x\in H$ 及 $r>0$,由下式定义一映像 $S_r: H\to C$:

$$S_r(x)=\left\{z\in C: G(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle\geqslant0,\ \forall y\in C\right\},\tag{10}$$

则 S_r 是适定的,而且下面的结论成立:

(i) S_r 是单值的;

(ii) S_r 是强非扩张的,即,$\|S_r x-S_r y\|^2\leqslant\langle S_r x-S_r y,x-y\rangle,\forall x,y\in H$;

(iii) $F(S_r)=\mathrm{SEP}(G)$;

(iv) $\mathrm{SEP}(G)$ 是闭凸的.

引理 1.6[5] 设 $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ 是一收敛于 $r>0$ 的序列.设 $G: C\times C\to\mathscr{R}$ 是一函数满足条件(A1)~(A4).对每一 $n\geqslant1$ 用与引理 1.5 中相同的方法,定义 S_{r_n} 和 S_r,则对每一 $x\in H$,有

$$\lim_{n\to\infty}\|S_{r_n}x - S_r x\| = 0. \tag{11}$$

2 主要结果

定理2.1 设C是H中之一非空的闭凸子集, $\{T_i\}: C\to C$是一无限族的非扩张映像, $G_k: C\times C\to \mathscr{R}, k=1,2,\cdots,K$ 是一函数满足条件(A1)~(A4)使得 $\mathcal{F}:=\cap_{k=1}^{K}\mathrm{SEP}(G_k)\cap\cap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\neq\emptyset$, 而$\Phi$: $C\to C$是一ψ-弱压缩映像. 再设$\{r_{k,n}\}$, $\{r_n\}$是二正数的序列, 使得对每一$k\in\{1,2,\cdots,K\}$, $\lim_{n\to\infty} r_{k,n}=r_k>0$. 对每一$n\geqslant 1$, 设$W_n$是由$\{T_i\}$和$\{\lambda_i\}$象式(6)中一样所生成的映像. 对每一$k\in\{1,2,\cdots,K\}$和每一$n\geqslant 1$, 设$S^k_{r_{k,n}}$是由$G_k$和$r_{k,n}$象式(10)中一样所生成映像, 即, 对每一$x\in H$,

$$S^k_{r_{k,n}}(x)=\left\{z\in C: G_k(z,y)+\frac{1}{r_{k,n}}\langle y-z,z-x\rangle\geqslant 0, \forall y\in C\right\}.$$

设$\{x_n\}$是由下式定义的序列:

$$x_n=\alpha_n\Phi(x_n)+(1-\alpha_n)W_nS^1_{r_{1,n}}S^2_{r_{2,n}}\cdots S^K_{r_{K,n}}x_n, \qquad n\geqslant 1, \tag{12}$$

其中$\{\alpha_n\}$是$(0,1)$中的序列, 使得$\alpha_n\to 0$(当$n\to\infty$). 则$\{x_n\}$强收敛于$x^*\in\mathcal{F}$, 其中x^*是下面的变分不等式的唯一解:

$$\langle (I-\Phi)x^*, x-x^*\rangle\geqslant 0, \qquad \forall x\in\mathcal{F}, \tag{13}$$

其等价于, $x^*=P_{\mathcal{F}}\Phi(x^*)$, 也等价于$x^*$是下面的最优化问题的唯一解:

$$\min_{x\in\mathcal{F}}\frac{1}{2}\|x\|^2+h(x), \tag{14}$$

其中h是Φ的势函数.

证明 定理的证明被分成7步.

(Ⅰ) 先证$\{x_n\}$是适定的

首先证明对每一$n\geqslant 1$, 由下式定义的映像$V_n: C\to C$:

$$V_n(x)=\alpha_n\Phi(x)+(1-\alpha_n)W_nS^1_{r_{1,n}}S^2_{r_{2,n}}\cdots S^K_{r_{K,n}}x, \qquad x\in C$$

是弱压缩的. 事实上, 由引理1.3和1.5得知, 对每一$k\in\{1,2,\cdots,K\}$及每一$n\geqslant 1$, 映像W_n和$S^k_{r_{k,n}}$都是非扩张的. 故有

$$\begin{aligned}\|V_nx-V_ny\| &\leqslant \alpha_n\|\Phi(x)-\Phi(y)\|+\\ &(1-\alpha_n)\|W_nS^1_{r_{1,n}}S^2_{r_{2,n}}\cdots S^K_{r_{K,n}}x-W_nS^1_{r_{1,n}}S^2_{r_{2,n}}\cdots S^K_{r_{K,n}}y\|\leqslant\\ &\alpha_n\{\|x-y\|-\psi(\|x-y\|)\}+(1-\alpha_n)\|x-y\|=\\ &\|x-y\|-\alpha_n\psi(\|x-y\|), \qquad \forall x,y\in C.\end{aligned}$$

这就证明了V_n是弱压缩的. 由引理1.2, 存在唯一的$x_n\in C$使得$x_n=V_nx_n$. 故$\{x_n\}$是适定的.

(Ⅱ) 现证$\{x_n\}$是有界的

对任意的$p\in\mathcal{F}$, 令$S_n:=S^1_{r_{1,n}}S^2_{r_{2,n}}\cdots S^K_{r_{K,n}}$, 有

$$\begin{aligned}\|x_n-p\|^2 &=\langle\alpha_n\Phi(x_n)+(1-\alpha_n)W_nS_nx_n-p, x_n-p\rangle=\\ &\alpha_n\langle\Phi(x_n)-\Phi(p), x_n-p\rangle+\alpha_n\langle\Phi(p)-p, x_n-p\rangle+\\ &(1-\alpha_n)\langle W_nS_nx_n-W_nS_np, x_n-p\rangle\leqslant\\ &\alpha_n\{\|x_n-p\|-\psi(\|x_n-p\|)\}\|x_n-p\|+\\ &\alpha_n\langle\Phi(p)-p, x_n-p\rangle+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|^2=\\ &\|x_n-p\|^2-\alpha_n\psi(\|x_n-p\|)\|x_n-p\|+\alpha_n\langle\Phi(p)-p, x_n-p\rangle.\end{aligned} \tag{15}$$

简化之,可得

$$\psi(\|x_n - p\|) \leqslant \|\Phi(p) - p\|, \qquad \text{对每一 } n \geqslant 1.$$

即, $\{x_n\}$ 是有界的.

(Ⅲ) 现证对每一 $k \in \{1,2,\cdots,K\}$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - S_{r_{k,n}}^k x_n\| = 0. \tag{16}$$

事实上,由引理 1.5 的结论(ii), $S_{r_{k,n}}^k$ 是强非扩张的,故对任意给定的 $p \in \mathcal{F}$, 有

$$\begin{aligned}\|S_{r_{k,n}}^k x_n - p\|^2 = \|S_{r_{k,n}}^k x_n - S_{r_{k,n}}^k p\|^2 \leqslant\\ \langle S_{r_{k,n}}^k x_n - S_{r_{k,n}}^k p, x_n - p\rangle =\\ \frac{1}{2}\{\|S_{r_{k,n}}^k x_n - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \|x_n - S_{r_{k,n}}^k x_n\|^2\},\end{aligned}$$

即

$$\|x_n - S_{r_{k,n}}^k x_n\|^2 \leqslant \|x_n - p\|^2 - \|S_{r_{k,n}}^k x_n - p\|^2. \tag{17}$$

令 $\xi_n := 2\langle\Phi(x_n) - W_n S_n x_n, x_n - p\rangle$ 并借用不等式

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, x + y\rangle, \qquad \forall x, y \in H, \tag{18}$$

可得

$$\begin{aligned}\|x_n - p\|^2 = \|\alpha_n \Phi(x_n) + (1 - \alpha_n) W_n S_{r_{1,n}}^1 S_{r_{2,n}}^2 \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - p\|^2 =\\ \|(W_n S_{r_{1,n}}^1 S_{r_{2,n}}^2 \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - p) + \alpha_n(\Phi(x_n) - W_n S_n x_n)\|^2 \leqslant\\ \|W_n S_{r_{1,n}}^1 S_{r_{2,n}}^2 \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - p\|^2 + \alpha_n\xi_n (\text{应用式}(18)) \leqslant\\ \|S_{r_{K,n}}^K x_n - p\|^2 + \alpha_n\xi_n.\end{aligned} \tag{19}$$

把式(19)代人式(17),即得

$$\|x_n - S_{r_{K,n}}^K x_n\|^2 \leqslant \alpha_n\xi_n.$$

因为序列 $\{x_n\}$ 是有界的, 故 $\{W_n S_n x_n\}$ 是有界的. 由假定 $\alpha_n \to 0$,从而 $\alpha_n\xi_n \to 0$. 故有

$$\|x_n - S_{r_{K,n}}^K x_n\| \to 0, \qquad \text{当 } n \to \infty. \tag{20}$$

下面我们利用归纳法证明结论(16)成立. 设结论(16)对每一 $k > \bar{k}$ 成立. 现在我们证明它对 $\bar{k}$ 也成立.

事实上,由式(19)有

$$\begin{aligned}\|x_n - p\|^2 \leqslant \|W_n S_{r_{1,n}}^1 S_{r_{2,n}}^2 \cdots S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - p\|^2 + \alpha_n\xi_n \leqslant\\ \|S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - p\|^2 + \alpha_n\xi_n.\end{aligned} \tag{21}$$

因为

$$\begin{aligned}&\|S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - p\| =\\ &\|S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} x_n + S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} x_n - p\| \leqslant\\ &\|S_{r_{\bar{k}+1,n}}^{\bar{k}+1} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - x_n\| + \|S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} x_n - p\| \leqslant\\ &\|S_{r_{\bar{k}+1,n}}^{\bar{k}+1} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - S_{r_{\bar{k}+1,n}}^{\bar{k}+1} x_n\| + \|S_{r_{\bar{k}+1,n}}^{\bar{k}+1} x_n - x_n\| + \|S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} x_n - p\| \leqslant\\ &\|S_{r_{\bar{k}+2,n}}^{\bar{k}+2} \cdots S_{r_{K,n}}^K x_n - x_n\| + \|S_{r_{\bar{k}+1,n}}^{\bar{k}+1} x_n - x_n\| + \|S_{r_{\bar{k},n}}^{\bar{k}} x_n - p\| \leqslant\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - p \| + \sum_{k=\bar{k}+1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| . \tag{22}$$

把式(22)代入式(21),简化后有

$$\| x_n - p \|^2 \leqslant \left(\sum_{k=\bar{k}+1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| + 2 \| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - p \| \right) \sum_{k=\bar{k}+1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| +$$

$$\| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - p \|^2 + \alpha_n \xi_n . \tag{23}$$

在式(17)中取 $k = \bar{k}$, 即得

$$\| x_n - S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} \|^2 \leqslant \| x_n - p \|^2 - \| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - p \|^2. \tag{24}$$

由式(23)和式(24)可得

$$\| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - x_n \|^2 \leqslant$$

$$\left(\sum_{k=\bar{k}+1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| + 2 \| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - p \| \right) \sum_{k=\bar{k}+1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| + \alpha_n \xi_n .$$

由归纳法假定, 对每一 $k = \bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \cdots, K, \lim_{n\to\infty} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| = 0$. 这就指出:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\bar{k}+1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| = 0,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} \| S^{\bar{k}}_{r_{\bar{k},n}} x_n - x_n \| = 0.$$

结论(16)被证明.

(Ⅳ) 现在我们证明

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - W_n x_n \| = 0. \tag{25}$$

事实上,记 $\eta_n := 2\langle \Phi(x_n) - W_n S_n x_n, x_n - W_n x_n \rangle$, 于是由不等式(18)可得

$$\begin{aligned} \| x_n - W_n x_n \|^2 &= \| \alpha_n \Phi(x_n) + (1 - \alpha_n) W_n S_n x_n - W_n x_n \|^2 = \\ & \| (W_n S_n x_n - W_n x_n) + \alpha_n (\Phi(x_n) - W_n S_n x_n) \|^2 \leqslant \\ & \| W_n S_n x_n - W_n x_n \|^2 + \alpha_n \eta_n \leqslant \\ & \| S_n x_n - x_n \|^2 + \alpha_n \eta_n . \end{aligned} \tag{26}$$

而且,还有

$$\begin{aligned} \| S_n x_n - x_n \| &\leqslant \| S^1_{r_{1,n}} S^2_{r_{2,n}} \cdots S^K_{r_{K,n}} x_n - S^1_{r_{1,n}} x_n \| + \| S^1_{r_{1,n}} x_n - x_n \| \leqslant \\ & \| S^2_{r_{2,n}} \cdots S^K_{r_{K,n}} x_n - x_n \| + \| S^1_{r_{1,n}} x_n - x_n \| \leqslant \\ & \vdots \\ & \sum_{k=1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| . \end{aligned} \tag{27}$$

把式(27)代入式(26),即得

$$\| x_n - W_n x_n \|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| \right)^2 + \alpha_n \eta_n .$$

因为 $\alpha_n \to 0$ 而且 $\{\eta_n\}$ 是有界的,于是由式(16)我们有

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - W_n x_n \|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{K} \| S^k_{r_{k,n}} x_n - x_n \| \right)^2 + \alpha_n \eta_n \right\} = 0. \tag{28}$$

结论(25)被证明.

(Ⅴ) 下面我们证明变分不等式(13)至多有一解

设相反,式(13)有两个解 $x^*, y^* \in \mathcal{F}$, 于是有

$$\langle (I-\Phi)x^*, x-x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in \mathcal{F} \tag{29}$$

和

$$\langle (I-\Phi)y^*, x-y^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in \mathcal{F}. \tag{30}$$

在式(29)和式(30)中分别取 $x=y^*$ 和 $x=x^*$, 然后把所得的两个式子加起来,即得

$$\langle (I-\Phi)y^* - (I-\Phi)x^*, x^*-y^* \rangle \geqslant 0.$$

简化之,并注意到 Φ 是 ψ-弱压缩的,于是有

$$(\|x^*-y^*\| - \psi(\|x^*-y^*\|)) \geqslant \|\Phi(x^*) - \Phi(y^*)\| \geqslant \|x^*-y^*\|.$$

这就指出 $\psi(\|x^*-y^*\|) \leqslant 0$, 即, $x^*=y^*$.

(Ⅵ) 设 $x^* \in \mathcal{F}$ 是变分不等式(13)的唯一解. 现在我们证明

$$\limsup_{n\to\infty} \langle (\Phi-I)x^*, x_n-x^* \rangle \leqslant 0. \tag{31}$$

事实上,因为 $\{x_n\}$ 是有界的,选择一子序列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 使得 x_{n_j} 弱收敛于一点 $\hat{x}$, 而且

$$\limsup_{n\to\infty} \langle (\Phi-I)x^*, x_n-x^* \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle (\Phi-I)x^*, x_{n_j}-x^* \rangle. \tag{32}$$

现在我们考察 $\{x_{n_j}\}$ 的渐进中心的集合:

$$A(x_{n_j}) := \left\{ x \in C : \limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-x\| = \inf_{y\in C} \limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-y\| \right\}.$$

由式(9)和式(25)得知,对任意 $z \in A(x_{n_j})$

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-Wz\| &\leqslant \limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-W_{n_j}x_{n_j}\| + \limsup_{j\to\infty} \|W_{n_j}x_{n_j}-W_{n_j}z\| + \\ &\quad \limsup_{j\to\infty} \|W_{n_j}z-Wz\| \leqslant \limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-z\|.\end{aligned} \tag{33}$$

这就指出

$$W(A(x_{n_j})) \subset A(x_{n_j}). \tag{34}$$

用类似的方法,并借用式(16)及引理1.6,对每一 $k \in \{1,2,\cdots,K\}$, 我们也可证明

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-S^k_{r_k}z\| &\leqslant \limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-S^k_{r_{k,n_j}}x_{n_j}\| + \limsup_{j\to\infty} \|S^k_{r_{k,n_j}}x_{n_j}-S^k_{r_{k,n_j}}z\| + \\ &\quad \limsup_{j\to\infty} \|S^k_{r_{k,n_j}}z-S^k_{r_k}z\| \leqslant \limsup_{j\to\infty} \|x_{n_j}-z\|.\end{aligned}$$

这就推出

$$S^k_{r_k}(A(x_{n_j})) \subset A(x_{n_j}), \qquad k=1,2,\cdots,K. \tag{35}$$

因为 $\{x_{n_j}\}$ 弱收敛 $\hat{x}$,故由式(33) ~ (35) 得知 $A(x_{n_j})=\{\hat{x}\}$ 而且 $\hat{x} \in F(W) \cap (\cap_{k=1}^K F(S^k_{r_k}))$. 于是由引理1.3和引理1.5得知 $\hat{x} \in \mathcal{F} := \cap_{k=1}^K \mathrm{SEP}(G_k) \cap \cap_{n=1}^\infty F(T_n)$. 因 $x^* \in \mathcal{F}$ 是变分不等式(13)的唯一解,从而有

$$\lim_{j\to\infty} \langle (\Phi-I)x^*, x_{n_j}-x^* \rangle = \langle (\Phi-I)x^*, \hat{x}-x^* \rangle \leqslant 0.$$

式(31)的结论被证明.

(Ⅶ) 最后证明 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*

事实上,因 $x^* \in \mathcal{F}$, 故由式(15)和式(31)有

$$\limsup_{n\to\infty} \psi(\|x_n-x^*\|)\|x_n-x^*\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \langle \Phi(x^*)-x^*, x_n-x^* \rangle \leqslant 0,$$

即, $x_n \to x^*$ (当 $n\to\infty$).

这就完成定理2.1的证明.

定理 2.2　设 $\{T_i\}: H \to H$ 是一族非扩张映像, $G_k: H \times H \to \mathscr{R}, k = 1,2,\cdots,K$ 是一函数满足条件(A1) ~ (A4), 而 $f: H \to H$ 是一具压缩常数 $\alpha \in (0,1)$ 的 α-压缩映像. 设 $\{r_{k,n}\}_{k=1}^{K}$, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\lambda_n\}$ 是 3 个实数列, 使得 $r_{k,n} > 0, \alpha_n \in (0,1)$ 且 $0 < \lambda_n \leqslant b < 1$. 设 γ 是一实数, 使得 $0 < \gamma\alpha < 1$. 再设

1) $\mathscr{T} := \bigcap_{k=1}^{K} \mathrm{SEP}(G_k) \cap \bigcap_{n \geqslant 1} F(T_n) \neq \emptyset$;

2) 对每一 $k \in \{1,2,\cdots,K\}$, 序列 $\{r_{k,n}\}_{k=1}^{K}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} r_{k,n} = r_k$.

对每一 $n \geqslant 1$, 设 W_n 是由 $\{T_i\}$ 及 $\{\lambda_i\}$ 按式(6)中的方式生成的映像; 而对每一 $k \in \{1,2,\cdots,K\}$ 及 $n \geqslant 1$, $S_{r_{k,n}}^{k}$ 是由 G_k 和 $r_{k,n}$ 按式(10)中的方式生成的映像. 设 $\{x_n\}$ 是由下式定义的序列:

$$x_n = \alpha_n \gamma f(x_n) + (1 - \alpha_n) W_n S_{r_{1,n}}^{1} S_{r_{2,n}}^{2} \cdots S_{r_{K,n}}^{K} x_n, \qquad n \geqslant 1, \tag{36}$$

其中 $\{\alpha_n\}$ 是(0,1)中的序列, 使得 $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* \in \mathscr{T}$, 其中 x^* 是下面的变分不等式的唯一解:

$$\langle (I - \gamma f) x^*, x - x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in \mathscr{T}, \tag{37}$$

其等价于 $x^* = P_{\mathscr{T}} \gamma f(x^*)$, 它也等价于 x^* 是下面的极小问题的唯一解:

$$\min_{x \in \mathscr{T}} \frac{1}{2} \| x \|^2 + h(x), \tag{38}$$

其中 h 是 γf 的势函数.

证明　因为 $f: H \to H$ 是具压缩常数 $\alpha \in (0,1)$ 的压缩映像, 而且 $\gamma\alpha < 1$, 故 $\gamma f: H \to H$ 是 ψ-弱压缩的, 其中 $\psi(t) = (1 - \alpha)t$. 于是定理 2.2 的结论由定理 2.1 直接可得.

致谢　作者衷心感谢审稿人所提出的的宝贵意见和宜宾学院自然科学基金(2009Z03)的资助.

参考文献:

[1] Browder F E, Petryshyn W V. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space[J]. *J Math Anal Appl*, 1967, **20**: 197-228.

[2] Yamada I, Ogura N. Hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the fixed point set of certain-nonexpansive mappings[J]. *Numer Funct Anal Optim*, 2004, **25**(7/8): 619-655.

[3] Plubtieng S, Punpaeng R. A general iterative method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **336**(1): 455-469.

[4] Shimoji K, Takahashi W. Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications[J]. *Taiwanese J Math*, 2001, **5**(2): 387-404.

[5] Colao V, Acedo G L, Marino G. An implicit method for finding common solutions of variational inequalities and systems of equilibrium problems and fixed points of infinite family of nonexpansive mappings[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **71**(7/8): 2708-2715.

[6] Colao V, Marino G, Xu H K. An iterative method for finding common solutions of equilibrium problem and fixed point problems[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **344**(1): 340-352.

[7] Yao Y, Liou Y C, Yao J C. Convergence theorem for equilibrium problems and fixed point problems of infinite family of nonexpansive mappings[J]. *Fixed Point Theory Appl*, 2007, **2007**. Art ID 64363. doi:1155/2007/64363.

[8] Alber Ya I, Guerre-Delabriere. Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces[C]// Gohberg I,Lyubich Yu,Eds. *New Results in Operator Theory and Its Applications*,**98**. Basel: Birkhäuser Verlag, 1997,7-22.

[9] Song Y S. Equivalent theorems of the convergence between proximal type algorithms[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **71**(1/2): 293-300.

[10] Rhoades B E. Some theorems on weakly contractive maps[J]. *Nonlinear Anal*, 2001, **47**(4):2683-2693.

[11] 张石生. Banach 空间中广义混合平衡问题[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(9): 1033-1041.

[12] Combettes P L, Hirstoaga S A. Equilibrium programming in Hilbert spaces[J]. *J Nonlinear Convex Anal*, 2005, **6**(1): 2005: 117-136.

Viscosity Approximation With Weak Contractions for Fixed Point Problem Equilibrium Problem and Variational Inequality Problem

ZHANG Shi-sheng[1], LEE Heung-wing Joseph[2], CHAN Chi-kin[2], LIU Jing-ai[3]

(1. *Department of Mathematics*, *Yibin University*, *Yibin*, *Sichuan* 644007, *P. R. China*;
2. *Department of Applied Mathematics*, *The Hong Kong Polytechnic University*, *Kowloon*, *Hong Kong*, *P. R. China*;
3. *Department of Mathematics and Physics*, *Beijing Institute of Petro-Chemical Technology*, *Beijing* 102617, *P. R. China*)

Abstract: The purpose was by using the viscosity approximation method with a weak contraction to propose a modified iterative algorithm for finding a common element of the set of common fixed points of an infinite family of nonexpansive mappings and the set of a finite family of equilibrium problems which was also a solution of a variational inequality. Under suitable conditions, some strong convergence theorems were established in the framework of Hilbert spaces. The results presented improve and extend the corresponding results in Colao, *et al* [Nonlinear Anal, 2009,71: 2708-2715], Plubtieng, *et al*[J Math Anal Appl, 2007, 336: 455-469], Colao, *et al*[J Math Anal Appl, 2008, 344: 340-352], Yao, *et al*[Fixed Point Theory Appl,2007, Art ID 64363] and others.

Key words: viscosity approximation with weak contraction mapping; equilibrium problem; nonexpansive mapping; implicit iteration; minimization problem